



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"  
F 609 – TÓPICOS DE ENSINO DE FÍSICA I



**Relatório Final**  
**de**  
**F 609 – Tópicos de Ensino de Física I**

**Balança de correio e determinação de densidades de líquidos**



Aluno: Aeliton Fernando de Souza  
aelitonsouza x gmail.com



Orientador: Eng. Pedro Raggio  
praggio x ifi.unicamp.br

07 de novembro de 2011

IFGW/ UNICAMP

## **Relatório Final de F 609 – 2º semestre de 2011**

### **Balança de correio e determinação de densidades de líquidos**

#### **Resumo**

A pesagem de cartas é um procedimento padrão realizado nas agências antes da taxação e envio das mesmas. Antigamente, quando ela não era feita nas agências (e não eram eletrônicas), os próprios carteiros se encarregavam desta tarefa. Para isso, eles utilizavam um equipamento que foi denominado balança de correio, justamente em alusão à sua aplicação neste segmento. Tal instrumento tornou possível a pesagem das cartas com grande precisão e ainda possuía a vantagem de ser leve facilitando seu transporte. Outra vantagem é que uma vez calibrada, ela não necessita de reparos pois não perde precisão com passar do tempo. Existem diferentes modelos de balanças de correio e elas podem ser construídas a base de madeira, plástico, acrílico ou outro material.

Nesta disciplina vamos construir uma balança de correio e calibrá-la com o uso de massas conhecidas a partir da utilização de uma balança eletrônica de precisão. Depois, encheremos um copo plástico graduado com água, e em seguida com óleo, anotando seus volumes e medindo a massa do copo em cada caso utilizando a balança recém-fabricada. Dividindo a massa medida através da balança pelo volume preenchido, obteremos a densidade de cada líquido.

#### **Importância didática do trabalho**

Como qualquer instrumento de medição, a balança de correio permitirá ao aluno exercitar conceitos referentes a estática e firmará a noção de que medir é comparar grandezas. Sua utilização para medir massas de volumes conhecidos de líquidos poderá ainda levá-los a reflexões sobre a densidade dos materiais e sua consequência imediata, isto é, corpos menores (em volume) podendo ser ao mesmo tempo mais pesados.

Dessa forma, conceitos como momento de uma força, massa, volume e densidade serão intensamente trabalhados pelos alunos.

#### **Originalidade**

Além do cunho histórico, os estudantes poderão conhecer um tipo de balança que até o momento, muito provavelmente, desconheciam. Portanto esse instrumento prático e eficiente pode ser considerado algo novo para eles.

#### **Lista de Materiais**

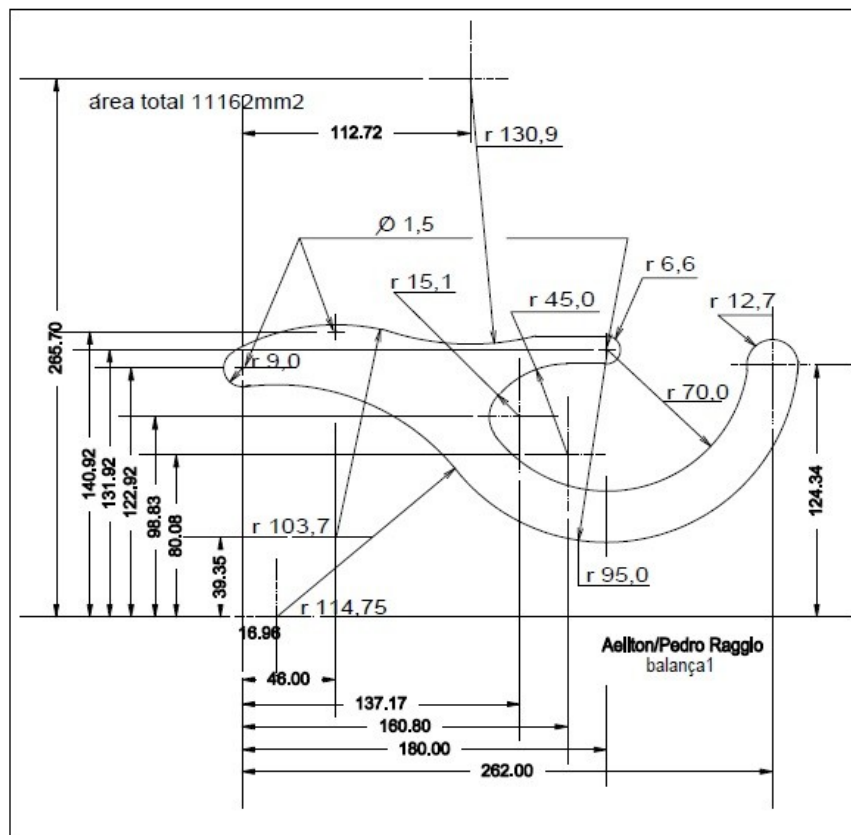
Placa de plástico de 30cmX25cm, garra do tipo jacaré, pesos de chumbo para pesca, balança de precisão, fio ou linha que suporte o peso da balança com os objetos pendurados, papel de alumínio, papel sulfite, estilete, tesoura, cola para uso em junções metal-plástico e metal-papel, seringa graduada, barbante, caneta para cd, copo plástico, um recipiente com óleo e outro com água.

#### **Procedimentos executados**

##### **Fabricação**

Um desenho técnico foi desenvolvido via software computacional (CAD – Desenho Assistido por Computador) para que pudesse ser enviado à oficina mecânica para usinagem. A peça corresponde

ao corpo da balança.



**Figura 1: Projeto do corpo da balança**

Perceba pelo desenho que há três furos de diâmetro 1,5mm. Da esquerda pra direita, o primeiro é onde penduramos o objeto a ser pesado. Ao segundo, denominado fulcro, colocamos um cordão o qual manterá a balança suspensa durante a medida. Já ao terceiro, amarramos uma massa não muito pesada que nos servirá de ponteiro.

A figura 2a apresenta a peça logo depois de usinada. O acabamento da peça foi manual, por isso há imperfeições, mas nada que atrapalhe o funcionamento da balança. Já a figura 2b mostra a peça já com o ponteiro e a garra jacaré medindo a massa de um estojo. O passo seguinte é a colocação da escala na balança, processo descrito no item calibração.



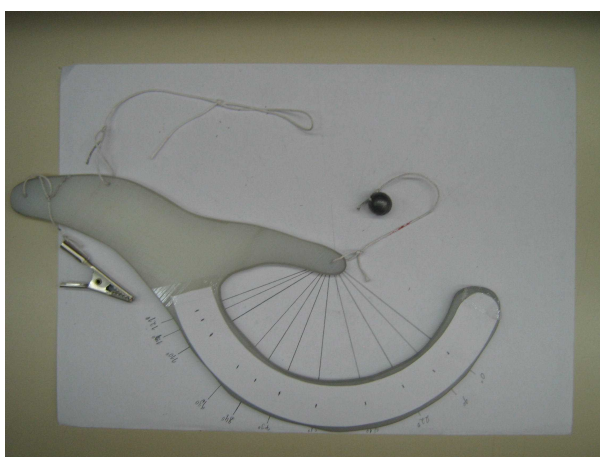
**Figura 2: a)corpo da balança logo após usinagem; b)balança funcionando sem escala.**

Depois de calibrada a balança estará pronta. Só faltará então medir as massas de quantidades conhecidas de líquidos como água e óleo e teremos um estudo completo envolvendo as duas leis

fundamentais da estática (força resultante e torque resultante nulos) e as relações entre peso, massa, densidade e volume.

## Calibração

Primeiramente prendemos um aro de papel sulfite na região da balança onde será introduzida a escala. Suspendemos a balança segurando-a pelo fio do fulcro e anotamos com um lápis um ponto no papel de modo que o fio do ponteiro cobrisse o mesmo. Este ponto é o *zero* de nossa balança. Depois chumbos de pesca foram pendurados na garra jacaré fazendo com que a balança girasse e encontrasse um novo ponto de equilíbrio. O ponteiro passa a cobrir outra região do papel e anota-se então a nova localização com outro ponto. Com a balança de precisão mede-se o valor da massa de chumbo que havia sido pendurada. O procedimento segue adicionando-se mais pesos de chumbo e anotando-se novos pontos no aro de papel sulfite e as massas correspondentes. Na figura 3 podemos observar um aro de papel sulfite cheio de pontos exatamente na região onde será colocada a escala.



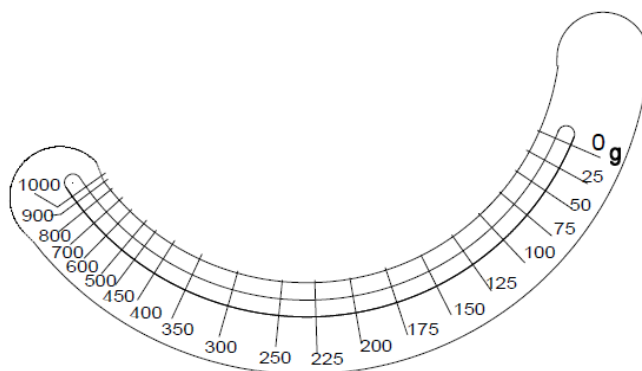
**Figura 3: Balança em processo de calibração (tabulação de massas e ângulos)**

Para a calibração nos interessava saber de qual ângulo a balança girava conforme aumentávamos o peso. Cada ponto presente no aro de papel sulfite representa, portanto, um ângulo em relação ao *zero* do nossa balança. Para obter os ângulos, esses pontos foram transferidos para uma folha de papel sulfite bastando colocá-la sobre a balança devido à relativa transparência da folha. Diversas retas foram desenhadas partindo da posição do furo que sustenta o ponteiro indo em direção aos pontos. A figura 3 nos mostra ainda a boa eficácia do método invertendo as posições, isto é, colocando a balança sobre a folha de papel sulfite e verificando que as retas desenhadas partem todas do furo mencionado e passam exatamente embaixo dos pontos assinalados no aro. Confiante na medida, é só pegar um transferidor, medir e anotar os ângulos ao lado da massa correspondente. Os dados estão dispostos na tabela a seguir:

Massa (g)	Ângulo (°)
0	0
42,8	9
95,1	22
145,3	38
204	58
254,9	73
307,8	84
359,6	93
580,1	110
785,9	117
995,3	121

**Tabela 1: Massas e ângulos usados na calibração**

Em seguida, os dados foram interpolados e extrapolados para elaborar a escala de 0g a 1000g (1kg) que está ilustrada na figura 4.



**Figura 4: Escala**

Uma observação importante a ser feita é que a variação angular não é linear com a massa. Nas medidas com massas mais próximas de 0g, uma pequena variação da massa pendurada na balança resulta em uma variação angular razoável da escala. Já quando as massas estão próximas de 1kg, é necessária uma grande variação de massa para obter uma pequena variação angular da mesma. Com isso, pode-se concluir que a precisão da balança é maior quando as massas são menores ou, em outras palavras, seu erro é menor quando a massa a ser medida também o é. A precisão também depende da graduação da escala. A finalidade desse experimento é didática, mas se for do interesse, podem ser usados valores de massas e ângulos intermediários aos apresentados na figura para tornar a leitura mais precisa.

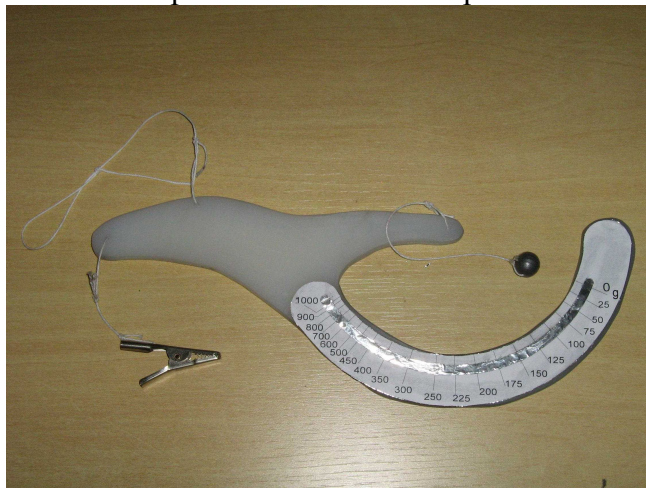
Adiante, com um estilete, é aberto o pequeno aro presente na figura 4, pois lá deverá aparecer o alumínio. A função do alumínio é evitar erros de paralaxe, isto é, erros de leitura que ocorrem quando o usuário do equipamento (balança) faz a leitura olhando não exatamente de frente, mas ligeiramente de lado para a escala, o que faz com que a linha do ponteiro cubra uma região da escala que não corresponde à leitura correta da balança. Com o papel de alumínio, a leitura é feita quando o fio do ponteiro cobre o reflexo que ele próprio faz na superfície metálica, eliminando este problema.

Feita a abertura, a escala é colada no papel de alumínio e depois recortada ficando como apresentada na figura 5. Por fim, retira-se o aro de papel sulfite do corpo da balança (figura 5) e cola-se a escala no lugar do mesmo, tomando o cuidado de fazer coincidir o zero da escala com o ponto de zero do aro a ser retirado. É muito importante olhar as especificações das colas: neste caso uma mesma cola foi capaz de colar o metal no plástico e o metal no papel sulfite (passo anterior).



**Figura 5: Balança com aro a ser retirado, cola e escala deitadas sobre a mesa**

Finalmente, a balança de correio está pronta e encontra-se representada na figura 6.



**Figura 6: Balança de correio pronta**

**Preparação do recipiente (copo graduado) para utilização com líquidos:** Com o auxílio de uma seringa graduamos um copo de modo a utilizá-lo para a determinação das densidades da água e do óleo.



**Figura 7: Material para graduar o copo**

A suspensão do copo é feita através de três pontos de sustentação devido à estabilidade dos sistemas tradicionalmente conhecidos como tripés devido à não existência do efeito gangorra que costuma ocorrer em outras configurações como dois ou quatro pontos por exemplo. Barbantes finos foram amarrados ao copo enquanto que outro, mais grosso, amarrou os três no centro do copo. Este último é que será pendurado à garra jacaré para efetuar as medidas com líquidos.



**Figura 8: Recipiente (copo graduado + barbante de sustentação)**

O conjunto final utilizado nas medidas fica sendo portanto a balança e o copo graduado que estão apresentados na figura a seguir:



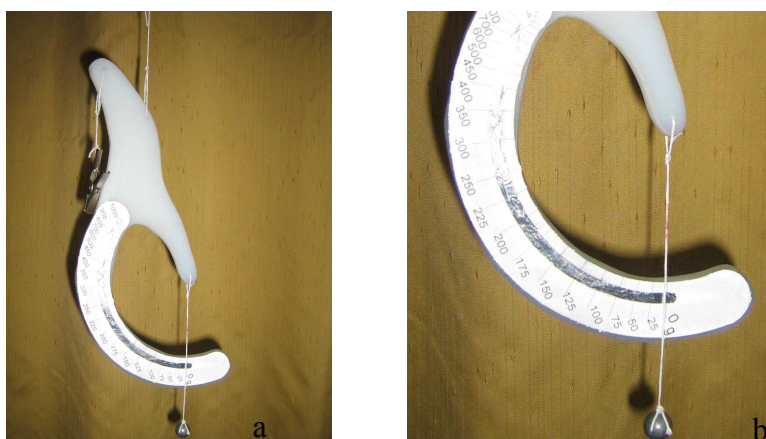
**Figura 9: Balança de correio e copo graduado**

### **Determinação das densidades da água e do óleo de soja**

Um ponto a considerar sobre as medidas a seguir é que o conjunto copo + barbante de sustentação, daqui pra frente chamado simplesmente de recipiente, possui uma massa não nula e não desprezível. Portanto, para determinar as massas dos líquidos nele colocados deveremos subtrair a massa do recipiente vazio da massa com ele preenchido. Ao todo fizemos quatro medidas:

- Medida *zero grama*: para mostrar que o ponteiro realmente marca *zero* na escala quando não há massas penduradas;
- Medida com recipiente vazio: para que a massa do recipiente possa ser descontada das medidas com ele cheio;
- Medida com 150ml de água: para determinar a massa dessa quantidade de água e por consequência sua densidade;
- Medida com 150ml de óleo: para determinar massa e densidade do óleo.

**Medida sem nada (zero grama):** Na primeira foto podemos observar que a balança está suspensa sem qualquer massa pendurada a ela (figura 10a). Uma ampliação foi feita na região da escala para que a leitura pudesse feita pelo leitor (figura 10b). Como se pode ver: 0g.



**Figura 10: Medida zero grama**

**Medida com o copo vazio:** Muito importante para as medidas seguintes, pois sem a mesma, não seria possível calcular com precisão as densidades do óleo e da água. A figura 11a mostra o artefato

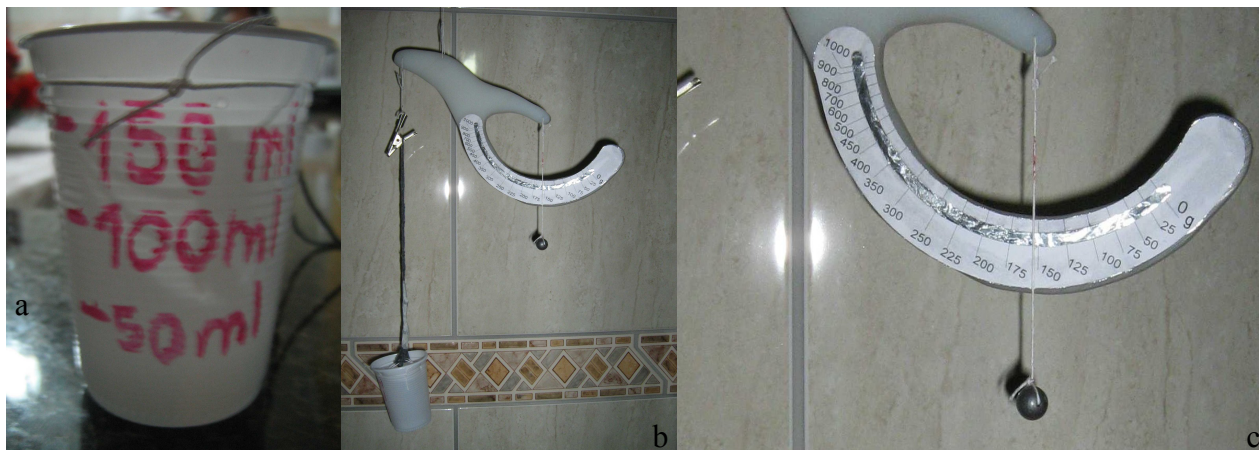
todo, inclusive com o recipiente (vazio) enquanto que a 11b é uma ampliação necessária para a leitura dos valores.



**Figura 11: Medida da massa do recipiente**

Perceba que o ponteiro não está no zero, claro devido à massa do recipiente. A leitura nos dá algo em torno de 5g. Devemos anotar este valor.

**Medida com 150ml de água:** Ao encher o recipiente com 150ml de água (figura 12a) e colocá-lo na balança, a mesma irá girar até se estabilizar na posição representada na figura 12b. Ampliando a imagem, pode-se fazer a leitura pela figura 12c.



**Figura 12: Medindo a massa de 150ml de água**

Pela leitura, podemos verificar o valor ficou em torno de 155g o que já era esperado, já que o recipiente possui aproximadamente 5g de massa. Pudemos verificar portanto a densidade da água como sendo 1g/ml ou  $1\text{g/cm}^3$ , valor exato que se espera para a água.

**Medida com 150ml de óleo:** O procedimento é semelhante ao usado com a água. Ao encher o recipiente com 150ml de óleo (figura 13a) e colocá-lo na balança, a mesma irá girar até se estabilizar na posição representada na figura 13b. Ampliando a imagem, pode-se fazer a leitura pela figura 13c.





**Figura 13: Medindo a massa de 150ml de óleo**

Nossa medida foi algo entre 140g e 145g (tornando a escala mais precisa, isto é, aumentando sua resolução, o problema estaria sanado). Vamos tomar a medida como 143g, o que pela imagem é um valor razoável. Descontando a massa do recipiente (5g) temos 138g de massa para os 150ml de óleo de soja utilizados. Portanto a densidade do óleo será de  $0,92\text{g/ml}$  ou  $0,92\text{g/cm}^3$ , menor do que a da água como já era esperado.

### **Considerações sobre medidas utilizando este tipo de balança**

A balança aqui apresentada mede massas entre 0g e 1kg. Como já foi mencionado, a precisão é maior quando a massa medida é próxima do ponto *zero* e menor caso contrário. Se as dimensões indicadas na figura 1 fossem todas multiplicadas por um mesmo fator, teríamos outra balança capaz de medir massas maiores (fator $>1$ ) ou massas menores (fator $<1$ ). Se quiséssemos ter maior precisão para massas em torno de 1kg por exemplo, usando um fator 1,5 ou 2,0 já poderíamos ter medidas muito boas nesta faixa.

Durante a medida, a balança irá se estabilizar deixando de girar na vertical devido à somatória de momentos nula. Contudo ela poderá oscilar na horizontal. Neste caso, o usuário da balança deve posicionar um dedo de modo a impedir o movimento da mesma na horizontal (impedindo o giro sem segurá-la, apenas para que ela não balance) e retirá-lo quando executar a medida.

### **Palavras-chave**

Balança de correio, centro de área, momento de uma força, torque, densidade.

### **Teoria**

#### **Funcionamento**

Vamos analisar a figura 13. Quando penduramos um objeto na balança, um torque (ou momento de uma força) é produzido levando a uma rotação do corpo da balança ao redor do fulcro. A medida que a balança gira, mais ela desloca sua massa para o outro lado aumentando portanto o torque do lado oposto. A balança continuará a girar até que ambos os torques se igualem. Passamos a ter uma nova condição de equilíbrio. Faz-se então a leitura através da coincidência do fio do ponteiro (que sempre aponta para baixo devido à gravidade) com as linhas graduadas na escala da balança.

## Detalhamento

Balança mecânicas são equipamentos que utilizam as leis da estática para aferição de massas de objetos ou pessoas. É preciso que elas não se movimentem para que sejam feitas as medições. No caso das balanças de correio, além do movimento de translação elas podem rotacionar em torno de seu eixo de rotação. Trabalham, portanto, seguindo as duas leis da básicas da estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Equação 1}$$

e

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0} \quad \text{Equação 2}$$

A equação 1 nos diz que a somatória das forças presentes no sistema deve ser nula, pois só assim ele não se movimentará. Neste caso temos os pesos da balança, do ponteiro e do objeto a ser pesado todos com direção vertical e sentido para baixo devido à gravidade. Portanto uma força de módulo igual à soma dos anteriores e sentido para cima é aplicada no fulcro, isto é, esta é a tração na corda que irá manter o conjunto suspenso. Essa corda deverá portanto suportar o peso de todo o conjunto objeto-balança-ponteiro.

A equação 2 nos mostra que para que não haja rotação na balança em torno do ponto de fulcro, a somatória dos momentos deve ser nula. Cada momento, também chamado de torque estático e às vezes simplesmente de torque, pode ser definido pela equação 3:

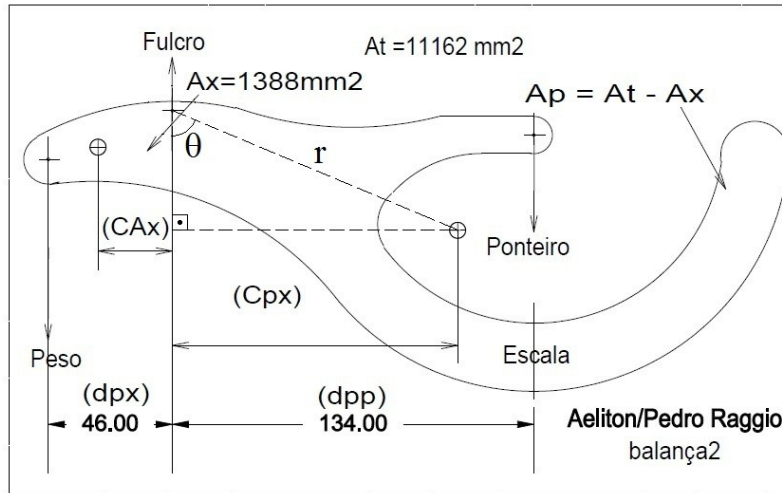
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Equação 3}$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força que está agindo (peso) e  $\mathbf{r}$  é o vetor que sai do eixo de rotação do sistema (fulcro) e vai até o ponto de aplicação da força.

Uma propriedade importante é o fato de que se temos um sólido volumétrico (no caso a balança) podendo girar ao redor de um ponto (fulcro), o momento que sua força peso faz em torno deste ponto é equivalente ao de uma massa pontual idêntica à do sólido localizada no centro de massa do mesmo. Isto é, se eu substituir um corpo volumétrico por um ponto material de mesma massa e colocá-lo no centro de massa daquele corpo substituído, o torque resultante não irá mudar.

Como nossa balança possui densidade e espessura constantes, determinar o centro de massa equivale a determinar o centro de área da mesma. Quanto ao objeto a ser pesado e ao ponteiro, os pontos de aplicação de suas forças peso são obviamente os furos aos quais estão pendurados.

Dividimos então a balança em duas áreas, uma a esquerda do fulcro denominada Ax (que produzirá momento no mesmo sentido do objeto que será pesado), e outra a direita do mesmo denominada Ap (contrapeso, que produzirá momento no sentido contrário). Em seguida, determinamos a localização do centro de área de cada uma dessas áreas da balança. Os lugares geométricos dos centros de área de Ax ( $C_{Ax}$ ) e Ap ( $C_{pX}$ ) estão representados por círculos com cruces na figura 14.



**Figura 14 : Balança dividida em duas áreas  $A_x$  e  $A_p$  e distâncias horizontais dos pontos de aplicação das forças em relação à linha que passa pelo fulcro**

Para determinar os centros de massa, temos duas opções, uma utilizando a integral sobre o volume (caso contínuo) e outra dividindo o corpo da balança em pedaços menores, determinando o centro de massa de cada pedaço e depois fazendo a média ponderada pelas massas (caso discreto):

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$

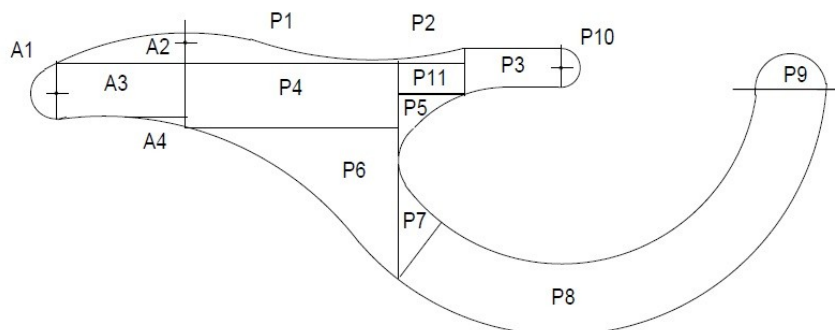
$$x_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho x dV$$

$$y_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho y dV$$

$$z_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho z dV$$

**Figura 15: Duas maneiras de determinar a localização do centro de massa – a primeira no caso discreto e a segunda no caso contínuo**

**Dificuldade:** Determinar os centros de área, contudo, não foi tarefa simples. Utilizamos o método para cálculo no caso discreto. Para tal, tivemos que dividir a balança em várias pequenas regiões (com formatos aproximados de semicírculos, aros, retângulos e triângulos) conforme a figura 16, determinar área e centro de área de cada uma dessas regiões e, por fim, encontrar as áreas  $A_x$  e  $A_p$  (através da soma das áreas dessas regiões) e seus centros de área (pela média dos centros de área das regiões ponderada pelas áreas das mesmas).



**Figura 16**

**Calculando os centros de área:** Relembrando a definição de momento da equação 3, pela definição de produto vetorial podemos transformá-la em uma equação escalar e trabalhar com os módulos das grandezas:

$$\tau = r \cdot F \cdot \text{sen}\theta \quad \text{Equação 4}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor  $r$  e a linha que se prolonga do fio do fulcro (vide figura 14).

Mas analisando mais uma vez a figura 14, vemos que  $r \cdot \text{sen}\theta$  nada mais é do que a distância horizontal do centro de massa (centro de área) do corpo escolhido (um dos lados da balança como  $A_p$  por exemplo) para a linha vertical que se prolonga através do fio que sustenta a balança a partir do fulcro. Portanto, para determinar cada momento vamos utilizar esta distância horizontal além é claro do peso de cada elemento:

$$\tau = m \cdot g \cdot d_{\text{horizontal}} \quad \text{Equação 5}$$

Vamos tomar então quatro momentos agindo na balança:

Para a área do peso  $A_x$ :  $M_{A_x} = g \cdot m_{A_x} \cdot C_{A_x} = g \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot A_x \cdot C_{A_x}$  Equação 6.1

Para o corpo a ser pesado:  $M_P = g \cdot m_{\text{peso}} \cdot d_{px}$  Equação 6.2

Para a área do contrapeso  $A_p$ :  $M_{A_p} = g \cdot m_{A_p} \cdot C_{px} = g \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot A_p \cdot C_{px}$  Equação 6.3

Para o ponteiro da balança:  $M_{Pt} = g \cdot m_{\text{ponteiro}} \cdot d_{pp}$  Equação 6.4

Levando em conta que os dois primeiros momentos contribuem para que a balança gire em um sentido e os dois últimos para que ela gire no sentido oposto, na condição de equilíbrio, que é onde executamos as medições, teremos um torque resultante (ou somatória dos momentos) nulo. Portanto:

$$M_{A_x} + M_P = M_{A_p} + M_{Pt} \quad \text{Equação 7}$$

Em caso de mudarmos o objeto a ser pesado, a balança irá girar e, como podemos observar no desenho, as distâncias  $C_{px}$  e  $d_{pp}$  variarão bem mais do que  $C_{Ax}$  e  $d_{px}$  devido à distância radial entre os primeiros e o fulcro ser maior. Como a variação angular é a mesma para todos e a distância radial é fixa, a variação das distâncias horizontais ( $r \cdot \text{sen}\theta$ )  $C_{Ax}$  e  $d_{px}$  será maior. Podemos concluir com isto que em um dos lados a influência do peso do objeto que estiver pendurado na balança é o fator predominante enquanto que no outro esse fator é o braço de aplicação da força (do contrapeso e do ponteiro).

Como a aceleração da gravidade aparece em todos os termos da equação 7 (vide equações 6.1 até 6.4), podemos eliminá-la concluindo que:

Se desprezarmos o atrito entre os fios do fulcro, do peso e do ponteiro com o corpo da balança e ignorando também o momento de inércia da mesma devido a estes fatores constituir-se fonte de erro por retardar o giro da balança do estado inicial para o novo estado de equilíbrio, o funcionamento dessa balança não dependerá do valor da aceleração da gravidade (desde que não nula) no local onde estiver sendo utilizada.

Na figura 16 temos semicírculos, aro, retângulos e triângulos. Para cada um teremos os valores de área e centro de área na direção horizontal que foram calculados e posteriormente utilizados para o cálculos dos centros de área  $C_{Ax}$  e  $C_{px}$ . Todos os cálculos encontram-se disponíveis na planilha que acompanha este documento.

Na linha 69 da planilha temos valores calculados que resultam da somatória das áreas indicadas na

figura 16, as quais foram consideradas com aproximação de polígonos e áreas circulares elementares, o que induz a um pequeno erro.

As áreas da linha 70 foram calculadas, em CAD, a partir de pontos marcados no perímetro da projeção da balança. Como são pontos espaçados, eles acompanham o contorno com alguma precisão incorporando também pequenos erros. Para uma precisão maior devemos fazer um maior número de medidas (e tirar a média) ou tender ao infinito a quantidade de áreas elementares utilizadas. Fica então esta proposta para quem desejar dar continuidade a este trabalho.

Grosseiramente, o erro máximo, para áreas e centros de área, foi de 6,32% não tendo sido considerados os pesos do papel de alumínio e do papel sulfite.

Também foi efetuado um cálculo para saber qual massa colocada para medição seria capaz de manter a balança na posição horizontal conforme as figuras 14 e 16. O valor calculado na planilha foi de 210g enquanto que, analisando a figura 6, pode-se presumir que este valor deva estar próximo de 225g. A diferença foi portanto de 6,7%, o que não chega a ser grande devido às várias aproximações feitas no decorrer dos cálculos.

## Estudo das densidades

Todo corpo ocupa um lugar no espaço. Isto significa que ele possui volume. O volume é uma medida de quanto espaço esse corpo ocupa do ambiente onde está localizado e geralmente é medido em  $m^3$  ou  $cm^3$ . É comum também o uso de medidas de capacidade como litro (l) e mililitro (ml) valendo as relações  $1m^3=1000$  litros,  $1dm^3=1$  litro e  $1cm^3=1ml$ .

Todo corpo possui massa. A massa é uma medida da inércia do corpo. Pelas leis de Newton, massas maiores são mais difíceis fazermos se deslocarem uma vez que estão paradas e são mais difíceis de pará-las uma vez em movimento. As massas são normalmente medidas em toneladas (t ou tons) quilogramas (kg) ou gramas (g) valendo as relações  $1t=1000kg$  e  $1kg=1000g$ .

As grandezas acima apresentadas, massa e volume, são chamadas propriedades gerais da matéria. Isto porque dois materiais diferentes podem ter mesma massa (1kg de plástico e 1kg de chumbo têm a mesma massa) ou o mesmo volume (um galão de 10 litros de água ocupa o mesmo volume no espaço que outro de 10 litros de óleo).

O que notamos nestes casos é que para a massa do chumbo ser igual à do plástico, é preciso um volume muito maior de plástico do que o de chumbo. Da mesma forma, 10 litros de água são mais difíceis de carregar que 10 litros de óleo, pois sua massa é maior. Esses dois fenômenos ocorrem devido a uma propriedade da matéria chamada *densidade*.

A densidade, ou massa específica, nos diz qual a quantidade de massa que um material possui por uma dada unidade de volume. Ela pode ser encontrada dividindo-se a massa do objeto pelo volume do mesmo. Cada material possui uma densidade diferente, por isso ela pode ser usada inclusive para identificar o material. Grandezas capazes de identificar materiais são denominadas propriedades específicas da matéria e a densidade é uma delas.

A densidade, no geral, é função do tipo de material e da temperatura em que se encontra. Ela é bem definida somente para meios líquidos e sólidos pois, no caso dos gases, ela dependeria do sistema devido a seu volume altamente variável.

Matematicamente a densidade pode ser definida como:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{Equação 8}$$

ou pela forma integral temos a massa como sendo uma integral da densidade no volume do material:

$$m = \int \rho \cdot dV \quad \text{Equação 9}$$

Essas definições são normalmente escritas nas formas diferencial e integral devido à variação de densidade que ocorre em alguns corpos. Considerando estruturas uniformes, sem variação de

densidade, as equações 8 e 9 se resumem a:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{Equação 10}$$

$$m = \rho \cdot V \quad \text{Equação 11}$$

Na verdade é à densidade que nos referimos quando dizemos que o óleo é mais leve que a água e, por isso, fica na superfície. O correto é dizer que o óleo é menos denso que a água.

No caso do óleo e da água, podemos utilizar as duas últimas expressões pois estamos tratando de líquidos diluídos sem grandes impurezas capazes de influenciar de maneira visível na densidade dos mesmos. Portanto, consideramos suas densidades constantes. A densidade calculada para o óleo de soja foi de  $0,92\text{g/cm}^3$ , enquanto que a da água foi de  $1,00\text{g/cm}^3$ .

A densidade da água a 300K (temperatura ambiente) possui valor próximo de  $1,00\text{g/cm}^3$  o que condiz com nosso resultado experimental. Quanto ao óleo, segundo as normas de qualidade da CIDASC (Companhia Integral de Desenvolvimento Agrícola de Santa Catarina) por exemplo, a densidade do óleo de soja a  $25^\circ\text{C}$  deve estar entre  $0,914$  e  $0,922\text{g/cm}^3$ . A densidade que calculamos está, portanto, dentro dessas normas.

Devo ressaltar que este trabalho tem o objetivo didático para alunos do segundo grau, sendo a balança um instrumento de fácil fabricação para isso. Neste caso deve-se limitar a abordagem a cálculos compatíveis com o nível do ensino médio.

O meu orientador realizou o seguinte comentário:

O aluno desenvolveu um trabalho didático com uma sequência bem ordenada que permite um fácil aprendizado por alunos de segundo grau de conceitos básicos da física.

### **Referências bibliográficas**

<http://www.unidosporchile.org/?p=308>

<http://pt.scribd.com/doc/6895471/07-Momento-de-uma-Forca-Torque>

<http://gcserevision101.wordpress.com/physics-p3/>

<http://www.realmagick.com/center-of-mass-definition/>

<http://www.cidasc.sc.gov.br/html/legislacao/legislacao%20produtos/OleoSoja.htm>

## Apêndice A – Planilha

Esta planilha foi utilizada para determinação de massa necessária a deixar a balança suspensa na posição horizontal em formato semelhante ao das figuras 1 (projeto técnico) e 16 (divisão das áreas). Os cálculos foram todos realizados baseados nestas duas figuras.

- 1 As divisões das áreas (A1, A2, ..., P1, P2, ...) aparecem conforme a figura 16 do relatório
- 2 As medidas, tais como altura, largura e raio da cada subárea, foram tomadas utilizando a figura 1
- 3
- 4 As distâncias (x1, x2, ...) são todas na horizontal, sempre em relação à linha vertical imaginária que passa pelo fulcro (eixo de referência)
- 5
- 6 largura: entende-se pelo comprimento da figura medido na horizontal
- 7 altura: entende-se pelo comprimento da figura medido na vertical
- 8
- 9 cgA1 e cgP10 são os centros de área na horizontal dos semicírculos das subáreas A1 e P10 caso suas origens estivessem no eixo de referência
- 10
- 11 **Cálculos de centros de área na direção horizontal (eixo x) sem levar em conta a distância entre as figuras e o eixo principal**
- 12 semicírculos cgA1 e cgP10 "centro de área= $(4/3\pi)*raio$ "
- 13 semicírculo P9 "centro de área=posição do foco do círculo"
- 14 Triângulos A2, A4, P1, P5, P7 "centro de área= $(1/3)*largura$ "
- 15 Triângulos P2, P6 "centro de área= $(2/3)*largura$ "
- 16 Retângulos A3, P3, P4, P11 "centro de área= $(1/2)*largura$ "
- 17 Setor de coroa circular P8 "centro de área= $[(raio1+raio2)/2]*\cos(\text{ângulo}/2)$ "
- 18
- 19 Depois bastou acrescentar as distâncias entre essas figuras e o eixo principal (conforme a figura 1 do relatório) a esses valores parciais para obtermos os centros de área (x1, x2, x3, ...)

20 Produção de momento para girar a balança no sentido anti-horário (área Ax e momento CAx)

21

22 cálculo de CAx

Elemento de área (mm2)	Dimensões (mm)		Tipo de Figura (Geometria)	Centro de área (mm)	
A1	raio		semicírculo	cgA1 (mm)	x1
	127,17	9		3,82	49,82
A2	Altura	largura	triângulo sup	x2	
	323,19	13,3			16,2
A3	Altura	largura	retângulo	x3	
	805	17,5			23
A4	Altura	largura	triângulo inf direito	x4	
	44,96	3,7			8,1
Ax		1300,32 mm2	somatória das áreas		
CAx		23,42 mm	média dos centros de área ponderada pelas áreas		

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37 Produção de momento para girar a balança no sentido horário (área Ap e momento CPx)

38

39 cálculo de CPx

Elemento de área (mm2)	Dimensões (mm)		Tipo de Figura (Geometria)	Centro de área (mm)	
P1	Altura	largura	triângulo sup	x1	
	360,25	11			21,83
P2	Altura	largura	triângulo sup	x2	
	74,25	4,5			99
P3	Altura	largura	retângulo	x3	
	475,2	13,2			116,5
P4	Altura	largura	retângulo	x4	
	1694	22			38,5
P5	Altura	largura	triângulo	x5	
	310	20			87,33
P6	Altura	largura	triângulo	x6	
	2156	56			51,33
P7	base (dist. Vertical)	altura (dist. Horizontal)	triângulo	x7	
	282,88	36,5			82,17
P8	raio1	raio2	ângulo (graus)	setor de coroa circular	x8
	4317,5	70	95	120	172,75
P9	raio			semicírculo	x9
	253,23	12,7			216
P10	raio			semicírculo	cgP10 (mm)
	68,39	6,6			2,8
P11	Altura	largura	retângulo	x11	
	182,75	8,5			87,75
Ap		10174,44 mm2	somatória das áreas		
CPx		110,35 mm	média dos centros de área ponderada pelas áreas		

Material do corpo da balança = Nylon				Área Ax		Área Ap		
Densidade (g/cm3)	espessura (mm)	Área total (mm2)	Área (mm2)	Massa Ax (g)	Área (mm2)	Massa Ap (g)		
1,15	6,5	11474,75	1300,32	9,69	10174,44	75,79		Medidas calculadas com os dados acima
1,15	6,5	11162	1388	10,34	9774	72,81		Medidas das áreas feitas no software CAD
	Diferença percentual		-2,8	6,32	6,32	-4,1	-4,1	

Massa (g)	Posição horizontal do Centro de Massa (cm)	Momento (g*cm)
Massa para zerar momentos	210,22	-4,6
Ponteiro	13,4	179,56
Jacaré	5,7	-26,22
Massa Ax	9,69	-22,68
Massa Ap	75,79	836,34

A tabela ao lado refere-se às áreas com os dados calculados acima. Foi usada para determinar qual a massa necessária para manter a balança suspensa na horizontal conforme as figuras 1 e 16.

Momento total (g\*cm) 0

**Figura A1:** Planilha de cálculos relacionados à balança

Pela planilha, podemos observar que uma massa de 210g seria necessária para zerar os momentos da balança mantendo-a em equilíbrio na posição horizontal (figuras 1 e 16).

## Apêndice B – Resumo das Referências Bibliográficas

1) <http://www.unidosporchile.org/?p=308>

[Postal scale – efficiency through technology](#)

[Technology Articles](#) [Add comments](#)

Jun 28 2011

We are always looking for ways to make our operations more economical so that we can enjoy a competitive edge in our business. Usually that means making the operations more efficient which in turn can mean making things happen faster. But then the alarm bells start ringing because just making things faster brings in other risks that could cost us more than the amount of savings we can get from the faster speed of getting things done. Therefore for this reason making operations more and more efficient is not easy and we need to find smart ways that improve the speed of getting things done but do not put the quality of the output at risk. And one way to be smart is to leverage the benefit of technology.

And as an example let us take the task of calculating the right postage to be paid on packages that are being sent by post. We may feel that any scale will do because once we know the weight with simple arithmetic and a little care we can come to know the right postage to be paid. But when the operation is to be done many times during the day the arithmetic may still be simple but errors can creep in and the little care that is required to read the postage charts becomes something that is a constant area of concern where mistakes can and will be made.

On the other hand a postal scale which is much like any other digital scale except that it directly gives the postage amount makes the operations faster and more risk free as well. And that is smart use of technology. And this technological benefit only costs a small amount of money since digital postal scales are quite affordable. With the great savings and convenience that a postal scale offers at such a reasonable cost it is a very attractive value proposition even if you have only a small number of packages to send routinely. Postal scales are available in a wide range and you can quickly and easily select the one that best meets your needs by going online. You can see the latest postal scales at [www.ScaleGuide.com](http://www.ScaleGuide.com).

### About Author

Dylan has over 14 years experience in the weight measurement industry. He has been witness to several innovations that have found wide acceptance. He takes a special delight in the way specialized scales make everyday life easier for us. You can learn more about [postal scales](#) and other scales at [www.ScaleGuide.com](http://www.ScaleGuide.com).

Posted by [Lionjkt](#) at 8:52 am Tagged with: [efficiency](#), [Postal](#), [scale](#), [technology](#), [through](#)

2) <http://pt.scribd.com/doc/6895471/07-Momento-de-uma-Forca-Torque>

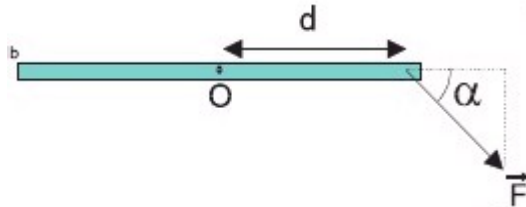
### U m m o m e n t o , p o r f a v o r

Outro domingo! Novo passeio de carro. Dessa vez foi o pneu que furou. O pai se esforça, tentando, sem sucesso, girar o parafuso da roda. Um dos filhos então diz: “Um momento, por favor!” Vai até o porta-malas, pega um cano longo, coloca-o na extremidade da chave, e fala para o pai: “Tente agora!” E o pai, surpreso, consegue retirar os parafusos, fazendo até menos esforço do que anteriormente. Como pode ter acontecido isso? Bem, em Física, existe uma grandeza que está associada à capacidade de uma força girar um objeto. Essa grandeza é chamada de momento da força ou, ainda, torque. Mas, o que vem a ser momento (ou torque) de uma força? De que grandezas ele depende? No dia-a-dia, temos inúmeros exemplos nos quais essa noção está envolvida: alavancas, ferramentas, máquinas, automóveis. Veja a Figura 3. Quando tentamos girar a



porca com uma chave, utilizando uma força de mesmo valor, será mais fácil conseguirmos se a força estiver aplicada no ponto A do que se estiver aplicada no ponto B. A porca vai girar em torno de seu centro. Quanto maior for a distância desse ponto ao ponto onde a força é aplicada, maior vai ser a facilidade de girarmos a porca com a chave.

Vamos, finalmente, considerar uma última grandeza que está associada ao momento de uma força.



Quem pode produzir uma rotação na barra é a força perpendicular à barra. A outra componente, apenas puxa a barra. Assim, a força que tem o maior momento é aquela que atua perpendicular à barra. Chegamos, por fim à uma definição final do valor do torque ou momento de uma força:

$$M = F \cdot d \cdot \text{sen} \alpha$$

Veja que, quando o ângulo  $\alpha$  é  $90^\circ$ , o valor do momento é máximo pois  $\text{sen} \alpha = 1$ . Nessa situação, a força e a barra são perpendiculares.

### 3) <http://gcserevision101.wordpress.com/physics-p3/>

#### P3-1 : Moments

##### Turning Effects

Trying to unscrew a nut requires a spanner. It is common knowledge that a longer spanner makes it easier – this is because *less force* is required to pull the nut out. Unscrewing a nut is an example of a **turning effect**. The turning effect of the force is called the **moment**, which can be increased by:

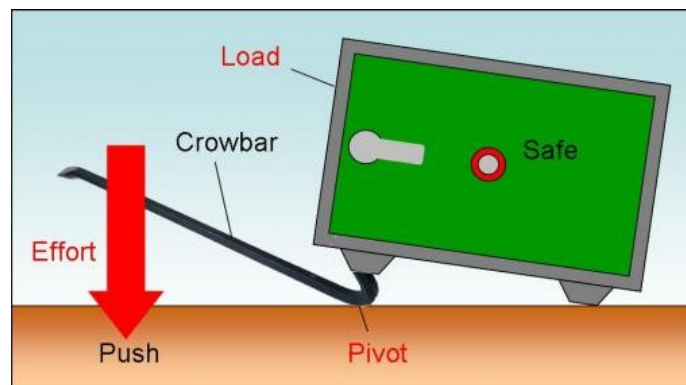
- increasing the size of the force
- using a longer instrument

You can work out the moment using this equation:

moment (newton metres, Nm)	=	force (newtons, N)	x	perpendicular distance from pivot (metres, m)
-------------------------------	---	-----------------------	---	---

##### Levers

The diagram below shows a crowbar being used to lift a safe.

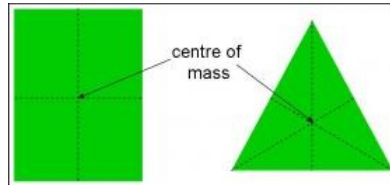


Imagine that someone is pushing down on that crowbar, and that is what causes the push. The push

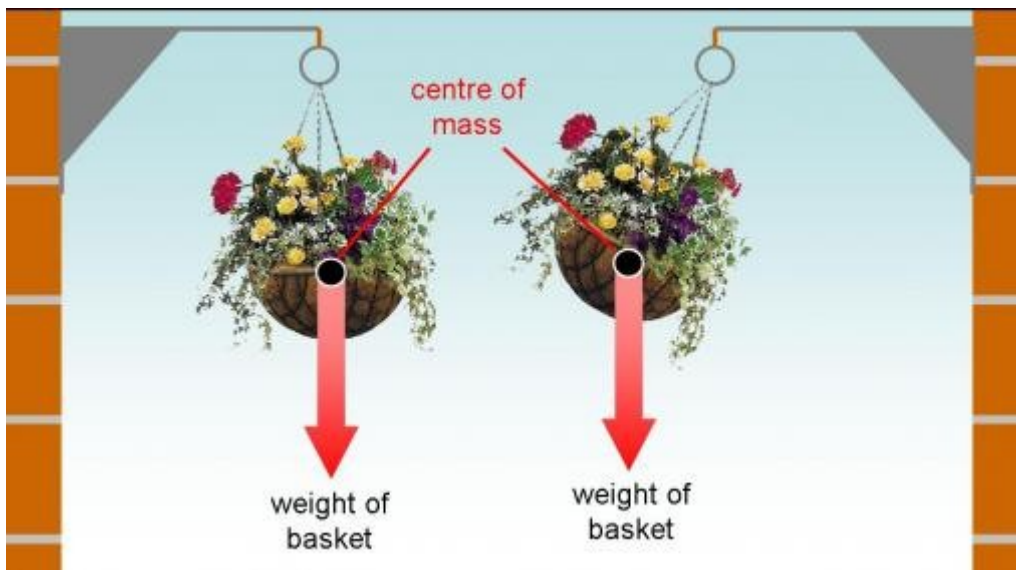
is the force applied by a person, which we call **effort**, when trying to lift objects – the **load** - around a **pivot** (the point at which the crowbar turns).

### Centre of Mass

We say that there is a point of an object where we can think of it as though the weight acts at that single point. We call this the **centre of mass** or **centre of gravity**. The centre of mass is the point of an object where its mass may be concentrated.



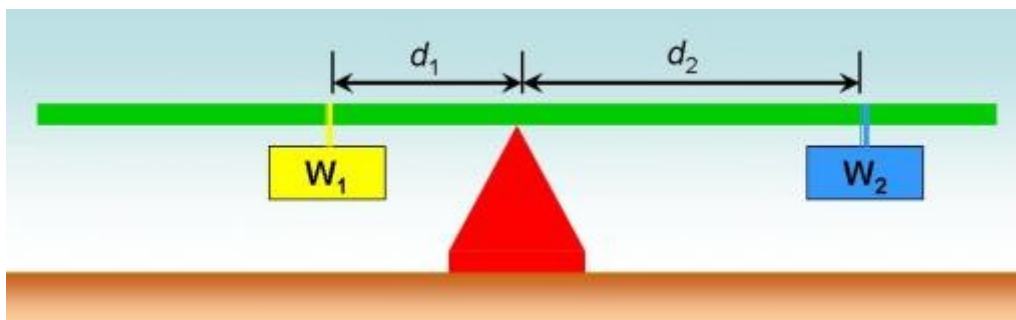
For a symmetrical object, the centre of mass lies along the axis of symmetry. When an object has several axes of symmetry, it is where the lines meet.



A hanging object rests with its centre of mass directly below the point of suspension. This means that the object is said to be in **equilibrium**. Because the centre of mass is directly below the point of suspension, no turning effect is exerted by the weight, as shown with the left hanging flower basket. When an object is moved from its original position and released, it will swing back into its equilibrium position. This is because the weight of the object causes a turning effect on the object to move it back to that position, as shown with the right hanging flower basket. The point at which it is not in equilibrium is called **non-equilibrium**.

### Balanced Moments

A moment in balance does not necessarily have to be with the pivot around the centre of the object. However, when balancing moments around an object we say they do. Look at the diagram below, showing a balanced moment:



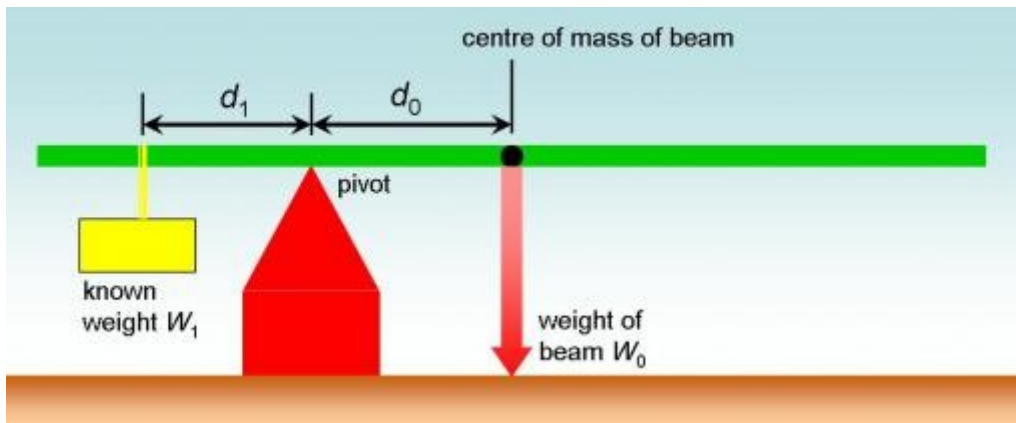
Just by looking at the diagram you can tell the moment is in balance. You can also clearly see that

the distances are different – which means that to be in balance, the weights must also be different. Because it is in balance, we know that:  $W_1 \times D_1 = W_2 \times D_2$ .

This seesaw action is an example of the **Principle of Moments**. This states that for an object in equilibrium:

sum of all clockwise moments about a point = sum of all anticlockwise moments about a point

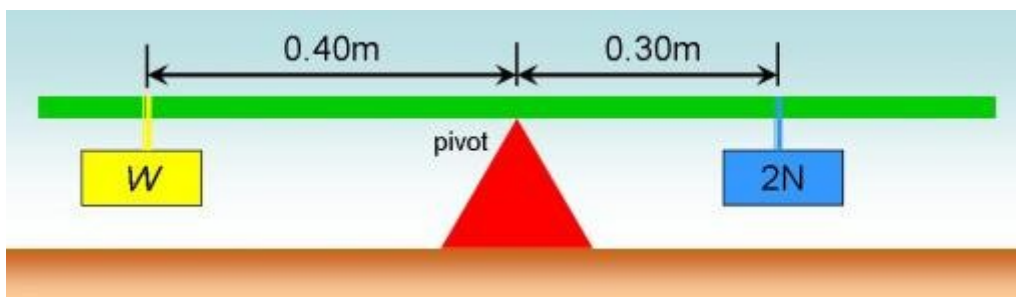
We can use  $(W_1)(D_1) = (W_2)(D_2)$  to do calculations involving moments. For example, if we are given the following diagram, where the pivot is not at the centre of mass:



We can calculate  $W_0$  if we know  $W_1$  and  $d_1$  and  $d_0$ . Take  $W_1$  as 4.0N,  $d_1$  as 0.20m and  $d_0$  as 0.25m. Rearranging the equation of  $(W_1)(d_1) = (W_0)(d_0)$ , we get:

$$W_0 = (W_1)(d_1) \div d_0 = (4.0\text{N} \times 0.2\text{m}) \div 0.25\text{m} = 3.2\text{N}$$

Of course we can perform the same calculations when the centre of mass holds the pivot. Try to calculate the unknown value in the following diagram:

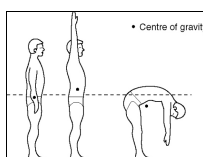


4) <http://www.realmagick.com/center-of-mass-definition/>

\* esta referência foi usada basicamente para aquisição de figuras.

### Center Of Mass Definition

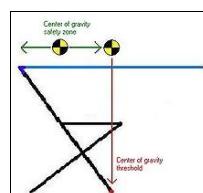
A selection of articles related to center of mass definition.



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$



$$x_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho x \, dV$$

$$y_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho y \, dV$$

$$z_c = \frac{1}{M} \int_{(V)} \rho z \, dV$$

Original articles from our library related to the Center Of Mass Definition. See Table of Contents

5) <http://www.cidasc.sc.gov.br/html/legislacao/legislacao%20produtos/OleoSoja.htm>

**NORMA DE IDENTIDADE, QUALIDADE, EMBALAGEM, MARCAÇÃO E APRESENTAÇÃO DO ÓLEO DE SOJA**

**1 OBJETIVO**

A presente norma tem por objetivo definir as características de Identidade, Qualidade, Embalagem, Marcação e Apresentação do óleo de soja que se destina à comercialização interna.

**2 DEFINIÇÃO DO PRODUTO**

Entende-se por **óleo de soja**, o produto obtido por prensagem mecânica e/ou extração por solvente, dos grãos de soja (*Glucine max. L Merrill*), isento de misturas de outros óleos, gorduras ou outras matérias estranhas ao produto, e que tenha as seguintes características de identidade e composição em ácidos graxos.

**2.1 Características de Identidade**

**2.1.1 Densidade relativa à 25 C: 0,914 a 0,922**

**2.1.2 Índice de refração Raia D a 25 C: 1.4700 a 1.4760**

**2.1.3 Índice de iodo (Wijs): 120 a 143**

**2.1.4 Índice de saponificação 189 a 198**