

Universidade Estadual de Campinas

UNICAMP

Instituto de Física Gleb Wataghin

F 609 – Tópicos em Ensino de Física I

1º Semestre de 2011

Relatório Final de Atividades

Data: 07/06/2011

Acionamento automático de rotações

Coordenador: Professor Dr. José J. Lunazzi – IFGW
lunazzi@ifi.unicamp.br

Orientador: Professor Dr. José J. Lunazzi – IFGW
lunazzi@ifi.unicamp.br



Aluno: Fernando Bernardino
fbernardino2003@yahoo.com.br



1) Resumo

O trabalho apresentado nesse relatório final originou-se da idéia de um experimento prático para despertar a curiosidade de alunos do ensino médio, permitindo abordar os conceitos físicos tangentes.

Consiste em utilizar um acionamento eletrônico para compensar a energia perdida (principalmente com atrito) por um pêndulo duplo caótico. Dessa forma, o movimento caótico que chama atenção dos alunos duraria indefinidamente.

2) Introdução

O projeto do pêndulo em sí, já foi apresentado por outros alunos. Nesse trabalho foi desenvolvido um pêndulo duplo de acrílico, no qual foi acoplado um motor de corrente contínua para criar um movimento contínuo.

Utilizando o torque do motor foi possível compensar eventuais perdas do sistema e manter o movimento caótico indefinidamente. Para tanto, foi necessário controlar o instante de acionamento do motor para que ocorresse sempre a favor do movimento, caso contrário o motor estaria contribuindo para que o pêndulo entrasse em repouso.

No entanto para não descaracterizar o funcionamento do pêndulo caótico, o motor somente é acionado (injetando energia externa ao sistema) por períodos curtos de tempo.

Com um simples circuito elétrico e sensores, foi possível alcançar o objetivo inicial.

3) Atividades desenvolvidas

A parte mecânica foi totalmente desenvolvida no ambiente da universidade. Na figura 1 temos uma visão geral do pêndulo.

Os braços e flanges que vemos na figura 1, foram fabricados em acrílico. No eixo principal temos o motor de corrente contínua acoplado através de uma flange de metal torneada, na qual é fixado o braço principal do pêndulo utilizando três parafusos. Veja os detalhes nas figura 2 e 3. Além disso, pode-se visualizar nas figuras 2 e 3 que foi fixado uma flange de acrílico a carcaça do motor. Essa flange é utilizada para a fixação dos sensores que são utilizado para controlar o acionamento do motor.

O conjunto todo é suportado por um pedestal de metal reutilizado de um antigo equipamento que fora descartado.

A fixação do motor dc ao pedestal de metal foi feita utilizando um varão sem fim curvado ao redor da carcaça de metal do motor e adaptado a uma base fixa no pedestal.



Figura 1 – Visão geral do pêndulo



Figura 2 – Vista Superior do acoplamento do eixo principal



Figura 3 - Vista lateral do acoplamento do eixo principal

Para o acoplamento do braço principal do pêndulo ao braço secundário (braço menor) foi utilizado um rolamento de disco rígido por apresentar baixo atrito e ser muito leve, como podemos ver na figura 4.



Figura 4 – Acoplamento do braço principal ao secundário

Como já foi mencionado anteriormente, o circuito de comando elétrico utiliza sensores para controlar o momento adequado para o acionamento do motor dc.

São utilizados dois sensores magnéticos do tipo red switch como mostrado na figura 5.



Figura 5 – Sensores red switches utilizados.

Esses sensores são fixados numa flange presa a carcaça do motor conforme mostra a figura 6. De acordo com a sequência de acionamento dos sensores, conhecemos o sentido de rotação do eixo principal.

O motor é acionado num único sentido, de S1 para S2, ou seja, sentido horário.

Essa abordagem fez com que o circuito de controle ficasse mais simples, uma vez que não é necessário inverter a corrente no motor dc para dar pulsos no sentido horário e anti-horário, dependendo do sentido de rotação do eixo principal.

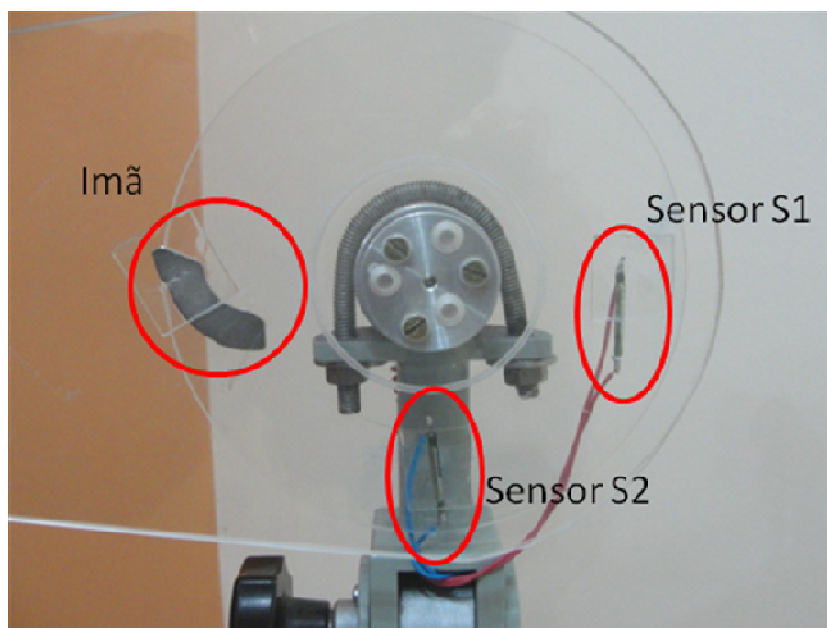


Figura 6 – Eixo principal e disposição dos sensores

O circuito de controle foi projetado para que fosse implementado com componentes simples para que futuras manutenções não viessem demandar tempo e/ou inviabilizar o projeto.

Inicialmente, o circuito de controle foi montado num protoboard para testes (Figura 7). Durante esse período várias melhorias e simplificações foram acontecendo, resultando no circuito da figura 8, já montado soldado em placa definitiva.



Figura 7 – Circuito de controle em testes

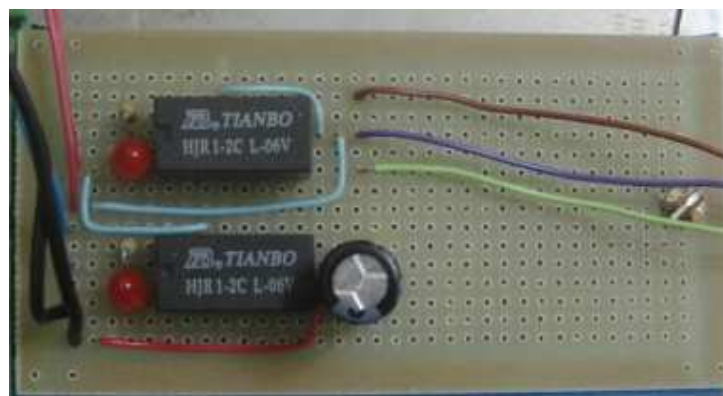


Figura 8 – Placa de controle final

O motor dc utilizado é alimentado com pulsos de 12Vcc em instantes adequados dados pelos sensores como discutido anteriormente. Nesse tipo de regime de trabalho, a corrente elétrica consumida pelo motor dc é sempre uma corrente de pico (aproximadamente a corrente de partida do motor) e devido a isso, foi necessário substituir a fonte de alimentação inicial por uma com maior potência. Dessa form utiliza-se uma fonte de alimentação de computador que fornece 12Vcc para o acionamento do motor dc e 5Vcc para o circuito de controle.

Na figura 9, temos uma visão geral do circuito de controle e fonte.

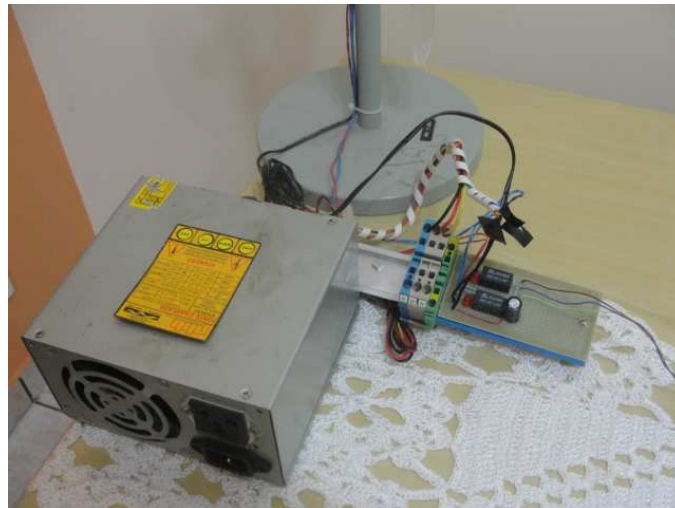


Figura 9 – Circuito de controle e fonte

O esquema elétrico é mostrado na figura 10, onde R1 e R2 são relés, S1 e S2 são os sensores red switches, M é o motor e C1 é o capacitor.

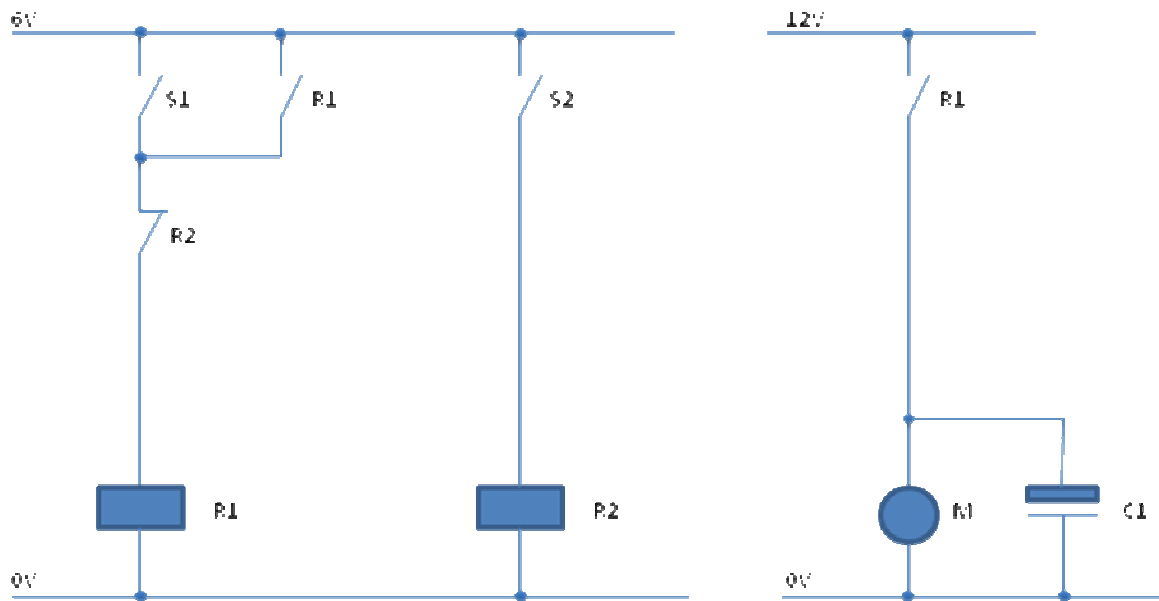


Figura 10 – Esquema elétrico

O layout da placa de circuito mostrada na figura 8, com o posicionamento dos componentes e cabos está na figura 11.

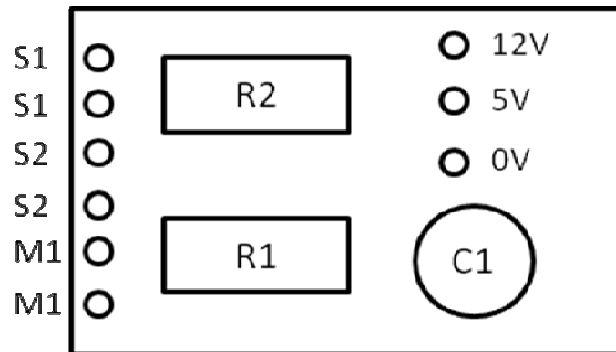


Figura 11 – Layout da placa de circuito

4) Conclusão

O trabalho ocorreu conforme previsto e embora várias dificuldades surgiram durante a fase de testes, as soluções alcançadas geraram um pêndulo duplo caótico de movimento contínuo bastante simples de se implementar e que satisfaz perfeitamente o objetivo inicial.

5) Comentários

O trabalho está sendo muito bem desenvolvido e consegue manter o pêndulo funcionando em regime constante. Ainda será tentado colocar uma excitação variável para poder mostrar os diferentes casos de movimento.

6) Referências

ESTUDO DO CAOS NO PÊNDULO COMPOSTO E A MONTAGEM DE UM PÊNDULO MAGNÉTICO CAÓTICO.

O trabalho da aluna Tatyana G. Stankevicius foca a construção de um pêndulo duplo caótico que usado nesse projeto.

http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F609_2010_sem2/TatyanaG-MaurodeCarvalho_F609_RF2.pdf

PROJEÇÃO DO PÊNDULO DUPLO

O trabalho do aluno André Luiz Pereira projetava a sombra do mesmo pêndulo duplo para análise do movimento.

http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2009/AndreL-Lunazzi_RF1.pdf

PÊNDULO COMPOSTO ACIONADO ELETRICAMENTE

O trabalho do aluno Marcos Felipe Frantz de Oliveira tinha o mesmo objetivo deste projeto, porém não foi terminado.

http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F609_2010_sem2/MarcosF-Lunazzi_RF1.pdf

PÊNDULOS

O trabalho do aluno José Eduardo Velloni trata de forma clara a teoria envolvida com pêndulos e aborda a construção de um pêndulo caseiro.

http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2007/JoseE_Lunazzi_2o_grau_PendulosRF.pdf

El péndulo doble

Site que explica a teoria do pêndulo duplo, incluindo simulações virtuais.

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo_doble/pendulo_doble.htm

Double Pendulum

Conteúdo do wikipedia sobre pêndulos duplos.

http://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum

SIMULATION AND DYNAMICAL CHARACTERIZATION OF AN ACTIVE MECHANICAL CHAOTIC DOUBLE PENDULUM

Trabalho realizado pela UFMG sobre caracterização de sistemas dinâmicos usando um pêndulo duplo caótico.

http://www.cpdee.ufmg.br/documentos/PublicacoesDefesas/720/chaotic_pendulum_3_0.pdf

Stable Rotation of a Parametrically Excited Double Pendulum

Trabalho desenvolvido na Universidade de Saitama (Japão) sobre pêndulo duplo com motor dc.

<http://jvc.sagepub.com/content/13/2/111.abstract>

CI555

Página do professor Ivair sobre o CI555, utilizado como temporizador em nosso projeto.

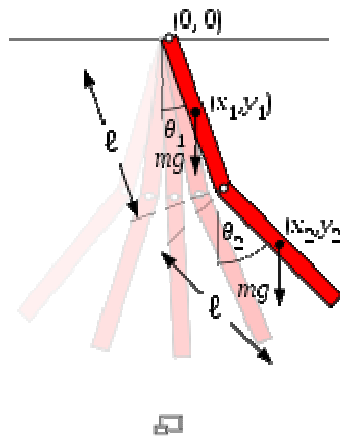
<http://ivairijs.vilabol.uol.com.br/CI-555.html>

7) Textos das referências da internet

Anexo 1 - http://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum

In mathematics, in the area of dynamical systems, a double pendulum is a pendulum with another pendulum attached to its end, and is a simple physical system that exhibits rich dynamic behavior with a strong sensitivity to initial conditions. The motion of a double pendulum is governed by a set of coupled ordinary differential equations. For certain energies its motion is chaotic.

Several variants of the double pendulum may be considered; the two limbs may be of equal or unequal lengths and masses, they may be simple pendulums or compound pendulums (also called complex pendulums) and the motion may be in three dimensions or restricted to the vertical plane. In the following analysis, the limbs are taken to be identical compound pendulums of length ℓ and mass m , and the motion is restricted to two dimensions.



Double compound pendulum.

In a compound pendulum, the mass is distributed along its length. If the mass is evenly distributed, then the centre of mass of each limb is at its midpoint, and the limb has a moment of inertia of $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ about that point.

It is convenient to use the angle between each limb and the vertical as the generalized coordinates defining the configuration of the system. These angles are denoted θ_1 and θ_2 . The position of the centre of mass of each rod may be written in terms of these two coordinates. If the origin of the Cartesian coordinate system is taken to be at the point of suspension of the first pendulum, then the centre of mass of this pendulum is at:

$$x_1 = \frac{\ell}{2} \sin \theta_1,$$

$$y_1 = -\frac{\ell}{2} \cos \theta_1$$

and the centre of mass of the second pendulum is at

$$x_2 = \ell \left(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right),$$

$$y_2 = -\ell \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right).$$

This is enough information to write out the Lagrangian.

Lagrangian

The Lagrangian is

$L = \text{Kinetic Energy} - \text{Potential Energy}$

$$= \frac{1}{2}m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg (y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg (y_1 + y_2)$$

The first term is the linear kinetic energy of the center of mass of the bodies and the second term is the rotational kinetic energy around the center of mass of each rod. The last term is the potential energy of the bodies in a uniform gravitational field. The dot-notation indicates the time derivative of the variable in question.

Substituting the coordinates above and rearranging the equation gives

$$L = \frac{1}{6}m\ell^2 \left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{2}mg\ell (3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

Motion of the double compound pendulum (from numerical integration of the equations of motion)



Long exposure of double pendulum exhibiting chaotic motion (tracked with an LED)

There is only one conserved quantity (the energy), and no conserved momenta. The two momenta may be written as

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{6} m \ell^2 \left[8\dot{\theta}_1 + 3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

and

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{6} m \ell^2 \left[2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right].$$

These expressions may be inverted to get

$$\dot{\theta}_1 = \frac{6}{m \ell^2} \frac{2p_{\theta_1} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_2}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

and

$$\dot{\theta}_2 = \frac{6}{m \ell^2} \frac{8p_{\theta_2} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

The remaining equations of motion are written as

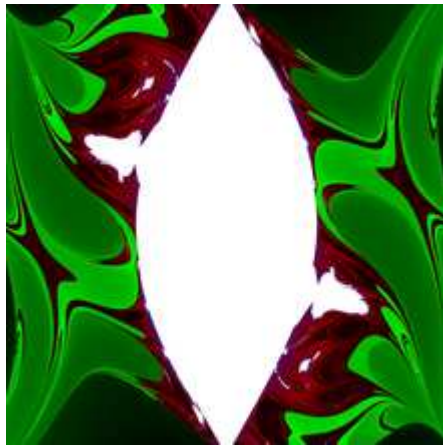
$$\dot{p}_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m \ell^2 \left[\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3 \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 \right]$$

and

$$\dot{p}_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m \ell^2 \left[-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin \theta_2 \right].$$

These last four equations are explicit formulae for the time evolution of the system given its current state. It is not possible to go further and integrate these equations analytically, to get formulae for θ_1 and θ_2 as functions of time. It is however possible to perform this integration numerically using the Runge Kutta method or similar techniques.

Chaotic motion



Graph of the time for the pendulum to flip over as a function of initial conditions

The double pendulum undergoes chaotic motion, and shows a sensitive dependence on initial conditions. The image to the right shows the amount of elapsed time before the pendulum "flips over," as a function of initial conditions. Here, the initial value of θ_1 ranges along the x-direction, from -3 to 3 . The initial value θ_2 ranges along the y-direction, from -3 to 3 . The colour of each pixel indicates whether either pendulum flips within $10\sqrt{e/g}$ (green), within $100\sqrt{e/g}$ (red), $1000\sqrt{e/g}$ (purple) or $10000\sqrt{e/g}$ (blue). Initial conditions that don't lead to a flip within $10000\sqrt{e/g}$ are plotted white.

The boundary of the central white region is defined in part by energy conservation with the following curve:

$$3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2.$$

Within the region defined by this curve, that is if

$$3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 > 2,$$

then it is energetically impossible for either pendulum to flip. Outside this region, the pendulum can flip, but it is a complex question to determine when it will flip.

The lack of a natural excitation frequency has led to the use of double pendulum systems in seismic resistance designs in buildings, where the building itself is the primary inverted pendulum, and a secondary mass is connected to complete the double pendulum.

Anexo 2 - <http://ivairijs.vilabol.uol.com.br/CI-555.html>

Professor: Ivair José de Souza

O Circuito integrado 555

O CI 555 é utilizado em temporizadores de precisão e osciladores.

Com o "timer" 555 obtém-se temporizações precisas desde microssegundos até horas.

Pode-se também utilizá-lo como multivibrador astável (oscilador) em que a frequência de oscilação é controlada externamente por resistores e capacitores.

Ligações dos pinos (pinagem)

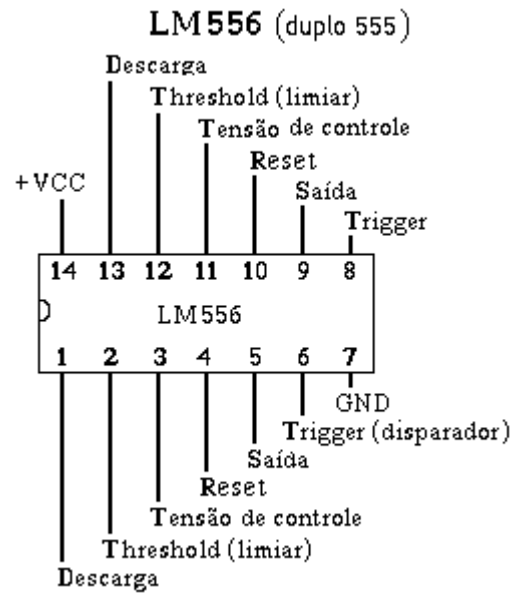
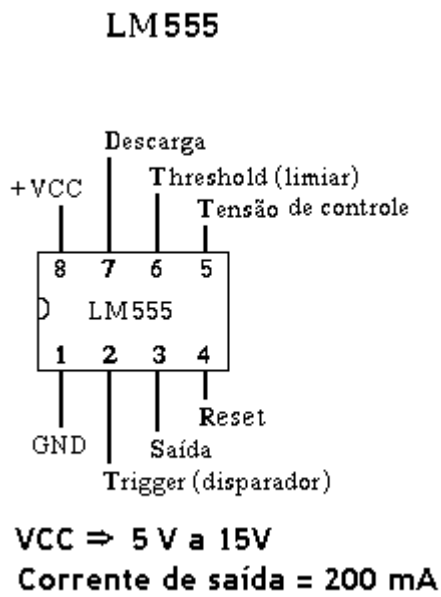
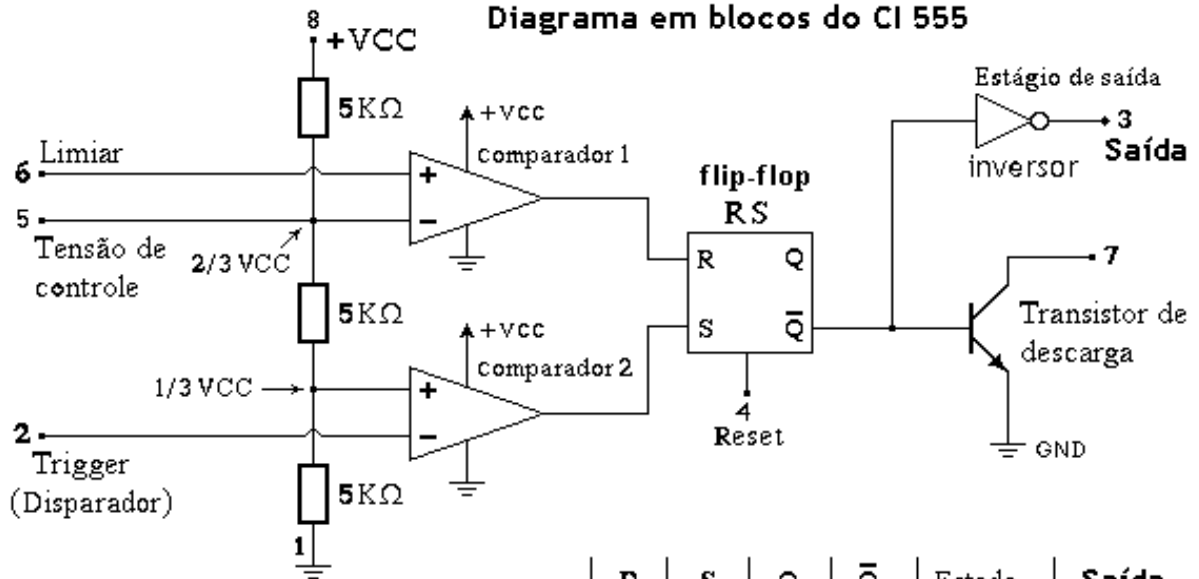


Diagrama em blocos

Diagrama em blocos do CI 555



$V_6 < 2/3 V_{CC} \Rightarrow R = 0$
 $V_2 < 1/3 V_{CC} \Rightarrow S = 1$
 $V_6 > 2/3 V_{CC} \Rightarrow R = 1$
 $V_2 > 1/3 V_{CC} \Rightarrow S = 0$

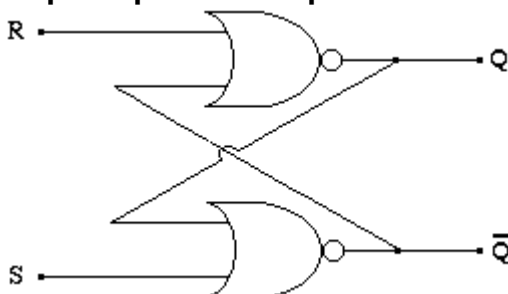
$V_6 \Rightarrow$ tensão no pino 6
 $V_2 \Rightarrow$ tensão no pino 2

R	S	Q	\bar{Q}	Estado	Saída
0	0	Não muda		Hold	não muda
0	1	1	0	Set	1
1	0	0	1	Reset	0
1	1	0	0	Proibido	1

flip-flop

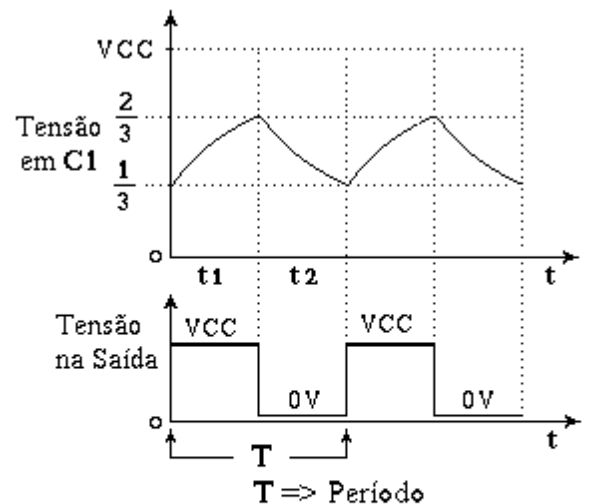
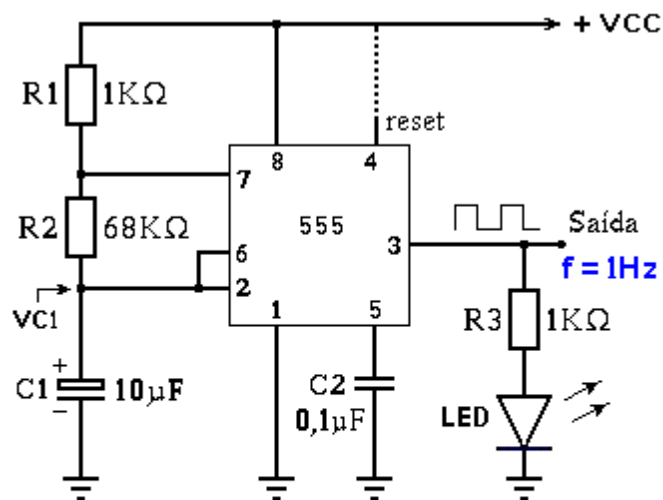
Situações	Pino 2	Pino 6	R	S	Q	\bar{Q}	Transistor	Saída (pino 3)
1	$> 1/3 V_{CC}$	$< 2/3 V_{CC}$	0	0	Não muda		Não muda	Não muda
2	$< 1/3 V_{CC}$	$< 2/3 V_{CC}$	0	1	1	0	Em corte	1
3	$> 1/3 V_{CC}$	$> 2/3 V_{CC}$	1	0	0	1	Saturado	0
4	$< 1/3 V_{CC}$	$> 2/3 V_{CC}$	1	1	0	0	Em corte	1

Flip-Flop R S com portas NOR



R	S	Q	\bar{Q}	Estado
0	0	Não muda		Hold
0	1	1	0	Set
1	0	0	1	Reset
1	1	0	0	Proibido

Multivibrador astável



$$t_1 = 0,693(R_1 + R_2) \cdot C_1 \Rightarrow t_1 \Rightarrow \text{Tempo de carga de } C_1$$

$$t_2 = 0,693 \cdot R_2 \cdot C_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow \text{Tempo de descarga de } C_1$$

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = 0,693 \cdot C_1 (R_1 + 2R_2)$$

$$f = 1 / T$$

$$f = \text{freqüência de oscilação}$$

$$f = \frac{1,44}{(R_1 + 2R_2) \cdot C_1}$$

O ciclo de trabalho, considerando o nível alto na saída, será: $D = (t_1 / T) \cdot 100\% \Rightarrow D = (R_1 + R_2) / (R_1 + 2R_2) \cdot 100\%$

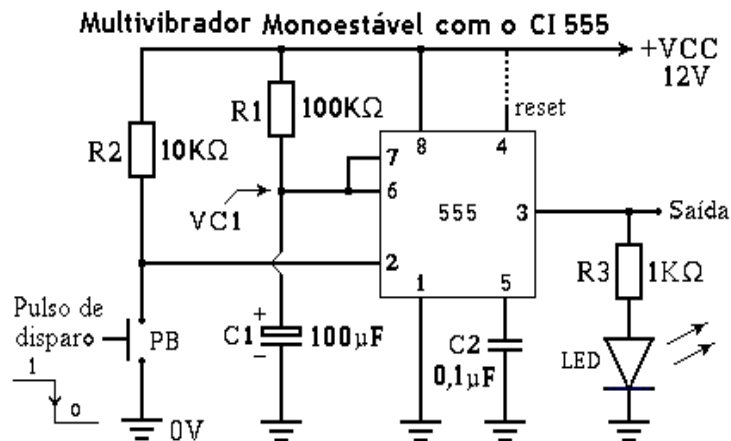
No circuito acima, o ciclo de trabalho (para nível alto) será sempre maior do que 50% devido a se ter $t_1 > t_2$.

Multivibrador monoestável

O estado estável da saída é nível 0 (0V).

Aplicando um pulso de disparo ao pino 2, a saída muda de 0V para VCC e permanece neste estado durante a carga do capacitor C1.

C1 carrega através do resistor R1 e assim que a tensão no mesmo atinge 2/3 VCC a saída volta a 0V.

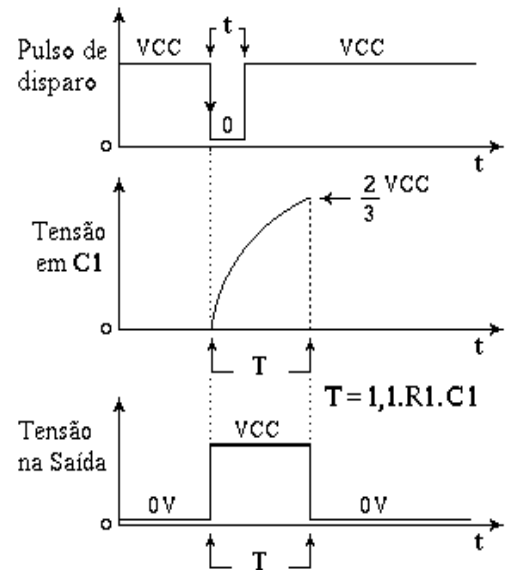


$$T = 1,1 \cdot R1 \cdot C1$$

$$T = 1,1 \cdot 100K \cdot 100\mu \Rightarrow T = 1,1 \cdot 10 = 11 \text{ segundos}$$

T \Rightarrow Temporização ou tempo de carga do capacitor C1

t \Rightarrow Duração do pulso de disparo e deve-se ter t < T



C1 carrega de 0V até 2/3 VCC

$$T = R1 \cdot C1 \cdot \ln \frac{VCC}{(VCC - 2/3 VCC)} \Rightarrow VCC / (VCC - 2/3 VCC) = 3$$

$$T = R1 \cdot C1 \cdot \ln 3$$

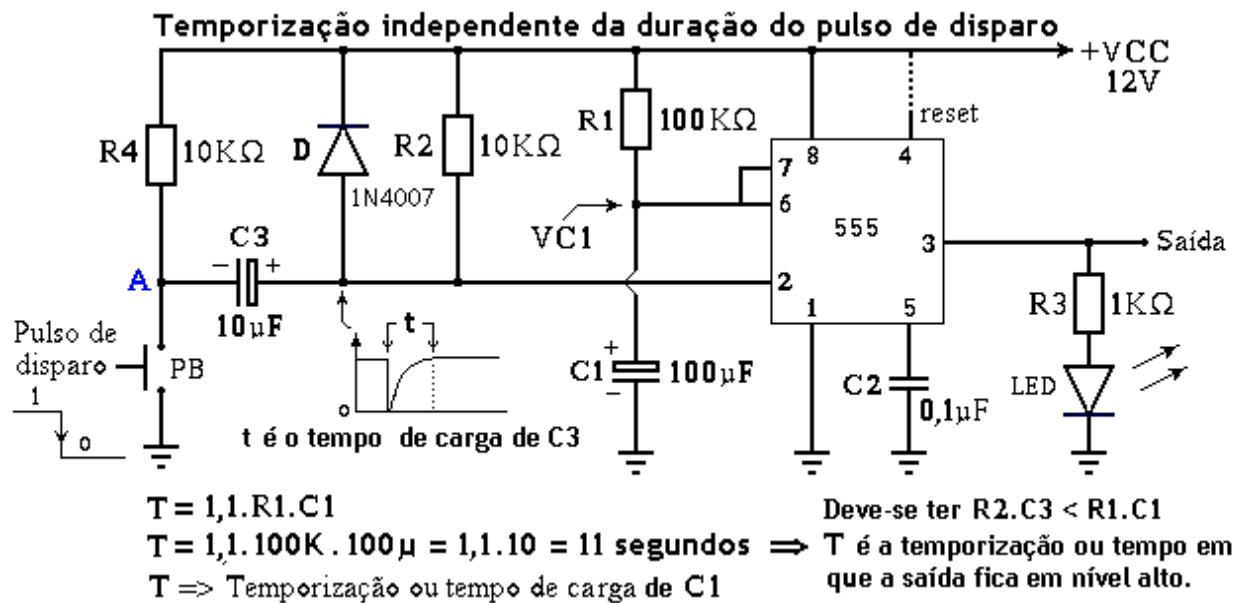
$$T = 1,1 \cdot R1 \cdot C1$$

$$T = 1,1 \cdot 100K \cdot 100 \mu F \Rightarrow T = 1,1 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \Rightarrow T = 11$$

segundos.

Pressionar momentaneamente PB para obter o pulso de disparo. A saída volta a 0V após a temporização se a tensão no pino 2 estiver em nível alto isto é, se após a temporização (tempo de carga de C1) o pino 2 ainda estiver aterrado, a saída não voltará a zero.

Multivibrador monoestável - Temporização independente da duração do pulso de disparo

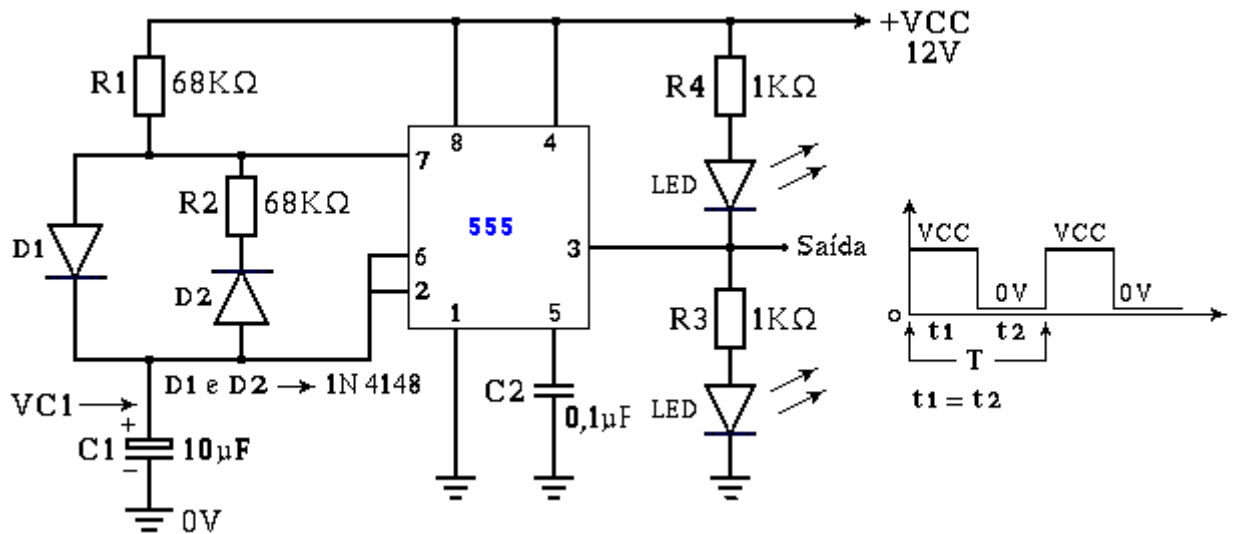


Pressionando PB, o ponto A é aterrado e liga C3 entre o pino 2 e terra. Como C3 está descarregado é aplicado 0V ao pino 2 e tem-se o disparo. A saída do 555 muda de 0V para VCC e permanece nesta condição durante o tempo de carga de C1. C3 carrega "rapidamente" através de R2 tornando a tensão no pino 2 em nível alto que é a condição para que a saída volte a 0V no final da carga de C1. Neste circuito, mesmo mantendo a botoeira (PB) pressionada, a saída volta a 0V após o tempo de carga de C1.

Deve-se ter o tempo de carga de C3 menor do que o tempo de carga de C1 isto é $R2 \cdot C3 < R1 \cdot C1$.

O diodo D é uma proteção para o 555 pois evita sobretensão no pino 2 no instante em que a tensão no ponto A muda de 0V para VCC (instante em que o PB é liberado).

Multivibrador Astável com ciclo de trabalho igual a 50%



C1 carrega de $1/3V_{CC}$ até $2/3V_{CC}$ através de R1 e D1
 C1 descarrega de $2/3V_{CC}$ até $1/3V_{CC}$ através de D2 e R2.

$$t_1 = 0,693 \cdot R_1 \cdot C_1 \Rightarrow t_1 = 0,693 \cdot 68K \cdot 10\mu F \Rightarrow t_1 = 0,47 \text{ seg.}$$

$$t_2 = 0,693 \cdot R_2 \cdot C_1 \Rightarrow t_2 = 0,693 \cdot 68K \cdot 10\mu F \Rightarrow t_2 = 0,47 \text{ seg.}$$

Para $R_1 = R_2$ tem-se $t_1 = t_2$ e com isto o ciclo de trabalho será de 50% e a onda quadrada na saída será simétrica .

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = 0,47s + 0,47s \Rightarrow T = 0,94 \text{ seg.}$$

$$f = 1 / T \Rightarrow f = 1 / 0,94s \Rightarrow f = 1,06\text{Hz} \quad (\text{f é a frequência de oscilação})$$

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = 0,693 \cdot R_1 \cdot C_1 + 0,693 \cdot R_2 \cdot C_1 \Rightarrow T = 0,693 \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2)$$

$$f = 1 / T \Rightarrow f = 1 / 0,693 \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2) \Rightarrow f = 1,44 / [(R_1 + R_2) \cdot C_1]$$

$$\text{Para } R_1 = R_2 = R \text{ resulta em: } f = 1,44 / (2 \cdot R \cdot C_1) \Rightarrow f = 0,72 / (R \cdot C_1)$$

Trocando C1 de 10µF por 0,01µF (10nF), a frequência de oscilação será de aproximadamente 1KHz (1000Hz) e $T = 1\text{ms}$.

$$D = (t_1 / T) \cdot 100\%$$

$$D = R_1 / (R_1 + R_2) \cdot 100\%$$

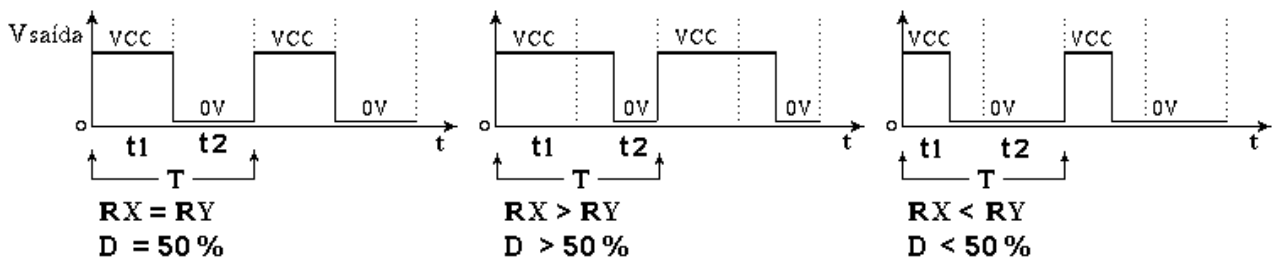
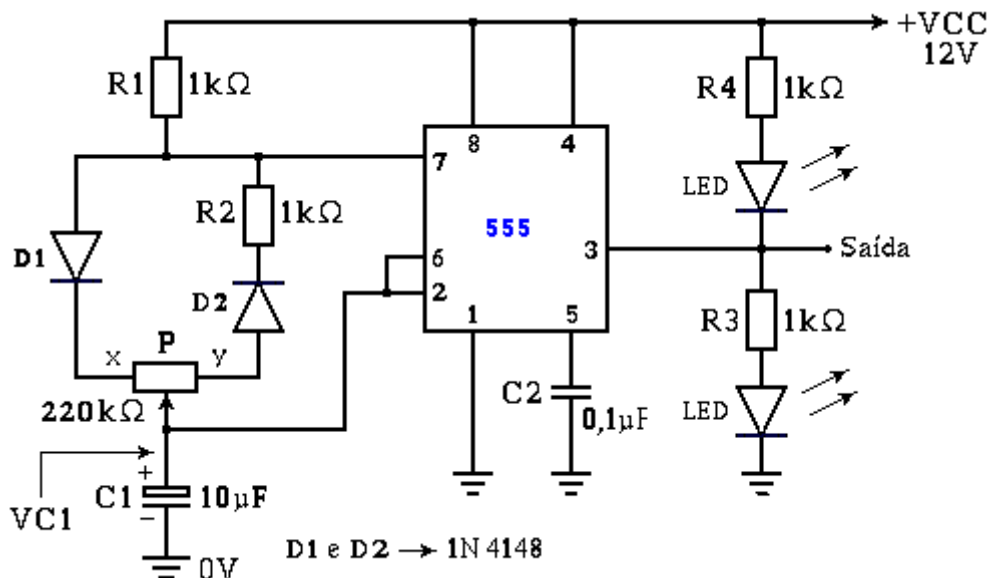
O ciclo de trabalho D, normalmente, é a relação entre o tempo em que a saída fica em nível alto (t_1) e o período T.

Pode-se alterar o ciclo de trabalho através de R1 ou de R2 no entanto, o período T altera e conseqüentemente também altera a frequência de oscilação.

Se $R_1 = 9 \cdot R_2$ tem-se $D = 90\%$ -> saída em nível alto (VCC) durante 90% do período T e tem-se $t_1 > t_2$

Se $R_2 = 4 \cdot R_1$ tem-se $D = 20\%$ -> saída em nível alto (VCC) durante 20% do período T e tem-se $t_1 < t_2$

Ajuste do ciclo de trabalho sem alterar o período T



$$T = t_1 + t_2$$

Se t_1 aumenta t_2 diminui mantendo o valor de T.

Se t_1 diminui t_2 aumenta mantendo o valor de T.

Girando o potenciômetro para a esquerda ($R_X < R_Y$), t_1 diminui e t_2 aumenta.

Girando o potenciômetro para a direita ($R_X > R_Y$), t_1 aumenta e t_2 diminui.

C1 carrega de $1/3V_{CC}$ até $2/3V_{CC}$ através de R1, D1 e R_X .

C1 descarrega de $2/3V_{CC}$ até $1/3V_{CC}$ através de D2, R2 e R_Y .

$$t_1 = 0,693 \cdot (R_1 + R_X) \cdot C_1$$

$$t_2 = 0,693 \cdot (R_2 + R_Y) \cdot C_1$$

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = 0,693 \cdot C_1 \cdot (R_1 + P + R_2)$$

$P = R_X + R_Y$ e P é o potenciômetro que no circuito acima é de $220K\Omega$

$f = 1,44 / (R_1 + P + R_2) \cdot C_1$. A frequência de oscilação não varia mesmo variando o ciclo de trabalho D.

$$D = (t_1 / T) \cdot 100\% \Rightarrow D = (R_1 + R_X) / (R_1 + P + R_2) \cdot 100\%$$