Relatório Pré-final de F609 – tópicos de ensino de física I

Rotações num plano inclinado

Aluna: Gabriela Fasolo Pivaro RA 081472 (gabifasolo @ gmail.com)

Professor orientador: Dr. Francisco Amancio Cardoso Mendes (frmendes @ unicamp.br – Faculdade de Educação)

Dezembro/2014

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Resumo:

Neste projeto, experimentaremos com rotações em um plano inclinado. A ideia é mostrar que a aceleração de rotação está diretamente ligada ao momento de inércia de um objeto. Para isso, montaremos dois cilindros de mesma massa, porém momentos de inércia diferentes. Soltando eles num plano inclinado, será possível notar que eles chegarão ao fim em tempos diferentes, evidenciando a sua diferença de velocidade e, assim, de aceleração.

Teoria do experimento:

Centro de massa:

Vamos, primeiramente, definir o que é centro de massa:
"O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se 1. toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e 2. todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto." [1]

Traduzindo-se isso em uma expressão, dizemos que:

$$r_{CM}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i \quad (1)$$

Aqui, o vetor $\mathbf{r}_{CM}$ representa a posição no espaço do centro de massa, M é a massa total do sistema, e os termos m_i e r_i são, respectivamente, a massa e a posição no espaço das partículas de índice i. Essa relação é importante aos nossos cálculos futuros pois consideraremos as forças envolvidas nos sistemas como atuantes nos seus centros de massa.

Suponhamos, agora, um corpo em rotação. Num determinado intervalo de tempo, esse corpo em rotação tem uma variação angular, como pode ser visto na figura 1 abaixo.

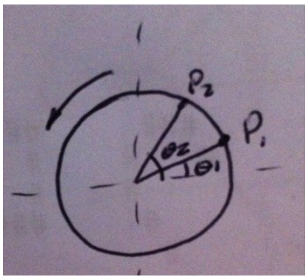

Figura 1: a seta indica o sentido da rotação de um corpo, onde se encontra na posição P_1 em t_1, e na posição P_2 em t_2.

Num tempo arbitrário inicial, chamando aqui de t_1, um ponto arbitrário esta na posição P_1, em um relacionado ângulo θ_1. Numa variação de tempo, t_2, o ponto agora está em P_2 e ângulo θ_2. A variação desse ângulo ($\Delta\theta$) em relação ao tempo (Δ t) é chamada velocidade angular (ω).

1 **HALLIDAY**, D. Fundamentos de Física: Mecânica, vol1. 7 ed., página 218

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} (2)$$

E a velocidade linear e angular de um corpo podem se relacionar através da equação:

$$v = \omega R \qquad (3)$$

Onde R é o raio do objeto em rotação. A variação da velocidade angular em relação ao tempo é chamada aceleração angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (4)$$

Momento de Inércia:

A aceleração angular está relacionada a uma grandeza chamada momento de inércia. Para explica-la partiremos do conceito de energia cinética, que é a energia associada a um objeto em movimento. Ela relaciona a massa desse objeto com sua velocidade, através da fórmula $K = \frac{1}{2} m v^2$

Consideremos, agora, um disco em rotação. Esse disco é um conjunto de partículas com diferentes velocidades, uma vez que a velocidade (v) está diretamente ligada à distância que o ponto está do centro. Segundo essa lógica, podemos colocar a energia cinética total como sendo a soma de todas as energias de cada partícula. Isso nos dá:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 (5)$$

Onde m_i é a massa da partícula de ordem i, e v_i sua velocidade.

Como v_i não é igual a todas as suas partículas, substituímos pela relação com a velocidade angular:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega^2 (6)$$

A esse valor nos parênteses damos o nome de Momento de inércia. Podemos perceber que essa quantidade depende da forma como a massa do corpo está distribuída em torno do seu eixo de rotação.

Temos, então, a definição:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 (7)$$

Torque:

Outro conceito importante a se ter noção, é o chamado Torque (τ). Para ajudar a entender o que é, usaremos um exemplo de fácil visualização.

Imagine você abrindo uma porta. A maçaneta fica a uma distância maior possível do eixo das dobradiças por um motivo. Quando você faz força para abri-la, pode-se perceber que a faz em um sentido perpendicular ao eixo da porta. Caso o fizesse no eixo paralelo, a porta não abriria. A força que se faz, então, tem duas componentes, onde apenas uma delas contribui para a rotação da porta.

A capacidade de fazer a porta girar depende não somente da direção da força aplicada, como também à distância em que se aplica. Para levar em conta esses dois fatores, é definida uma grandeza chamada torque, que, em fórmula, se dá por:

$$\tau = r F sen\theta (8)$$

Juntando os conceitos de torque e momento de inércia, podemos escrever a segunda lei de Newton (comumente escrita por $F = m a$) nesses termos. Estamos interessados em relacionar o torque resultando aplicado a um corpo rígido à aceleração angular alfa produzida pelo torque. Em uma analogia à segunda lei de Newton, substituímos *F* por *τ*, *m* por *I* e *a* por *α*.

Desse modo, temos:

$$\tau = I \alpha (9)$$

Sabendo esses conceitos chaves para o experimento, podemos prosseguir com o estudo das forças do rolamento, explicitando aqui a ação do rolamento para baixo em uma rampa inclinada. Se uma força age no objeto que está rolando, a fim de aumentar ou diminuir sua velocidade, essa força também produz uma aceleração do centro de massa (a_{cm}) na direção do movimento. Além, ela faz com que a roda gire mais rápida ou devagar, o que significa que causa uma aceleração angular (α). Essa aceleração tende a fazer a roda deslizar no ponto de contato com a superfície, assim, uma força de atrito deve agir sobre a roda nesse ponto para se opor a esse movimento (uma vez que estamos estudando o rolamento sem deslizamento de um objeto).

A aceleração a_{cm} pode-se relacionar com a angular α através da fórmula:

$$a_{CM} = \alpha R (10)$$

Para chegarmos nesse resultado, basta variarmos a equação 3 pelo tempo.

Rolando para baixo em uma rampa:

A figura 2 abaixo mostra um objeto de massa M e raio R rolando em uma rampa inclinada a θ graus. Buscamos, aqui, obter uma expressão para a aceleração angular do objeto ao longo da rampa.

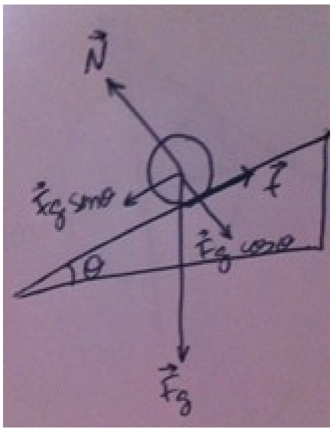

Figura 2: esquema mostrando um corpo rolando uma rampa inclinada a teta graus da horizontal, juntamente com as forças que agem no corpo.

Como podemos ver na imagem acima, as forças que atuam no objeto estão explicitadas e são as seguintes:

1. A força gravitacional $\mathbf{F}_g$ que atua no centro de massa, com sentido para baixo. A origem dessa força está colocada no centro de massa, e possui duas componentes. A componente ao longo da rampa é determinada por $\mathbf{F}_g$ sen(θ), que é igual a M_g sen(θ).
2. A força normal **N**, que atua no ponto de contato do objeto com a rampa e é perpendicular a esta. Na imagem, a força está deslocada, sem perda de informação, ao longo de sua direção até que se atinja o centro de massa.
3. A força de atrito (**f**) que atua no ponto de contato, que se opõe ao movimento e está direcionada para cima ao longo da rampa.

Igualando-se as forças responsáveis pelo movimento ao longo da rampa pelo seu sentido de atuação, temos:

$$M\,a_{CM} + Mg\,sen(\theta) = f \quad (10)$$

Agora, vamos descrever a rotação do corpo em torno de um eixo horizontal passando pelo centro de massa. A força de atrito provoca um torque no objeto que o faz girar no sentido anti-horário da figura 2, que atua a uma distância R do objeto. Assim, podemos escrever:

$$Rf = I_{CM}\,\alpha \quad (11)$$

Como o corpo rola sem deslizar, podemos usar a equação 9 e relacionar as incógnitas a_{cm} e α. O cuidado que precisamos ter aqui é perceber que, nesse caso, a_{cm} é negativa (no sentido negativo do eixo x), enquanto α é positiva (sentido anti-horário). Assim, substituindo $\alpha = \frac{-a_{CM}}{R}$ na equação 11 acima, e explicitando f, temos:

$$f = \frac{-I_{CM}\, a_{CM}}{R^2} \quad (12)$$

E substituindo esse valor de na equação 10, obtemos, finalmente, a relação da aceleração do objeto no plano inclinado em função do ângulo, da massa, e especialmente (motivo de estudo desse experimento) do momento angular:

$$a_{CM} = \frac{-g\, sen\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{M\, R^2}} \quad (13)$$

<u>Procedimentos experimentais:</u>

Para visualizar que objetos com mesma massa e raio, porém com diferentes momentos de inércia, possuem acelerações diferentes quando descem um plano inclinado (como mostra a equação 13), pensamos no seguinte experimento:

Dois objetos cilíndricos de mesmas características foram modificados de maneiras diferentes. A ideia é introduzir duas barras em cada um deles, de modo que a soma das massas das duas barras em cada seja igual, porém elas estarão em distâncias diferentes do centro, o que modificará o momento de inercia de cada cilindro.

Estes cilindros são postos em uma rampa fazendo um ângulo θ com a horizontal, e serão largados no mesmo momento para iniciar um rolamento na rampa. Por causa do momento de inércia que difere, eles chegarão ao fim da rampa em tempos diferentes, e evidenciarão o objetivo desse experimento.

<u>Materiais utilizados:</u>

Os cilindros em posse para o experimento são mostrados na figura 3 abaixo.

Figura 3: foto dos objetos cilíndricos utilizados no experimento

Eles são feitos de materiais recicláveis, o que facilita a duplicação desse experimento por outras pessoas, uma vez que os materiais buscados aqui são de fácil acesso.

Já as barras foram compradas, e foram serradas na metade para que ficassem, além de no tamanho do cilindro, usadas como duas barras e com isso aumentar a massa total. Elas podem ser vistas na figura 4 abaixo:

Figura 4: barras de metal que serão utilizadas no experimento acopladas aos cilindros da figura 3, junto com a serra usada para cortá-las ao meio.

A rampa para soltar os objetos foi construída utilizando-se um velho estrado de cama em posse da aluna. Ela é apoiada num anteparo de madeira e desse modo cria-se uma inclinação de ângulo θ e pode ser vista na Figura 5 abaixo.

Figura 5: foto da rampa onde os cilindros deslizarão, feita com madeira de um estrado de cama.

Uma vez com o experimento montado, podemos soltar os objetos ao mesmo tempo e mostrar a diferença das acelerações entre eles. Um problema é a rampa ser muito curta para, aos olhos, notar-se isso. Uma possibilidade estudada e realizada aqui é de manter o movimento no chão, quando os cilindros saem da rampa, e mostrar qual dos dois alcança um ponto ao longo do chão primeiro. Aquele que o alcançar terá uma aceleração maior e servirá de exemplo para demonstrar a equação 13, provando que o momento de inércia de um objeto afeta as forças envolvidas nos seus movimentos.

Algumas aplicações interessantes pensadas com a utilização desse experimento em uma sala de aula de ensino médio, por exemplo, seria, além dos cálculos envolvendo onde se encontra o centro de massa, e qual o valor do momento de inércia, também calcular qual seria a aceleração de um corpo num plano inclinado. Indo mais além, também é possível calcular a aceleração do objeto e, com isso, estimar a inclinação de uma superfície.

Experimento:

Usando uma régua de 30cm mediu-se o diâmetro dos cilindros e chegou-se ao valor de 26cm, o que nos dá 13cm de raio. Após isso, serramos as barras de metal ao meio, de modo que cada pedaço ficasse com 50 cm de comprimento. Esses pedaços foram, então, inseridos no cilindro.

Antes de fazer os furos necessários para que as barras coubessem nas tampas desses cilindros, medimos as distâncias queridas para que as barras ficassem. Essa distância foi escolhida de modo que, em repouso, o cilindro ficasse em equilíbrio. Ou seja, os torques produzidos pelas barras, em cada lado do cilindro, foram pensados a serem iguais.

Como o que interessava eram os torques iguais, foi-se pensado em deixar as barras, num mesmo cilindro, numa mesma distância em relação ao centro. Em uma delas, deixou-se a 3cm do centro, e na outra, a 12cm. Isso pode ser visto na imagem 6 abaixo:

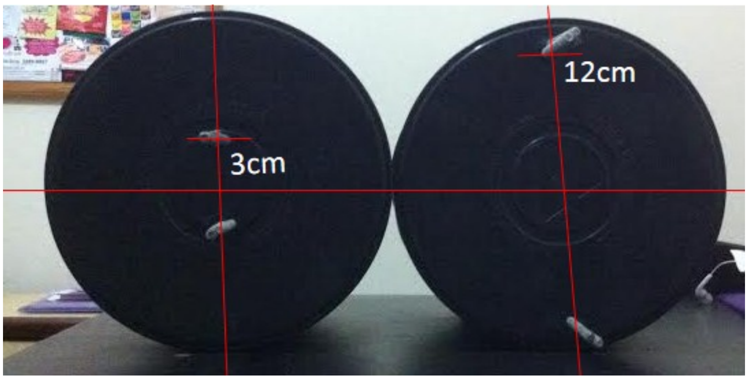

Figura 6: cilindros e barras acopladas, mostrando a distância do centro em cada um deles (3cm o da esquerda, e 12cm o da direita)

Podemos, com essas informações, calcular o I_{CM} de cada um dos cilindros, em relação a sua massa. Chamemos a massa do cilindro de m, e a massa das barras de cada lado $\frac{M}{2}$, de modo que a massa total das barras em cada cilindro seja M. Elas são iguais em ambos, e chamemos I_3 o momento de inércia do cilindro do lado esquerdo da fugira 6, e I_{12} o do lado direito. Como vemos na equação 7, o momento de inércia se relaciona com a massa dos constituintes do sistema e suas distâncias do centro. Uma vez que a massa é a mesma, e considerando M >> m, podemos escrever:

$$I_3 = 2\frac{M}{2}3^2 = 9M\left(14\right)$$

$$I_{12} = 2\frac{M}{2}12^2 = 144M\left(15\right)$$

É importante lembrar que ambas as equações 14 e 15 estão em dimensão de $kg\,cm$.

Agora, para achar a relação das acelerações dos corpos, voltamos à equação 13. Temos então:

$$\frac{a_3}{a_{12}} = \frac{\dfrac{-gsen\theta}{1+\dfrac{9M}{MR^2}}}{\dfrac{-gsen\theta}{1+\dfrac{144M}{MR^2}}} = \frac{R^2+144}{R^2+9} = 1{,}20\left(16\right)$$

Aqui, usamos R = 26 cm, e tiramos, matematicamente, que a aceleração a_3 (aceleração do cilindro de momento de inércia I_3) é 1,20 vezes maior do que a aceleração a_{12} (aceleração do cilindro de momento de inércia I_{12}).

Resultados:

As experimentações realizadas, onde os cilindros são largados ao mesmo tempo no topo da rampa construída, bateram com a teoria, de que a aceleração do cilindro de menor momento de inércia é maior. Isso era esperado, uma vez que o momento de inércia pode ser interpretado como o grau de dificuldade de se colocar um objeto em, ou mudar o seu eixo de, rotação.

Com um aparato colocado a uma certa distância razoável do fim da rampa (digamos 2 metros), é mais fácil perceber essa diferença de aceleração, uma vez que um dos cilindros atinge esse alvo mais rápido do que o outro.

Dessa forma, confirma-se a teoria e se desenvolve um bom método para calcular a aceleração de um corpo em um plano inclinado.

Referências:

HALLIDAY, D. Fundamentos de Física: Mecânica, vol1. 7 ed.

Palavras chaves usadas na pesquisa:

Momento de inércia;
Aceleração angular;
Rotação em plano inclinado.