

RELATÓRIO FINAL: FRACTAIS NA SALA DE AULA
ORIENTADOR: MAURÍCIO URBAN KLEINKE
kleinke arroba ifi ponto unicamp ponto br

FABIO AMICUCCI – R.A. 043281
f043281 arroba dac ponto unicamp ponto br



PRIMEIRO SEMESTRE DE 2013

RESUMO

Neste artigo, exploramos a viabilidade de realizar uma oficina interdisciplinar com alunos de ensino médio, que introduza conceitos de Física e Matemática moderna, por meio de uma atividade lúdica de pintura.

INTRODUÇÃO

O estudo, a partir do início da década de 1960, de modelos matemáticos de certos fenômenos naturais, como o clima, levou ao desenvolvimento de um novo ramo da ciência conhecido como teoria do *caos*. Um dos desdobramentos dessa teoria, que viria a seguir, seria um tipo de geometria não-euclidiana, chamada geometria fractal, desenvolvida a partir da década de 1970. O primeiro a utilizar a expressão fractal foi o matemático francês Benoit Mandelbrot, para designar certas construções geométricas que não podiam ser convenientemente descritas por um número estritamente inteiro de dimensões.

Fractais são essencialmente curvas geradas por equações. Diferentemente de cônicas, a principal característica dos fractais é a auto-similaridade das curvas. A figura 1 ilustra o processo de desenvolvimento de um fractal simples, onde cada novo ramo da figura é desenhado de modo similar ao ramo anterior.

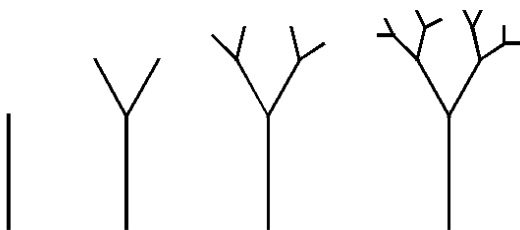


fig. 1: auto-similaridade de um fractal

O fractal mais universalmente conhecido é o conjunto de Mandelbrot, definido pela iteração:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

O conjunto de pontos no plano complexo definido pela eq. 1 dá origem à figura de repetição onde um cardióide é seguido por um número finito de círculos, dado pelo número de iterações:

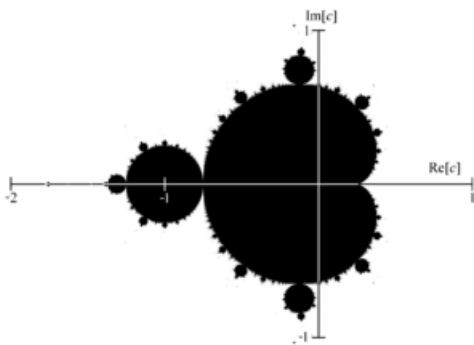


fig. 2: fractal de Mandelbrot.

A auto-similaridade dos fractais também pode ser encontrada em algumas formas da natureza. É impossível não notar a semelhança da fig. 1 com a estrutura de galhos de uma árvore. Neste caso, a fractal é determinada por métodos estatísticos, e não algébricos. Fractais ocorrem na natureza em objetos de estrutura não-maciça, tais como miolo de pão ou um punhado de grãos. Um objeto não maciço não pode ser convenientemente descrito por um número inteiro de dimensões, uma vez que apresentaria infinitas discontinuidades.

Formas fractais também podem ocorrer em obras humanas. O Físico Richard Taylor, em seu artigo *Order in Pollock's Chaos* (2002, *Scientific American*), afirma que as telas abstratas do pintor Jackson Pollock (1912, 1956) apresentam estruturas de auto-similaridade, fato que lhes confere uma dimensão fractal bem definida. A técnica de pintura de Pollock se baseava em arremessar tinta na tela posicionada horizontalmente, fazendo com que a deposição das gotas de tinta fosse aleatória (caótica).



fig. 3: *Convergence*, 1952, Jackson Pollock

Está na ordem do dia a discussão sobre a introdução de tópicos de ciência moderna no currículo do ensino médio. A maior parte da Física ensinada neste nível se desenvolveu entre os séculos XVII e

XIX. No caso da matemática a disparidade é ainda maior, quase tudo que aprendemos e ensinamos teve seu desenvolvimento ainda na idade antiga.

No entanto, qualquer tentativa de introduzir temas modernos no ensino médio esbarra logo em algumas dificuldades: em geral, esses conteúdos requerem um bom conhecimento prévio da ciência clássica, de ferramentas matemáticas avançadas e de uma capacidade de abstração a qual os alunos não estão acostumados.

A geometria fractal é uma excelente oportunidade de introduzir a matemática e a ciência moderna na sala de aula, já que é fácil de ser entendida, pode ser apresentada de maneira lúdica sem grandes formalismos, e ainda permite o uso de alguns experimentos físicos que podem ser conduzidos pelos próprios estudantes.

OBJETIVOS

Elaborar um roteiro de experimento que oriente alunos e professores construir uma figura fractal baseada na técnica de Pollock, usando um sistema caótico de arremesso de tinta;

Determinar a dimensão fractal da figura desenhada pelo método proposto;

Introduzir no ensino médio os conceitos de sistemas caóticos, geometria não-euclidiana e métodos estatísticos em Física;

Discutir arte moderna abstrata, e produzir uma pintura abstrata.

ROTEIRO

Para produzir um padrão aleatório de arremesso de tinta, utilizamos a ação do vento sobre “velas” ortogonais, de modo a fornecer suficiente grau de liberdade. Neste sistema de velas acoplamos um dispensador e gotejador de tinta (um frasco de detergente doméstico com o fundo cortado). Para as velas podemos utilizar qualquer pedaço de plástico ou tecido, por exemplo, lençóis ou toalhas. O conjunto deve ser suspenso conforme mostra a figura 4.



fig. 4: montagem do conjunto de pintura caótica.

É muito importante que o dispensador de tinta esteja suspenso por um pequeno comprimento livre de fio (aproximadamente 30 cm), pois caso contrário não se observará um número suficiente de graus de liberdade.

Em seguida prepara-se a tinta no dispensador. Utilizamos tinta guache pela baixa toxicidade e facilidade de limpeza do excesso. É necessário que sua fluidez esteja num ponto ideal de

escoamento, sem gotejamentos e sem excesso de água, ou seja, é preciso diluir com água aos poucos, testando a fluidez dentro de outro recipiente, antes de iniciar a pintura. Ao abrir a válvula do dispensador, a tinta flui e o conjunto oscila caoticamente. Então interrompemos o fluxo de tinta em certa densidade de traços; o ideal é que pouco menos de 20% do papel seja coberto. O resultado obtido é visto na figura 5.



fig. 5: padrão aleatório de deposição de tinta.

O anteparo pode ser um papel comum. Se houver interesse dos professores, pode ser feita uma sobreposição de cores de modo a produzir uma tela abstrata.

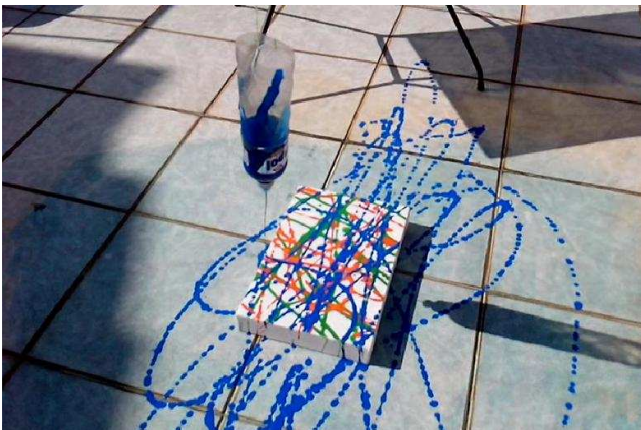


fig. 6: sobrepondo cores para produção de arte.

DIMENSÃO FRACTAL

Sabemos que se o experimento fosse interrompido após um único traço, a dimensão da figura obtida seria 1; já se o experimento fosse conduzido durante um tempo infinito de modo a pintar uniformemente toda a superfície do papel, a dimensão seria 2. É natural considerar, portanto, que a dimensão da figura obtida em um tempo finito de exposição, conforme mostrado, tenha dimensão entre 1 e 2, e será tão mais próxima de 2 quanto mais denso for o desenho.

A determinação da dimensão dessa construção é feita de maneira estatística, uma vez que não é possível obter uma equação (ou um conjunto de equações) que descreva o caráter caótico da figura. Usamos aqui o mesmo método de “contar quadrados”, utilizado para determinar a dimensão fractal de litorais recortados. Para isso, sobreescrevemos a figura sobre papel milimetrado e contamos o número de quadrados que foram efetivamente preenchidos com tinta. Essa sobreposição pode ser feita digitalizando a figura, ou de maneira mais simples, sobrepondo uma folha de papel

milimetrado ao desenho.

A relação entre o número de caixas ocupadas (N), o comprimento da caixa (L) e a dimensão fractal DF é dada por

$$N = L^{-DF}$$

A medição do experimento da fig. 5 resultou:

L (mm)	N
20	46
10	110
5	380

tabela 1: medição da figura.

Uma regressão logarítmica da tabela 1 revela a dimensão fractal $DF = 1,5$.

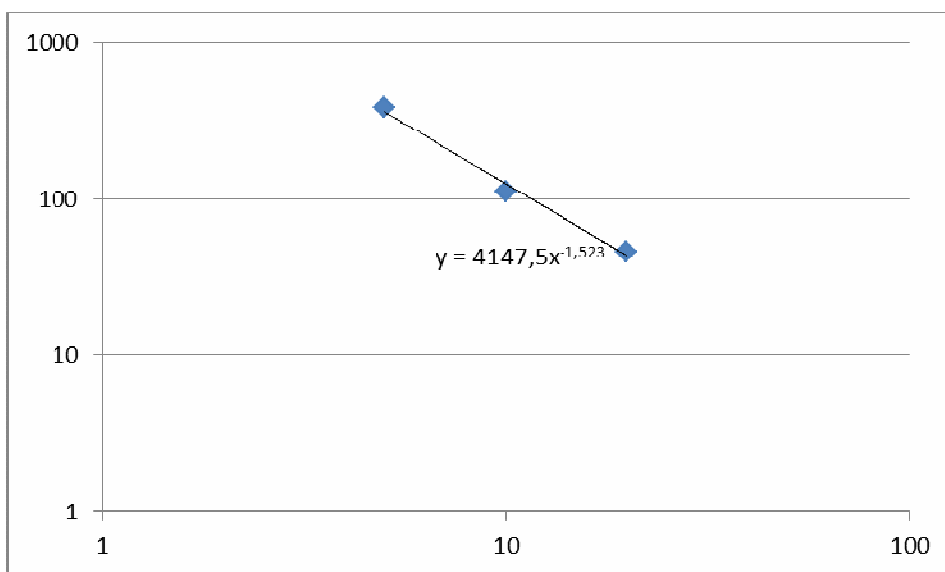


fig. 7: regressão linear.

DISCUSSÃO

Foram necessárias algumas tentativas e erros até encontrar a maneira correta de fixação das velas, a distância correta do dispensador ao anteparo, a fluidez correta da tinta, o tempo ideal de exposição etc. Após essas tentativas, o resultado alcançado ficou muito bom, e muito parecido com o traço de Pollock. A densidade de traços pode até ser estendida para se aproximar de Pollock, entretanto isso dificulta a medição das caixas preenchidas.

Uma grande dificuldade encontrada foi necessidade de vento. Em um dia de brisa fraca o resultado não é tão bom quanto em dia de brisa moderada, podendo chegar a inviabilizar o experimento. Essa dificuldade foi contornada com o uso de um ventilador comum de braço oscilante, que precisa ser posicionado do lado “de dentro” das velas, com a posição “neutra” direcionada para a união das duas velas.

Outra dificuldade que certamente aparece é a regressão log-log. Alunos de ensino médio não têm ferramental matemático para aplicar mínimos quadrados, e o professor pode contornar essa dificuldade de duas maneiras: ou ele próprio faz a regressão a partir dos dados entregues pelos alunos; ou, preferencialmente, os orienta a montar uma tabela $\log(N) \times \log(L)$, e então calcular os

coeficientes angulares dois a dois, para então calcular a média entre os três coeficientes obtidos. De maneira geral, esse experimento é bastante completo em termos de interdisciplinaridade, pois permite aos professores explorar os conceitos de teoria do caos e abordagem não-determinística de fenômenos físicos (no campo da Física); figuras fractais e funções logarítmicas (no campo da matemática); e de história da arte moderna e contemporânea (no campo das artes). Além disso, é uma atividade lúdica que permite um nível de interação e colaboração entre os alunos, de modo não usual na sala de aula.

Essa atividade é um excelente tema para ser oferecido como oficina durante uma olimpíada de matemática, onde o clima de competição pode gerar um acúmulo de tensões e stress entre os alunos. Também pode ser oferecido como trabalho a ser desenvolvido por um único grupo em feira de ciências.

CONCLUSÃO

Em comparação ao tradicional experimento de medição da dimensão fractal de uma esfera de papel amassado, o experimento da pintura de Pollock apresenta diversas vantagens. A mais notável delas é o custo, pois quando no primeiro são necessários um paquímetro e uma balança de precisão, neste, não é necessário mais que materiais de sucata e uma pequena quantidade de tinta guache. Trata-se também de uma atividade muito mais lúdica, portanto mais adequada ao público de ensino médio. Por fim é uma atividade pluridisciplinar, que cumpre sua proposta de introduzir, com qualidade, tópicos de ciência e arte do séc. XX.

REFERÊNCIAS

Taylor, Richard P. *Order in Pollock's Chaos*. Scientific American, december 2002, p.116-121.

Kleinke, Maurício U. *Oficina sobre fractais*. Colégio Estadual do Paraná, agosto de 2012.

M. Amaku, M. Moralles, L. B. Horodysnki-Matsushigue e P. R. Pascholati. *Fractais no laboratório didático*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 23, p. 422. São Paulo, 2001.

Verbete *Jackson Pollock*. http://en.wikipedia.org/wiki/Jackson_Pollock.

Palavra-chave *fractal tree*. (pesquisa de imagens)
<http://davis.wpi.edu/~matt/courses/fractals/trees.html>

Palavra-chave *Pollock*. (pesquisa de imagens)
http://arthistory.about.com/od/from_exhibitions/ig/action_abstraction/jm-aa_08_08.htm

OPINIÃO DO ORIENTADOR

“Meu orientador concorda com o expressado neste relatório final e deu a seguinte opinião: O presente trabalho necessita ainda de alguns ajustes antes de ser aplicado em sala de aula. A ideia de integrar professores das diversas áreas é ótima (Artes, Física e Matemática). A questão da forma de medida da dimensão fractal é outro ponto importante. Em minhas experiências anteriores, é possível apresentar um gráfico linear e sua transição para um gráfico logaritmo, que os alunos conseguem realizar a tarefa, se tiverem tempo adequado. O importante é a facilidade do processo enquanto equipamento e material, extremamente simples. Um pouco "suja", mas deve ser realizada em ambiente externo.”

PUBLICAÇÕES ANTERIORES DO ORIENTADOR SOBRE CAOS E FRACTAIS

Nenhuma publicação específica na área de educação; este trabalho, portanto, tem caráter inédito. Alguns trabalhos de pesquisa sobre Caos e Fractais:

Artigos em periódicos

SILVA, L L G; FERREIRA, Neidinei G; DOTTO, Marta Elisa Rosso; KLEINKE, Mauricio Urban. The Fractal Dimension of Boron-Doped Diamond Films. Applied Surface Science, v. 181, p. 327-330, 2001.

Iniciação científica

CILENI, Silvia. Dimensão Fractal de Eletrodos de Polipirrol. 1997. Iniciação científica (Graduando em Bacharelado Em Química) - Universidade Estadual de Campinas, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico/DF. Orientador: Mauricio Urban Kleinke.

SILVA, Rafael Morgado. Bifurcações e Caos em Diodos. 1997. Iniciação científica (Graduando em Bacharelado em Física) - Universidade Estadual de Campinas, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. Orientador: Mauricio Urban Kleinke.

Demais trabalhos

KLEINKE, Mauricio Urban; TESCHKE, O. Fractal Characterization Of The Morphology Of Porous Silicon By Atomic Force Microscope. 1997. (Poster em congresso).

KLEINKE, Mauricio Urban. Chaos During Iron Electrodissolution. 1996. (Apresentação oral em congresso internacional).

Fonte: currículo Lattes