



Relatório Final

Demonstrando as Formas de Ondas Sonoras Estacionárias em Placas
a Partir da Configuração de Grãos de Areia

Relatório Final de F609

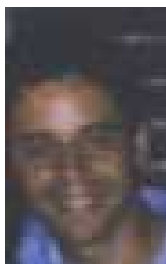
TÓPICOS DE ENSINO DE FÍSICA I

**Experimento
Com Ondas**

*Demonstração das Formas de Ondas Sonoras
Estacionárias em Placas a Partir da Configuração de
Grãos de Sal.*

- ***Figuras de Chladni***
-

Aluno :Ebenezer Fernandes Oliveira



ebenezer.brasil@gmail.com



Orientador: Eng. Pedro Raggio

praggio.arroba.ifi.unicamp.br



Ernst Chladni (1756 –1827)

- **Objetivo:**

Demonstrar visualizando as diversas configurações que as ondas sonoras estacionárias podem tomar ao vibrar uma placa (de vidro ou de aço) de uma determinada forma geométrica através da distribuição de grãos de um pó fino como areia, canela, café, sal ou um outro adequado.

- **Introdução:**

Quando o alemão *Ernest Florens Friedrich Chladni* polvilhou areia em superfícies lisas e planas e as fez vibrar com arco de violino atritado em suas bordas verificou a conformação de belas figuras que passaram a ser conhecidas pelo seu nome. Seu famoso experimento data de 1787 e tornou-se tão famoso que impressionou até mesmo *Napoleão Bonaparte* que chegou a criar um prêmio de 3000 francos para o primeiro a expor uma teoria correta para explicar os padrões destas figuras. O prêmio foi atribuído a *Sophie Germain*, em 1815 e depois sua solução foi melhorada por *Gustav Kirchhoff*, em 1850, adicionando-lhe as condições de fronteiras. Desde então este experimento acústico tem exercido grande influência sobre construtores de aparelhos musicais como violão e violino bem como servido como grande estímulo para estudantes de Física ou simples curiosos.

O presente *experimento* descrito neste relatório é uma sequência daquele já realizado pelo aluno *Júlio César da Silva* na disciplina de F809 tempos atrás. Foram realizados alguns acréscimos nos cálculos relativos a configuração ondulatória sobre as placas vibrantes para deixar mais claro o desenvolvimento e entendimento da teoria envolvida., concentrado nas

formas geométricas: quadrada e circular, necessárias para a demonstração das figuras de Chladni.

O intuito desta reedição do experimento é, entre outros, atender ao fato de que tal experiência, embora muito bem sucedida, acabou por não deixar nenhuma réplica para demonstrações aos estudantes da disciplina e por acharmos pertinente sua construção e reapresentação. Temos a anuência do professor coordenador da disciplina no tocante a reedição do mesmo para suprir esta falta no repertório de experimentos desta disciplina.

As peças utilizadas para a realização desse experimento, incluindo placas de aço inox e pés de ferro foram construídas dentro do próprio instituto, pela oficina mecânica, sob os cuidados do funcionário *Sergio*.

Desejamos refazer este maravilhoso experimento didático com o fim de exibir as chamadas figuras de Chladni que se tornaram clássicas no estudo da acústica e passaram a referenciar na construção e aperfeiçoamento de aparelhos musicais. Nas clássicas experiências feitas por Chladni cerca de duzentos anos atrás utilizou-se de um arco de violino para fazer as placas vibrarem.

A matemática subjacente a estas figuras é, contudo, bastante complexa envolvendo, entre outras técnicas, as equações diferenciais quadrada e circular de forma breve – sendo estas já conhecidas pela literatura especializada em assuntos de acústica como a obra de *Lorde Rayleigh*. Este demonstrou que há que se considerar nodos circulares e diametrais para a determinação das frequências das ondas estacionárias sobre a placa. No entanto, não exploraremos todo o aprofundamento teórico relativo ao presente experimento uma vez que tal já foi realizado com satisfatório sucesso pelo aluno *Julio Cesar*, na primeira edição deste experimento, deixando pouco a acrescentar para esta nova edição – assim para maiores aprofundamentos teóricos recomendamos a leitura da referência (2) ao final da bibliografia.

Para não deixar a leitura do presente material insalubre para o leitor leigo e manter o texto didático para o público alvo – alunos e professores do Ensino Médio e estudantes universitários – reservamos toda a teoria deste experimento em um *Apêndice Teórico* no final. Acreditamos que, apesar de algumas dificuldades técnicas de construção um professor de escola de Ensino Médio poderia executar tais experimentos e demonstrar um belo exemplo de acústica para seus alunos em sala de aula.

O encanto e a força didática deste experimento falam por si e, certamente, quando exposto ao público seja entre alunos e professores do Ensino Médio quanto a estudantes de nível superior ou simples curiosos já é amplamente conhecido. Seu estímulo visual e sonoro pode interessar futuros

pesquisadores no campo da acústica e fazer avançar este ramo da Física quase sempre negligenciados nas escolas e até mesmo nas faculdades.

Além disso, como já foi mencionado aqui, esta reedição desse experimento poderá permitir que o mesmo participe da coleção disponível no laboratório de ensino desta disciplina para futuras demonstrações desse gênero aos futuros estudantes do curso superior de Física com o ensejo de que ele estimule o ensino de ondulatória e acústica nas escolas.

- **Importância Didática :**

Acreditamos que sua principal importância didática é

mesmo a beleza e o charme das complexas configurações obtidas na placa vibrante a partir de simples acúmulos de grãos de areia como forma de estímulo ao estudo e aprofundamento de assuntos acústicos. Tecnicamente falando há, ainda, aplicações nobres de tais estudos na construção e aperfeiçoamento de aparelhos musicais conforme já foi mencionado aqui anteriormente.

Ressaltamos que os ramos da Acústica e da Ondulatória são quase sempre negligenciados nas escolas em nível de Ensino Médio e um experimento como este pode ser excelente motivação para que se passe a estudá-la entre os jovens e profissionais especializados das áreas da música, da física e engenharias.

- **Descrição do Experimento:**

O experimento consiste em construir uma placa de aço

(em geral é feito em vidro mas por questões práticas pode ser realizada em aço inox) de uma forma geométrica peculiar (geralmente circular ou quadrada) para exibir, a partir da configuração de grãos de pó depositado sobre sua superfície, a configuração de ondas sonoras estacionárias na mesma no momento em que esta é posta em vibração.

A placa deve ter dimensões apropriadas: normalmente 30 cm de diâmetro para a placa circular e 25 cm de aresta na placa quadrada; bem como espessura de 1,5 mm. Uma haste, por volta de 30 cm de comprimento deve ser fixada no centro destas placas numa de suas extremidades enquanto a outra repousa numa base colocada sobre o piso. Sal

de cozinha seco é polvilhada sobre a placa na superfície e um arco de violino geralmente é passado por um ponto de uma das laterais desta placa forçando-a a entrar em vibração com certa frequência.

Uma vez que as condições do ar em volta pode influenciar o experimento, em alguns aparatos, pode-se colocar obstáculos ao vento contornando a placa para melhorar os padrões ondulatórios formados pelos grãos de pó na superfície da placa.

Segue uma sequência de fotos da preparação das chapas de inox.

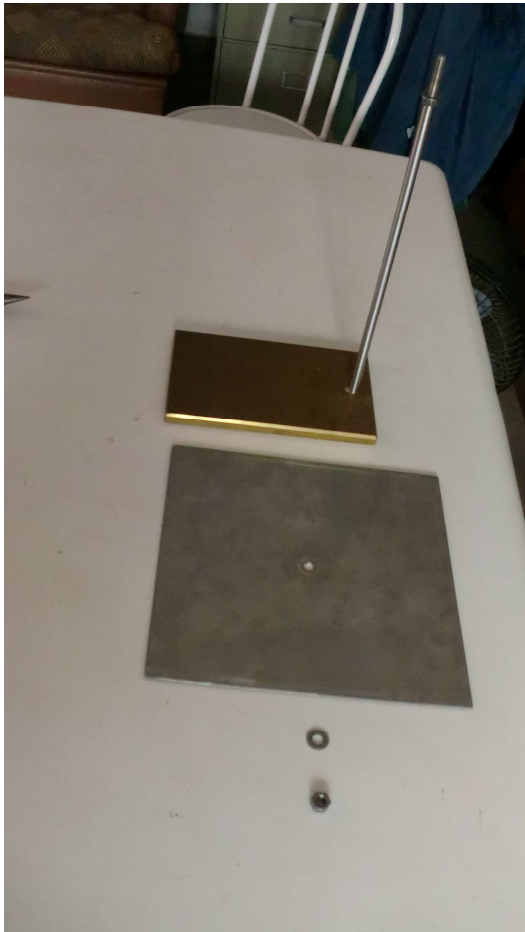


Fig.1 – Placa Quadrada



Fig.2 Placa no Suporte



Fig 3 Montagem



Fig 4 Placa Circular Montada

- **Materiais Necessários:**
- Placas de Aço inox de formato circular com 30 cm de diâmetro e outra quadrada com 25 cm de aresta – ambas homogênea, superfície retilínea e de cerca de 1,5 mm de espessura.
- Haste cilíndrica de 30 cm de comprimento e 5 mm de diâmetro para encaixar-se no centro de cada uma das placas e numa base de madeira para a sustentação do aparato no piso.
- Arco de violino, preferencialmente, feito de crina de cavalo.
- Pós, finos e secos, de vários tipos: sal, areia, café, canela, etc
- Breu

- **Resultados Obtidos:**

Conseguimos reproduzir satisfatoriamente uma boa parte das figuras obtidas por Chladni pelos padrões previstos na teoria ondulatória para as placas quadrada e circular. Busca-se entender de forma conceitual e geométrica as configurações destas ondas explicitando seus padrões de simetria.

Passamos agora a exibir uma série de fotos que demonstram alguns destes referidos resultados.

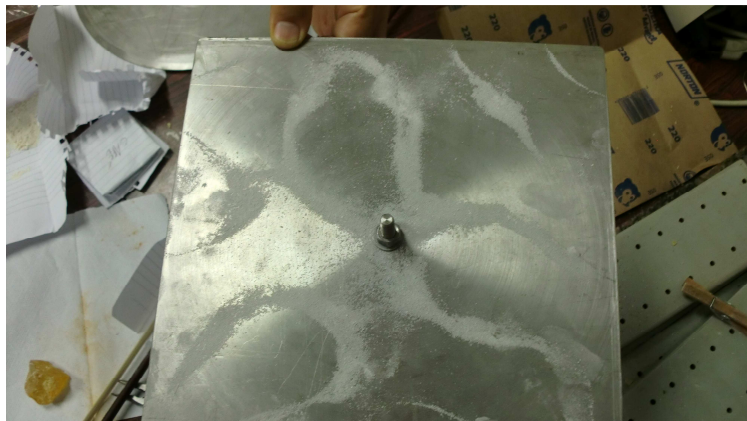


Fig 5 Padrão em Placa Quadrada (a)



Fig 6 Padrão em Placa Quadrada (b)



Fig 7 Padrão em Placa Quadrada (c)



Fig 8 Padrão em Placa Quadrada (d)



Fig 9 Teste Realizado no LEI - IFGW



Fig 10 Testes Realizados em Casa (I)

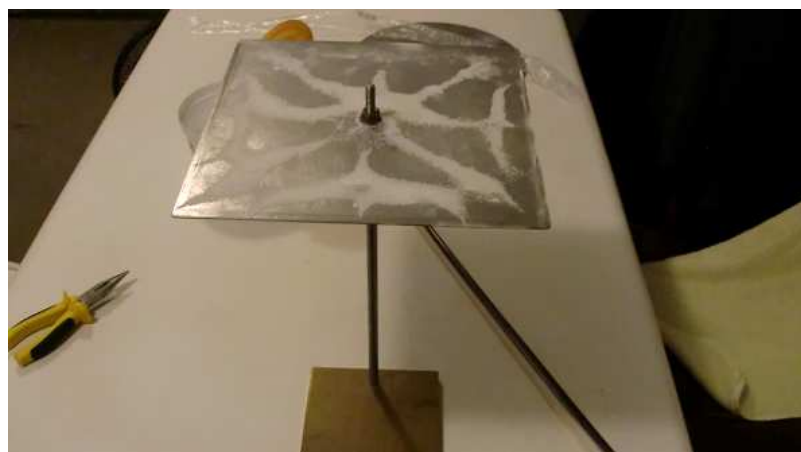


Fig 11 Padrão em Placa Quadrada (II)



Fig 12 Testes com Placa Circular



Fig 13 Padrão em Placa Circular (a)



Fig 14 Padrão em Placa Quadrada (b)



Fig 15 Padrão em Placa Circular (c)

- **Originalidade do Projeto:**

O presente experimento já foi realizado diversas vezes em várias partes do mundo e é amplamente conhecido na literatura científica. Também já foi realizado no IFGW/UNICAMP pela disciplina F 809 conforme referência (2). No entanto não ficou disponível para o laboratório de ensino, segundo fomos informados. Acreditamos ser pertinente sua reprodução para que o mesmo cumpra suas finalidades e ofereça uma réplica para o curso.

Nesta reedição exploramos alguns novos padrões entre aqueles já explorados pela sua primeira edição, além de utilizar como pó o sal de cozinha ao invés da areia, bem como outros que se mostraram adequados.

- **Dificuldades Encontradas:**

Obtenção de figuras de Chladni nítidas nas superfícies das placas. É necessário certa habilidade musical com o arco para conseguir produzir um som que soe uma nota com uma frequência constante necessária para a boa formação dos padrões desejados. Refinamentos no manejo do arco, na velocidade e no ângulo de inclinação nas bordas das placas revelaram-se fundamentais para

obtenção de frequências graves ou agudas necessárias para a variabilidade e boa formação das figuras. Além disso um certo cuidado é necessário, o tempo todo, untando com breu e não forçando demais o arco para não cortar as fibras da crina de cavalo da qual é feito. Para diminuir este risco foi solicitado ao técnico da oficina mecânica o esmerilhamento e arredondamento das bordas laterais de ambas as placas.

]

- **Comentário do Orientador:**

Meu orientador concorda com o expressado neste relatório final e deu a seguinte opinião:

“O aluno conseguiu construir um dispositivo que demonstra concretamente o efeito das vibrações em uma superfície. Acredito que tal experimento seja altamente motivador para estudantes da área de Física em nível superior ou de Ensino Médio.

Solicito que seja visto a possibilidade de este aluno fazer sua apresentação na quinta-feira, 10 de novembro das 17 às 19hs. “

Referências Bibliográficas:

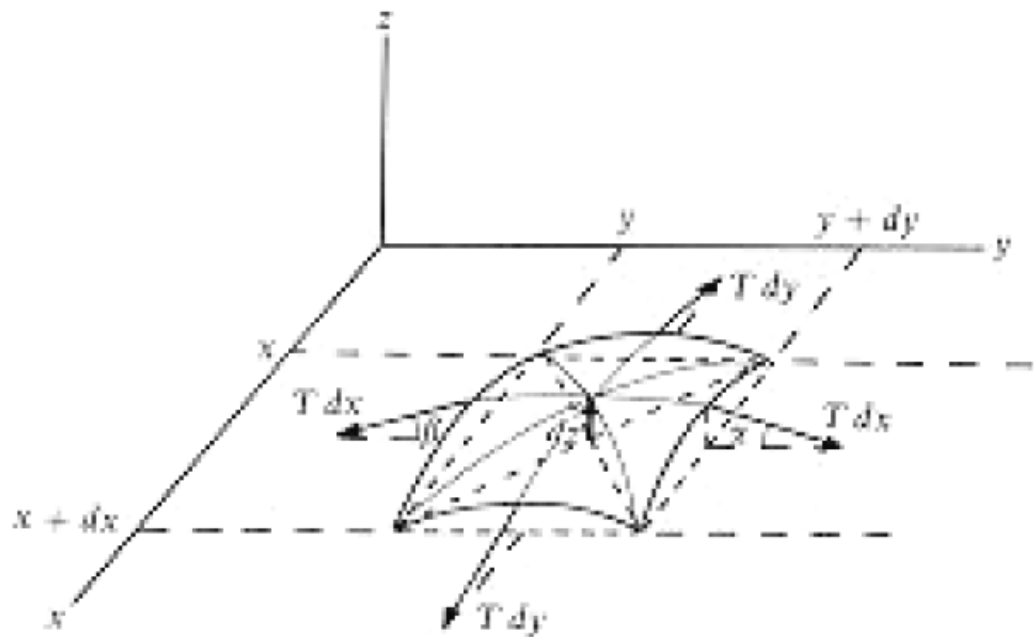
1. Lord Rayleigh (J.W. Strutt) The Theory of Sound, vol. 1- Dover (1945).
2. Júlio César da Silva, “Estudos das Vibrações em Placas: Figuras de Chladni” – relatório final de F809 orientado pela professora Iris Torriani no IFGW/Unicamp.
3. H. Moysés Nussezveig, *Curso de Física Básica, vol 2 Fluidos, Oscilações, Ondas e Calor*, 3 ed.

APENDICE : TEORIA ONDULATÓRIA DAS FIGURAS DE CHLADNI

PLACAS QUADRADA E CIRCULAR

- **Placa Quadrada:**

Consideremos a figura abaixo que mostra um elemento de figura retangular.



fonte: Referência (2)

Tratemos do caso simples de um sistema formado por uma membrana bidimensional de dimensões L_x e L_y e de extremidades fixas apresentando tensão superficial T distribuída homogeneamente em toda sua extensão. O elemento geométrico desta placa, representado acima, apresentando densidade superficial σ , tendo sido deslocado uma distancia infinitesimal dz , da posição de equilíbrio, aparecerá sobre o mesmo uma força T , restauradora, cujas componentes verticais sobre dx é dada por:

$$F_y = -Tdx \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right] = -Tdx \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dy \quad (1)$$

e, analogamente, pode ser encontrado para a componente vertical sobre dy:

$$F_x = -Tdy \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right] = -Tdy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) dx \quad (2)$$

A soma destas duas forças, $F = F_x + F_y$, sobre o elemento $dx dy$ da placa fornece a equação do movimento dada por:

$$Tdx dy \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] = \sigma dx dy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \quad (3)$$

que tomando-se agora uma velocidade $c = \left(\frac{T}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$ então (3) pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{T}{\sigma} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] = c^2 \nabla^2 z \quad (4)$$

Esta equação (4) é uma equação de onda conhecida em três dimensões e pode ser resolvida tomando-se:

$$Z(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot U(t) \quad (5)$$

que por sua vez fornece derivadas de segunda ordem dadas por:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{d^2 U}{dt^2} \right) \cdot XY ; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{d^2 X}{dx^2} \right) \cdot YU ; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{d^2 Y}{dy^2} \right) \cdot XU \quad (6)$$

As expressões dadas em (6), após substituídas em (4) e depois de um pouco de álgebra é possível transformá-la na forma:

$$\frac{1}{U} \left(\frac{d^2 U}{dt^2} \right) = \left[\frac{c^2}{X} \left(\frac{d^2 X}{dx^2} \right) + \frac{c^2}{Y} \left(\frac{d^2 Y}{dy^2} \right) \right] \quad (4b)$$

E, neste ponto, considerando-se que cada lado de (4b) é igual a uma certa constante $-\omega^2$ chega-se a uma equação diferencial em T na forma:

$$\left(\frac{d^2 U}{dt^2}\right) + \omega^2 \cdot U = 0 \quad (7)$$

que apresenta soluções dadas por :

$$U(t) = P \sin \omega t + Q \cos \omega t \quad (8a)$$

Enquanto que, o segundo membro de (4b), após igualado a constante $-\omega^2$ fornece :

$$\left(\frac{1}{X}\right)\left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = -\left(\frac{1}{Y}\right)\left(\frac{d^2 Y}{dy^2}\right) \quad (8b)$$

que, por sua vez, se considerarmos que cada lado de (8b) é igual a uma outra constante k^2 esta fornece uma equação diferencial em X:

$$\left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] \cdot X = 0 \quad (9)$$

cujas soluções é dada por:

$$X(x) = A \sin\left[\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right] + B \cos\left[\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right] \quad (9a)$$

E ainda, o segundo membro de (8b), após igualado a constante k^2 , fornece uma outra equação diferencial, desta vez em Y, dada por:

$$\left(\frac{d^2 Y}{dy^2}\right) + k^2 Y = 0 \quad (9b)$$

cujas soluções é dada por:

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky \quad (10)$$

Introduzindo-se agora as devidas condições de contorno nas equações (9a) e (10) podemos encontrar os coeficientes A, B, C e D ali presentes. As condições de contorno são para uma placa retangular fixa nos quatro lados são:

$$x = 0; \quad y = 0$$

(supondo que dois lados da placa se encontra sobre os eixos)

e

$$x = L_x ; \quad y = L_y$$

(supondo que outros dois lados da placa se encontra em retas paralelas aos eixos nos valores das suas dimensões L_x e L_y).

Se admitirmos que cada lado da placa retangular está fixo temos que $z = 0$ sobre eles – o que implica que sobre tais lados: $X = 0$ e $Y = 0$. Usando estes dois valores, juntamente com $x = 0$, em (9a) encontraremos que $B = 0$. Tomando agora os valores $X = 0$ e $Y = 0$, juntamente com o valor $y = 0$, e aplicando-os em (10) encontraremos que $D = 0$.

Tomando-se agora que $B = 0$ e a condição de contorno $x = L_x$ e aplicando-a em (9a) chega-se na expressão:

$$A \operatorname{sen}\left[\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_x\right] = 0 \quad (11)$$

cuja solução é encontrada assumindo que o argumento é proporcional a π :

$$\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L_x = i \cdot \pi \quad \rightarrow \quad \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{i\pi}{L_x} \quad (12)$$

Voltando agora em (9a) e inserindo-lhe o valor $B = 0$ e o argumento na forma dada por (12) podemos expressá-la para, uma posição x qualquer sobre a placa, na forma:

$$X(x) = A \operatorname{sen}\left[\left(\frac{i\pi}{L_x}\right) \cdot x\right] \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Usando agora o valor $D = 0$ encontrado antes juntamente com a condição de contorno $y = L_y$ (o valor para o outro extremo da placa) e aplicando-os em (10) obtém-se a relação

$$C \operatorname{sen}(k \cdot L_y) = 0 \quad (14)$$

cuja solução é obtida considerando-se que seu argumento é proporcional a π :

$$k \cdot L_y = j\pi \quad \rightarrow \quad k = \frac{j\pi}{L_y} \quad \text{com } j = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Voltando agora em (10) e inserindo-lhe o valor $D = 0$ e o argumento na forma dada por (15) podemos expressá-la para, uma posição y qualquer sobre a placa, na forma:

$$Y(y) = C \sin\left[\left(\frac{j\pi}{L_y}\right) \cdot y\right] \quad \text{com } j = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Se retomarmos agora relação (5), $Z(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot U(t)$,

e nela introduzirmos as soluções para X , Y e U obtidas, respectivamente, pelas relações (8a), (9a) e (10) encontramos uma solução para Z dada por:

$$Z_{i,j} = (P \sin \omega t + Q \cos \omega t) \cdot A \sin \left[\left(\frac{i\pi}{L_x} \right) \cdot x \right] \cdot C \sin \left[\left(\frac{j\pi}{L_y} \right) \cdot y \right] \quad (17)$$

que após certas manipulações algébricas dos seus termos, tomando-se os coeficientes $PAC = R$ e $QAC = S$, pode ser escrita na forma:

$$Z_{i,j} = (R \sin \omega t + S \cos \omega t) \cdot \left[\sin \left(\left(\frac{i\pi}{L_x} \right) \cdot x \right) \right] \cdot \left[C \sin \left(\left(\frac{j\pi}{L_y} \right) \cdot y \right) \right] \quad (18)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots$ e $j = 1, 2, 3, \dots$

Voltando agora para a equação (12) onde nela isolando-se ω e substituindo-lhe o valor para k dado por (15) bem como retornando o valor $c = \left(\frac{T}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$, chegamos, após algumas manipulações algébricas, na relação:

$$\omega = \left(\frac{T}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19a)$$

onde agora, substituindo-se em (19) que $\omega = 2\pi f$, podemos obter as frequências modais do problema através da relação:

$$f_{i,j} = \left(\frac{T}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20a)$$

para $i, j = 1, 2, 3, \dots$

As relações (19a) e (20a) fornecem as respectivas velocidades angulares e frequências modais do problema da vibração da placa retangular tratada aqui.

Finalmente, no caso de uma placa *quadrada*, basta

impor a condição que $L_x = L_y = L$ nas expressões dadas por (19a) e (20a) para obtermos a completa solução de nosso problema:

$$\omega = \left(\frac{T}{\sigma L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi \cdot [(i)^2 + (j)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (19b)$$

$$f_{i,j} = \left(\frac{T}{4\sigma L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [(i)^2 + (j)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (20b)$$

onde $i, j = 1, 2, 3, \dots$

Pode-se fazer, neste ponto, interessantes análises para os casos de degenerescência que aparecem numa placa quadrada vibrante. Além da análise das múltiplas configurações geométricas fornecidas para a configuração das ondas formadas sobre a superfície da placa para os montículos de areia dadas pelas equações (19a) e (20a) para o caso da placa retangular e, pelas equações (19b) e (20b), para o caso da placa quadrada.

- **Placa Circular:**

Para tratar o caso da placa circular iniciamos de forma bem parecida ao feito no caso anterior. No entanto, aqui devemos tratar a equação da superfície da placa Z como expressa em coordenadas polares para explorar a simetria do problema. Assim escrevemos:

$$Z(x, y, t) = Z(r, \theta, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot U(t) \quad (21)$$

Sendo:

$$x(r, \theta) = r \cdot \cos \theta ; \quad y(r, \theta) = r \cdot \sin \theta ; \quad (22)$$

Se considerarmos novamente a equação (4) escrita sob a forma:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 Z \quad (4b)$$

Onde se aplicarmos em (4b) a fórmula do laplaciano para o caso em coordenadas polares:

$$\nabla^2 Z = \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \quad (23)$$

pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right] \quad (24)$$

Esta equação diferencial em derivadas parciais, de forma análoga, ao caso da equação (4) da placa retangular também pode ser resolvida se considerarmos Z dada pela forma expressa em (21) como o produto de três funções: $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $U(t)$.

Como é sabido uma equação diferencial na forma de (24) pode ser resolvida propondo-lhe soluções na forma:

$$Z(r, \theta, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot e^{n\omega t} \quad (25)$$

Uma solução na forma de (25) tem como derivadas parciais :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = R\Theta n^2 \omega^2 \cdot e^{n\omega t}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \Theta \cdot e^{n\omega t} \cdot \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = R \cdot e^{n\omega t} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \right) \quad (26)$$

desta forma quando as equações (26) são substituídas em (24) fornece, após algumas manipulações algébricas a relação:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{Rn^2 \omega^2}{c^2} = - \frac{R}{r^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \quad (27)$$

Por sua vez, quando a equação (27) tem cada um de seus lados igualados a uma certa constante $\frac{m^2 R}{r^2}$ fornece duas novas equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (28a)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + R \left[\left(\frac{m}{r^2} \right)^2 - \left(\frac{n\omega}{c} \right)^2 \right] = 0 \quad (28b)$$

A solução de (28a) é simplesmente a exponencial da forma:

$$\Theta(\theta) = V e^{-n\omega t} \quad (29)$$

enquanto que a segunda (28b) nos transporta a uma *Equação de Bessel* de ordem m. Podemos compará-la ao caso de uma função de Bessel do tipo :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + y \left[1 - \left(\frac{m}{x} \right)^2 \right] = 0 \quad (30)$$

desde que tomemos nesta tomemos $y = R$ e $x = kr = \frac{n\omega r}{c}$.

Esta função de Bessel de ordem m possui soluções do tipo $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, ..., $J_m(x)$ que vão a zero para certos valores de x. Podemos interpretar da seguinte forma: o n-ésimo zero de $J_m(kr)$ fornece uma frequência do modo (m,n), que tem m *diâmetros nodais* e n *círculos nodais* (inclusive um deles em sua borda).

Novamente neste ponto é possível realizar diversas análises quanto a configuração geométrica das ondas formadas na placa circular dadas pelas equações (29) e (30). No entanto, em função da complexidade deste assunto, para o caso aqui abordado – placas finas - envolvendo solução de equações de *Bessel Hiperbólicas* que não serão discutidas aqui mas podem ser encontradas nas referências citadas na bibliografia do presente relatório.