

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA E DO MOMENTO LINEAR EM COLISÕES EM UM PÊNULO DE NEWTON

Fabricio Marques do Carmo

Trabalho apresentado ao Instituto de Física “Gleb Wataghin”
da Universidade Estadual de Campinas para avaliação na
disciplina F609 - Tópicos de Ensino de Física I.

CAMPINAS

2019

Conservação da energia mecânica e do momento linear em colisões em um Pêndulo de Newton

Fabricio Marques do Carmo*

Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas

(Data: 22 de junho de 2019)

Este trabalho pretende ser uma adaptação de uma solução do problema 15 - *Newton's Cradle* do 32º IYPT, que propõe estudar como a taxa de decaimento da amplitude das oscilações de tal aparato depende de parâmetros relevantes como número, material e alinhamento das esferas. Tal solução foi originalmente concebida pela equipe *Não Sabemos Ainda* do Colégio Etapa/SP para a fase nacional do torneio e encontra-se atualmente em processo de reprodução e aprofundamento pela equipe brasileira a fim de ser apresentada em Julho de 2019 em Varsóvia, na Polônia, por ocasião do torneio internacional. Na análise são utilizadas as principais abordagens teóricas, como a aproximação à colisão de corpos rígidos e também a teoria da elasticidade proposta por Hertz, para descrever os fenômenos físicos que ocorrem no Pêndulo, a fim de possibilitar escolher uma modelagem mais condizente com o observado de acordo com cada situação analisada. Para gerar diferentes situações, foram executados diversos experimentos variando diferentes parâmetros conforme proposta do enunciado original. No interesse específico da disciplina F 609 - Tópicos de Ensino de Física I, oferecida pelo IFGW, é conveniente notar, ainda, que diferentes configurações do mesmo aparato podem ser utilizadas também para demonstrações didáticas de considerável apelo visual da manifestação de fenômenos físicos comumente estudados no Ensino Médio, como a conservação da energia mecânica e do momento linear, bem como as limitações práticas de sua observação, visto que nenhuma colisão é de fato perfeitamente elástica e que, além disso, efeitos dissipativos podem e vão contribuir para o comportamento físico observável do sistema.

*E-mail: f230414@dac.unicamp.br

I. INTRODUÇÃO

O Pêndulo de Newton, do inglês “*Newton’s Cradle*”, tem sido recorrente no estudo da Física há alguns séculos. Desde sua primeira menção registrada, referido em um artigo apresentado por John Wallis, Christopher Wren e Christiaan Huygens à Royal Society, em 1662 [1], tem sido utilizado para o estudo de conceitos e para demonstração de teorias, perdurando no viés de pesquisas acadêmicas até hoje [1–7]. Recebeu seu primeiro nome de Marius J. Morin, entretanto o consagrado nome “*Newton’s Cradle*” só o foi dado em 1967, pelo ator Simon Prebble, ao passo que este começou a comercializar uma versão de madeira do mesmo. A versão com esferas de metal que hoje se vê como a mais difundida apareceu no mercado algum tempo depois, com um *design* de Richard Loncraine.

Atualmente, o Pêndulo de Newton é encontrado não somente como um adorno muito comum em mesas de escritório, como também constitui um interessante instrumento para uso de professores de ciências em salas de aula como meio de ilustração de conceitos como conservação de momento e de energia. Além disso, quando analisado mais profundamente, pode proporcionar, e de fato proporciona, muitos desafios àqueles que o estudam. O fato de haverem muitas esferas em cadeia, por exemplo, constitui uma dificuldade tremenda ao desenvolvimento de um modelo teórico que retrate de maneira fidedigna os fenômenos observados, visto que os impactos sequenciais ocasionam o fenômeno que a literatura convencionou denominar de “impacto múltiplo” [2, 7].

Sendo o Pêndulo de Newton constituído basicamente de uma linha de esferas que se tangenciam e que ficam suspensas por um par de cordas, tratadas em geral como inelásticas, o “impacto múltiplo” referido acima é definido, de modo simples, como a ocorrência simultânea de diversas colisões em diferentes pontos do sistema [7]. Quando se suspende um número de esferas a uma determinada altura, e deixa-se que caiam, cria-se uma colisão das mesmas com as subsequentes, e, desta maneira, por estarem todas se tangenciando, ocorrem colisões

por todo o conjunto, ao mesmo tempo.

É intuitivo esperar que ao se levantar um determinado número de esferas e soltá-las gerando uma colisão, seja ejetada uma quantidade de massa igual à massa total que estava levantada, só que do lado oposto da cadeia. Havendo igualdade entre todas as massas, o número de esferas ejetadas do outro lado deverá ser igual ao número de esferas incidente. Entretanto, por mais próximo que este modelo seja da realidade, é ainda muito idealizado: empiricamente nota-se que não somente as esferas da extremidade oposta irão se movimentar, mas, de fato, todas as esferas, já que logo na primeira colisão há uma quebra na cadeia de esferas [4], o que gera, tanto por parte das esferas centrais como pelas das extremidades, movimentos não previstos por uma modelagem teórica mais simplista. Assim, a explicação desses movimentos podem render uma análise muito mais rica e interessante do que se poderia supor de imediato.

Ao longo deste trabalho pretende-se levantar hipóteses acerca das teorias que regem o conjunto de fenômenos supracitado. Junto a isso, pretende-se apresentar um procedimento para a análise do decaimento nas amplitudes de oscilação das esferas, até a oscilação em fase do conjunto que se segue. Serão ainda apresentadas e discutidas algumas abordagens teóricas para que, posteriormente, possa-se fazer uma comparação entre elas. Pretende-se ainda descrever e ilustrar os meios de obtenção de dados e o arranjo experimental e, por fim, discutir propostas de uso do equipamento para demonstrações em sala de aula, tanto com esferas idênticas, como com esferas diferentes em uma série de possíveis configurações. Conceitos comumente apresentados no Ensino Médio, como conservação da energia mecânica e do momento linear, além de intrinsecamente abstratos, podem ser difíceis de visualizar em situações cotidianas e, nesse sentido o uso do Pêndulo de Newton pode constituir uma ferramenta interessante tanto para observar de maneira aproximada tais fenômenos, como para sistematizar o estudo de efeitos dissipativos e também para permitir a discussão das limitações de modelos idealizados.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para se iniciar o movimento do Pêndulo de Newton, levanta-se, por exemplo, uma esfera da extremidade, mantendo o fio esticado, formando um determinado ângulo inicial θ_0 entre o eixo vertical e a linha que liga a esfera à estrutura. Soltando-a, permitimos que o centro de massa da mesma se movimente descrevendo um arco de circunferência com velocidade tangencial crescente e raio L (Fig. 1). Assumindo um fio ideal, inextensível e com massa desprezível, e soltura com o fio esticado a seu tamanho natural, podemos afirmar que não haverá movimento radial.

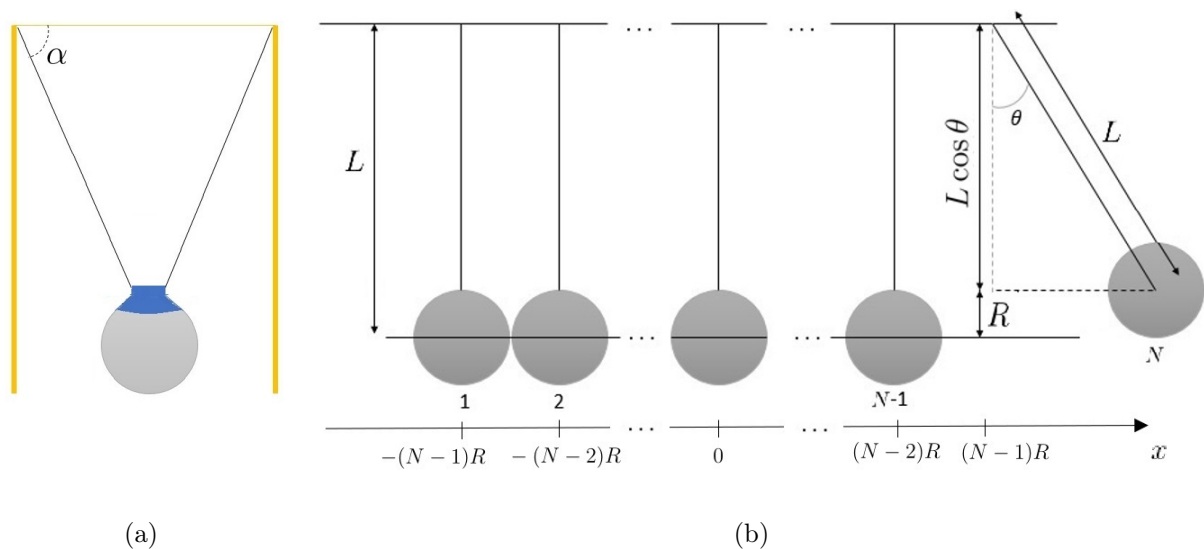


Figura 1: Visões do Pêndulo de Newton: (a) Frontal e (b) Lateral.

Ao percorrer o ângulo θ_0 , a esfera ganhará velocidade, devido a transformação de energia potencial gravitacional em cinética (não por completo, visto que há uma força de resistência do ar, dissipando energia), tendo uma velocidade v_1 no instante antes de colidir com a esfera subsequente na cadeia.

Pode-se soltar também mais esferas e, usualmente, diz-se que apenas ganharão velocidade após o choque o mesmo número de esferas que colidem, só que na extremidade oposta. Entretanto todas as esferas irão se movimentar, como é observado empiricamente.

Isto pode ser explicado por pequenas variações nas massas, ou por desvios gerados, seja por limitações no modelo teórico, seja pelo descarte de uma das soluções, sem que esta tenha sido ao menos percebida [2, 7], ou mesmo por causa da não rigidez da esfera [1, 4, 6]. Todas as três possibilidades serão discutidas ao longo deste trabalho.

A velocidade da i -ésima esfera será denotada v_i ou v'_i , sendo v'_i uma velocidade *posterior* à colisão entre as esferas i e $i + 1$, enquanto v_i será uma velocidade *anterior* a tal colisão. Nota-se que $i \in \mathbb{N} | 1 \leq i \leq N$, onde N é o número de esferas que compõem o Pêndulo.

As posições de equilíbrio das esferas medidas ao longo do eixo x , conforme se vê na Figura 1, serão medidas a partir da origem $x = 0$, que será adotada para coincidir com o centro de massa da cadeia de esferas em repouso. Na situação onde todas as esferas estão em repouso e com o sistema ajustado para que todas se toquem, as posições de equilíbrio dos centros de cada esfera irão variar de $x = -(N - 1)R$ até $x = (N - 1)R$ de $2R$ em $2R$.

Primeiramente, devemos obter a velocidade das esferas levantadas no instante pré-colisão. O procedimento para fazer isso será igual para todas modelagens teóricas e para tanto, o primeiro passo é construir a equação do movimento da i -ésima esfera enquanto esta não colide. Isso pode ser feito a partir da expressão do torque sobre a mesma em relação ao centro de giro, resultando em:

$$I\ddot{\theta}_i = -MgL \sin \theta_i - \frac{1}{2}C_{\text{ar}}\rho_{\text{ar}}\pi R^2 L^2 \dot{\theta}_i^2 \text{sign}(\dot{\theta}_i) \quad (1)$$

onde, para uma esfera homogênea de massa M e raio R a uma distância L do centro de giro, o momento de inércia será $I = \frac{2}{5}MR^2 + ML^2$. Na maioria dos casos, se a esfera é suficientemente pequena em comparação com o raio de giro, teremos $R \ll L$ e podemos tomar $I \approx ML^2$. Outra aproximação muito comum no estudo de movimentos oscilatórios corresponde a considerar o caso de pequenas amplitudes, o que permite tomar $\sin \theta_i \approx \theta_i$. Para movimentos sob a ação da resistência do ar, um termo de torque proporcional ao

quadrado da velocidade deve ser introduzido, sendo a constante de proporcionalidade desse termo definida para o caso de uma esfera de raio R em função da densidade do ar ρ_{ar} e de uma constante de arrasto C_{ar} que irá assumir diferentes valores para diferentes geometrias e fluidos. No caso de esferas imersas no ar teremos $C_{\text{ar}} \approx 0,47$. A densidade do ar, por sua vez, é $\rho_{\text{ar}} = 1,225 \text{ kg/m}^3$. A função sinal $\text{sign}(\dot{\theta}_i)$ que aparece multiplicando esse termo tem a finalidade de levar em consideração a orientação correta do efeito do ar, que deve ser oposto ao sentido da velocidade.

Para a análise gráfica do movimento será conveniente utilizar a coordenada cartesiana x ao invés dos ângulos. Para tanto devemos notar que, na aproximação de pequenas amplitudes, teremos $\theta_i = (x_i - x_i^0)/L$, $\dot{\theta}_i = \dot{x}_i/L$ e $\ddot{\theta}_i = \ddot{x}_i/L$, sendo x_i^0 a posição de repouso da i -ésima esfera. Isso permite reescrever a equação (1) como:

$$\ddot{x}_i + \lambda \dot{x}_i^2 \text{sign}(\dot{x}_i) + \omega_0^2 x_i = C_i \quad (2)$$

onde $\lambda = \frac{1}{2I} C_{\text{ar}} \rho_{\text{ar}} \pi R^2 L$, $\omega_0^2 = -MgL/I$ e $C_i = \omega_0^2 x_i^0$.

A equação (2) representa um movimento amortecido com um termo de dissipação não-linear e com um termo não-homogêneo C_i definindo uma posição de equilíbrio diferente de zero. Com os parâmetros específicos utilizados em nosso experimento, encontraremos tipicamente $\omega_0^2 \sim 100\lambda$, o que faz com que o tempo do movimento descendente de uma esfera até a sua posição mais baixa seja em geral muito próximo de $1/4$ do período de uma oscilação harmônica de frequência angular ω_0 , isto é, $t_{\text{descida}} \approx \frac{\pi}{2\omega_0}$. Para um cálculo mais preciso, pode-se tentar atacar a equação (2), por exemplo, supondo uma solução em série do tipo:

$$x_i(t) = x_i^0 + f_0(t) + \lambda f_1(t) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3)$$

e resolver perturbativamente até 1ª ordem em λ . Feito isso, em princípio, pode-se tentar

encontrar o instante t para o qual $x_i(t) = x_i^0$.

As colisões que ocorrem serão consideradas alinhadas perfeitamente daqui para frente, tanto no eixo y , quanto no eixo z , considerando então que a distância δ_i entre as esferas é desprezível. A fim de validar esta hipótese, ajustamos o Pêndulo tal que as esferas se tangenciassem e se encontrassem alinhadas. Entretanto, na prática, sempre há algum desalinhamento e a distância δ_i faz com que ocorra um pequeno deslocamento do ponto de colisão, que não estará localizado no eixo x . Quanto maior δ_i , maior será a influência do mesmo sobre o movimento das esferas. Na Seção IV compararemos graficamente um conjunto de esferas desalinhadas com um de esferas alinhadas, a fim de avaliar o quão impactante pode ser este fator para o decaimento de amplitude das oscilações.

Qualitativamente, sabemos que o desalinhamento age de modo a impedir que haja uma conservação de momento no eixo x , visto que com a modificação do ponto de ação da força normal entre as esferas colidindo passa-se a exercer torque sobre a esfera incidida, havendo contribuições para componentes do momento transversais, que serão dissipadas por resistência da corda ao movimento de giro. Fora isso, deste fato decorre o escape lateral das esferas, que ocasiona um movimento não mais linear, mas plano, impedindo a continuidade do movimento típico.

A. Análise das Diferenças das Massas

Considerando um $\epsilon < 1$ obtém-se algo verossímil, apesar de menos intuitivo, quando se pensa nas conservações do momento e da energia. Pode-se encontrar uma relação entre a velocidade da N -ésima esfera e a velocidade de incidência da primeira que se dá por $v_N = \epsilon v_1$, mas também se continua a obter um estado estático por parte de todas as outras esferas que não aquelas das extremidades. Ou seja, obtém-se uma relação de decaimento energético, conforme se vê na equação (4)), proporcional ao decaimento de amplitude, porém não se

consegue explicar os movimentos das esferas centrais.

$$E_f = \epsilon^{2N} E_0 \quad (4)$$

Uma possível maneira de tentar prover uma explicação ao movimento não previsto tradicionalmente, pode ser demonstrada como segue.

O modelo de colisões tradicionais em geral não funciona para casos de impactos múltiplos, visto que quando cunhado não se costuma levar em consideração esta possibilidade. Contudo, caso consideremos que em nosso Pêndulo ocorram colisões subsequentes entre duas esferas por vez, ou seja, entre as esferas i e $i + 1$, como se ambas estivessem isoladas no espaço, seguida da colisão de $i + 1$ e $i + 2$, e assim por diante, conseguimos uma adaptação que possibilita o estudo deste movimento.

Por conservação do momento e da energia ($\epsilon = 1$), supondo massas iguais, temos para a primeira colisão:

$$mv_1 = m(v'_1 + v_2) \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_1'^2 + v_2^2) \quad (5)$$

onde m é a massa das esferas.

Por meio de uma manipulação algébrica simples das equações acima, para índices generalizados, temos:

$$v'_i = 0 \quad v_{i+1} = v_i \quad (6)$$

Por estas equações percebemos que a N -ésima esfera será ejetada com velocidade igual à de colisão da primeira, enquanto todas as outras permanecerão estáticas. Isto se mostra irreal pela mais trivial observação feita com um Pêndulo de Newton, e nota-se que mesmo alterando a condição $\epsilon = 1$ para $\epsilon < 1$ esta abordagem continua relativamente distante da

observação empírica, visto que as equações generalizadas se tornariam as seguintes:

$$v'_i = 0 \quad v_{i+1} = \epsilon v_i \quad (7)$$

Para considerar as pequenas diferenças de massa, pode-se identificá-las por seus índices, como m_i . De forma semelhante à anterior, obtém-se as seguintes expressões por conservação do momento e pela relação do coeficiente de restituição com as velocidades relativas de aproximação e afastamento das esferas:

$$v'_i = (1 + \epsilon)^{i-1} v_1 (m_i - \epsilon m_{i-1}) \prod_j^{i-1} \left(\frac{m_j}{m_j + m_{j+1}} \right) \quad v_{i+1} = (1 + \epsilon)^i v_1 \prod_j^i \left(\frac{m_j}{m_j + m_{j+1}} \right) \quad (8)$$

Desta maneira, obtém-se um modelo matemático que considera a possibilidade de que haja movimento das esferas que não estejam na extremidade oposta.

Para uma análise acerca da energia, que está diretamente associada à amplitude de oscilação do sistema, é necessário notar que a cada colisão $E_{i+1} = \epsilon^2 E_i$. Portanto, como em média em uma oscilação completa ocorrem N colisões, para cada oscilação temos:

$$E'_{\text{cin}} = \epsilon^{2N} E_{\text{cin}} \quad (9)$$

Assim, considerando massas ligeiramente diferentes para cada uma das esferas:

$$v'_i = (1 + \epsilon)^{i-1} v_1 (m_i - \epsilon m_{i-1}) \prod_j^{i-1} \left(\frac{m_j}{m_j + m_{j+1}} \right) \quad v_{i+1} = (1 + \epsilon)^i v_1 \prod_j^i \left(\frac{m_j}{m_j + m_{j+1}} \right) \quad (10)$$

o que possibilita um movimento por parte das esferas centrais, mantendo o decaimento energético calculado na equação (4) a cada transmissão de energia por todas esferas uma por vez.

B. Modelo *Hard-Sphere* Adaptado

Um equívoco que raramente se percebe é que o formato tradicional de modelagem teórica permite o encontro de mais de uma velocidade de saída para cada uma das esferas. Quando se considera os impactos sequenciais, e se faz a conservação aos pares, muitas vezes não se nota que é possível considerar as esferas subsequentes um único corpo rígido, e portanto todas devem ter uma velocidade de ejeção igual, ou é possível considerá-las corpos estratificados, obtendo a ejeção de apenas o mesmo número de esferas que se levanta [2, 6–8]. Nas equações (11) e (12) obtém-se duas soluções igualmente válidas no que diz respeito às conservações do momento linear e da energia propostos tradicionalmente para a cadeia das três esferas, que condizem com as situações apresentadas nas Figuras 2(a) e 2(b).

$$v'_1 = -\frac{1}{3}v_1 \quad v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad v'_3 = \frac{2}{3}v_1 \quad (11)$$

$$v'_1 = 0 \quad v'_2 = 0 \quad v'_3 = v_1 \quad (12)$$

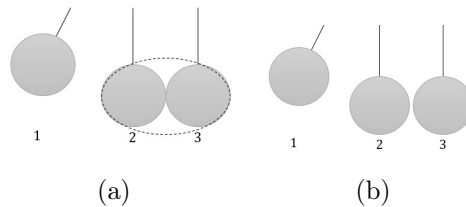


Figura 2: (a) Esferas como um único corpo rígido, (b) Esferas como múltiplos corpos rígidos

Desta forma se faz necessária a proposição de uma alternativa à abordagem tradicional que elimine esta incoerência presente. Uma alternativa possível é o uso de um parâmetro físico apresentado por Brogliato e retomado no artigo *A New Look to an Old Problem: Newton's Cradle* [2, 8], chamado *Impulse Correlation Ratio*.

O *Impulse Correlation Ratio* é definido como $\alpha_i \equiv \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}}$, onde τ_i é o impulso gerado pela

colisão entre as esferas i e $i + 1$.

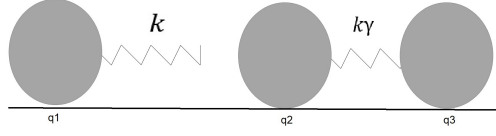


Figura 3: Cadeia de três esferas, exemplo de Brogliato

Na Fig 3, mostra-se um dos mais clássicos exemplos de Brogliato [8]. Pode-se efetuar um desenvolvimento algébrico que culmina no mesmo resultado que o apresentado no artigo [2], conforme a demonstração a seguir:

$$v'_1 = v_1 - \frac{1}{m_1}\tau_2^f \quad v'_2 = v_2^* - \frac{\tau_3^f - \alpha_2\tau_2^f}{m_2} \quad v'_3 = v_3 + \frac{1}{m_3}\tau_3^f \quad (13)$$

onde

$$\tau_2^f = \frac{(1 + \epsilon_2)m_1m_2(v_1 - v_2)}{(1 - \alpha_2)m_1 + m_2} \quad (14)$$

$$\tau_3^f = \frac{[(v_1 - v_2)(1 + \epsilon_2)m_1 + (v_2 - v_3)[m_1(1 - \alpha_2) + m_2]]}{1 + \sqrt{1 - \alpha_2\left(\frac{m_2}{m_3} + 1\right) \left[1 + \frac{v_2 - v_3}{(v_1 - v_2)} \frac{(1 - \alpha_2)m_1 + m_2}{(1 + \epsilon_2)m_1}\right]^{-2}}} \quad (15)$$

$$v_2^* = v_2 + \frac{(1 - \alpha_2)(1 + \epsilon_2)m_1(v_1 - v_2)}{(1 - \alpha_2)m_1 + m_2} \quad (16)$$

C. Modelo *Soft-Sphere* de Hertz

No modelo de Hertz para choques, deixa-se de considerar corpos perfeitamente rígidos, e passa-se a se considerar corpos elásticos. Sendo assim, estes corpos ao se chocarem sofrem compressões.

Para que seja válida, a teoria de Hertz [3, 9, 10] baseia-se em algumas hipóteses, sendo elas: (i) as deformações são pequenas quando comparadas com o corpo todo, e ocorrem

dentro dos limites da elasticidade dos corpos; (ii) as superfícies são contínuas (de ambos os corpos envolvidos no choque), e a área de contato inicial é pontual; (iii) não há atrito nas superfícies.

Visto que tais considerações não se veem absurdas para nosso caso, a teoria de contato de Hertz aparenta ter uma certa consentaneidade, uma certa adequação ao caso com que lidamos. Entretanto, na teoria hertziana há um grande problema no que diz respeito à nossa abordagem: para Hertz, as colisões são sempre elásticas, não havendo assim decaimento na energia mecânica do sistema como observamos. Portanto, adicionamos um termo implementado por Kuwabara [9] que inclui a dissipação, fornecendo, assim, pela 2ª Lei de Newton o que se segue:

$$\ddot{x}_i = \frac{k}{m}(\xi_{i-1,i}^\alpha - \xi_{i,i+1}^\alpha) - \frac{v}{m} \frac{d}{dt}(\xi_i^\alpha) \quad (17)$$

onde \ddot{x}_i é a aceleração da i -ésima esfera, $k = \frac{\sqrt{2RE}}{3(1-\sigma^2)}$, com E sendo o módulo de Young e σ o coeficiente de Poison, $\xi_{j,j+1}$ é a deformação sofrida pela $j + 1$ -ésima esfera decorrente do contato com a j -ésima, tal que $\xi_{j,j+1} = 2R - (x_{j+1} - x_j)$, v é o coeficiente de dissipação viscoso, $\alpha = 3/2$ e ξ_i é a deformação sofrida pela i -ésima esfera decorrente de todos seus contatos, tal que $\xi_i = -3R + (x_{i+1} - x_{i-1})$.

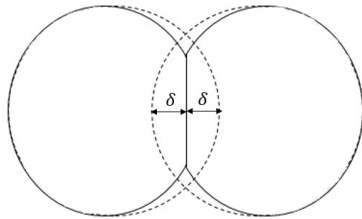


Figura 4: Esferas colidindo e se comprimindo segundo a Teoria de Hertz

Como ilustrado na Figura 4, e explicado acima, para uma cadeia composta de três esferas, temos:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}(2R - (x_2 - x_1))^\alpha - \frac{v}{m} \frac{d}{dt}[(2R - (x_2 - x_1))^\alpha] \quad (18)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k}{m}((2R - (x_2 - x_1))^\alpha - (2R - (x_3 - x_2))^\alpha) - \frac{v}{m} \frac{d}{dt}[(x_3 - x_1 - 3R)^\alpha] \quad (19)$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{k}{m}(2R - (x_3 - x_2))^\alpha - \frac{v}{m} \frac{d}{dt}[2R - (x_3 - x_2)]^\alpha \quad (20)$$

Portanto, para que sejam obtidos resultados significativos por meio dessa abordagem, é preciso resolver, numericamente, um sistema de equações diferenciais acopladas não-homogêneas e não-lineares.

III. DESCRIÇÃO EXPERIMENTAL

A. Equipamentos Utilizados

Para a execução do experimento do Pêndulo de Newton (tanto o de colisões para obtenção de dados relacionados ao decaimento de amplitude quanto os direcionados ao cálculo dos coeficientes de arrasto e de restituição), foram utilizados os seguintes equipamentos: (i) Câmera de celular presa a um tripé, de máxima taxa captura de 240 fps, com uma qualidade de vídeo de 720p ; (ii) Pêndulo de Newton construído no Laboratório de Inovações Tecnológicas do Colégio Etapa/SP, com possibilidade de ajuste de tamanho dos fios, bem como alinhamento, troca e variação de número de esferas (Fig 5(c)), juntamente a um modelo comercial encontrado em uma loja de departamento (Fig 5(a)); (iii) *Tracker*[11], um software de análise de vídeos voltado ao ensino de Física, cujo código é aberto, e possui ferramentas de acompanhamento de trajetórias de objetos demarcados tal como medição de velocidades lineares e angulares, e angulações referentes a um plano definido; (iv) Régua e trenas milimetradas (com incerteza de $0,5 \times 10^{-3}\text{m}$) presas a suportes universais e/ou à estrutura do suporte do Pêndulo para calibração do *Tracker*, possibilitando a conversão da escala de pixels para metros; (v) Paquímetro para medição dos diâmetros das esferas utilizadas; (vi) Balança digital para medição das massas das esferas (com incerteza de 10^{-6}kg); (vii) Mecanismo liberador preso a suportes universais para uniformizar a maneira como as

esferas são soltas para colidir.

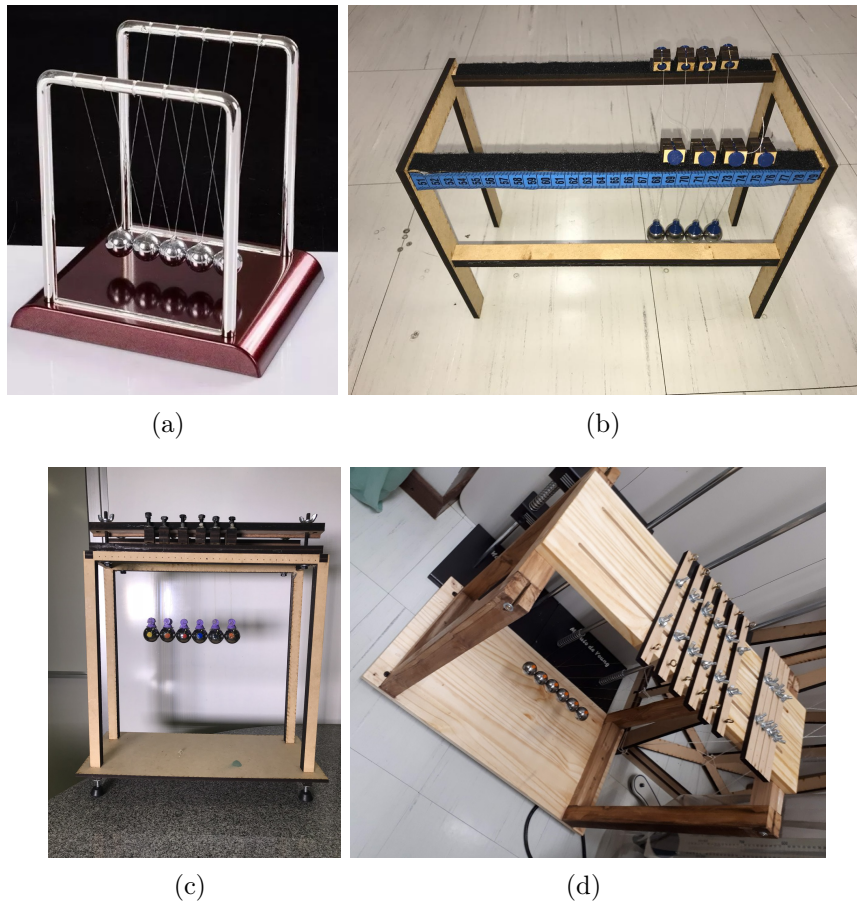


Figura 5: (a) Modelo comercial usado como adorno de mesa, (b) Primeiro Pêndulo de Newton construído pela equipe *Não Sabemos Ainda* do Colégio Etapa/SP, (c) Pêndulo utilizado pela mesma equipe para os experimentos apresentados no IYPT-Brasil, (d) Pêndulo reconstruído para reprodução dos experimentos pela equipe brasileira na fase internacional do IYPT e posterior apresentação como projeto da disciplina F609-Tópicos de Ensino de Física I no IFGW

Foi utilizado o software *Fusion360*[12] para a criação do projeto 3D de algumas versões preliminares da estrutura do Pêndulo. Uma primeira versão, que pode ser vista na Figura 5(b), era muito leve e deslizava sobre a mesa ou quase tombava quando esferas mais pesadas eram colocadas para colidir. Além disso, ela não permitia fixar com precisão a posição das esferas e o comprimento dos fios. A segunda versão, que foi utilizada para os experimentos do IYPT-Brasil e pode ser vista na Figura 5(c), foi desenvolvida tentando eliminar esses problemas tanto com o uso de uma estrutura mais robusta como com a instalação de apoios que permitiam nivelar a estrutura como um todo e também de presilhas

com parafusos que possibilitavam um ajuste fino do comprimento dos fios e da posição das esferas ao longo da cadeia. Entretanto, o reposicionamento de esferas na segunda versão ainda era muito lento e o processo de reposicionar uma esfera frequentemente tirava outras do lugar. Além disso, os parafusos que visavam possibilitar o ajuste fino do comprimento dos fios, enrolando certa porção de fio em torno de si quando girados, frequentemente giravam sozinhos ao serem puxados pelos próprios fios quando esferas mais pesadas eram colocadas. Outra ponto a ser melhorado nesse modelo vinha do fato de que diferentes partes da estrutura haviam sido fixadas com cola e deformações de diferentes partes começaram a fazer a estrutura trincar em alguns pontos ou soltar partes coladas. Ainda que toda a estrutura tivesse sido cuidadosamente projetada via software e as peças cortadas a laser, observou-se, na prática, que essa complexidade não foi necessariamente determinante para a qualidade e confiabilidade do modelo.

Assim, a fim de sanar essas dificuldades, voltar a coletar dados e reproduzir o experimento para a fase internacional do torneio, além de permitir um transporte mais seguro e uma troca de esferas mais ágil para posterior apresentação como projeto final da disciplina F609, foi concebido um terceiro modelo de estrutura. Esse modelo, que pode ser visto na Figura 5(d), além de utilizar pedaços de madeira maciça e parafusos para fixar diferentes partes, o que o torna mais robusto, utiliza um novo esquema para pendurar as esferas que se baseou em um modelo anteriormente usado para demonstrações nas disciplinas do bloco de F609 [13, 14]. Dessa vez, a maior parte da estrutura foi projetada manualmente e cortada com o auxílio de uma serra elétrica de mesa. Nesse esquema as esferas são presas a hastes transversais que, por sua vez, ficam presas ao topo da estrutura. Apenas essas hastes e os pequenos botões por onde os fios de nylon se conectam às esferas foram projetadas com o auxílio de software. As hastes foram cortadas em MDF em uma máquina de corte a Laser e os botões foram impressos em uma impressora 3D.

Parafusos de madeira com cabeça de argola foram utilizados para possibilitar o ajuste fino

do comprimento dos fios, o que evita que as esferas se desalinhem uma vez que esse tipo de parafuso fica mais firme na madeira e não gira quando uma certa tração é aplicada aos fios. Esses parafusos foram fixados nas hastes transversais e essas hastes podiam ser posicionadas ao longo de duas fendas no topo da estrutura e facilmente fixadas com o auxílio de parafusos borboleta, o que pode ser visto na Figura 5(d).

O fio utilizado foi uma linha de pesca de 0,25mm de diâmetro com grande constante de elasticidade e baixa densidade de massa linear, tornando a distensão desta mínima e possibilitando assim a hipótese de fio ideal.

B. Procedimento Experimental

Para realização dos experimentos, a câmera utilizada foi posicionada diante da estrutura de maneira que ficasse em um plano paralelo ao do Pêndulo, enquadrando-o da melhor maneira possível, visando a obtenção de dados por meio do *Tracker*, Fig 6.

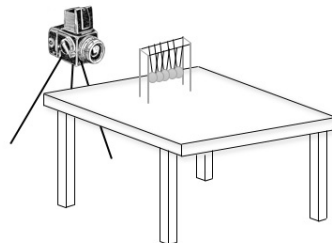


Figura 6: Arranjo experimental esquematizado

Feito isso, após o disparo da filmagem, uma esfera previamente levantada era solta, mantendo o fio que a prende esticado em seu tamanho natural, a fim de evitar pequenas oscilações antes do choque com a esfera adjacente. É importante destacar que a liberação das esferas era realizada de modo a poder considerar sua velocidade de saída praticamente nula. Entretanto, na realização do experimento original, não era possível padronizar o ângulo de soltura e esse procedimento ficava sempre sujeito a eventuais movimentos involuntários da mão. Para contornar isso, foi desenvolvido para a versão mais recente do aparato um

mecanismo de liberação que ficava preso a suportes universais e garras, permitindo seu reposicionamento e a uniformização da maneira como as esferas eram soltas para colidir. Esse mecanismo pode ser visto na Figura 7.

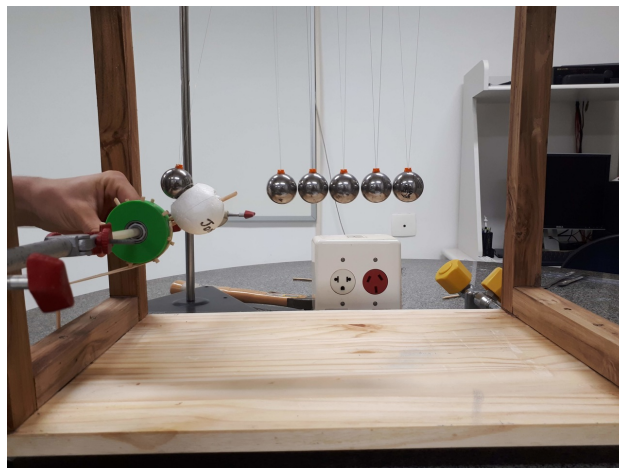


Figura 7: Mecanismo liberador de esferas.

Para obtenção dos coeficientes de arrasto de todas as esferas utilizadas, soltou-se apenas uma esfera sem que houvesse qualquer outra com a qual ela pudesse colidir, e o decaimento da amplitude das oscilações foi analisado no *Tracker*. Entretanto, é possível perceber que a perda de energia para o arrasto é mínima se comparada à perdas de energia nas colisões. De fato, além da perda que seria observada por colisões que não são perfeitamente elásticas, o alinhamento das esferas parece desempenhar um papel importante na evolução do movimento.

Para obtenção dos coeficientes de restituição, solta-se uma esfera que colide com apenas uma outra. Novamente, por meio de uma análise de dados realizada no *Tracker* coleta-se as velocidades de saída das esferas pós-colisão, e por meio de uma manipulação algébrica simples obtém-se o coeficiente de restituição para diferentes tipos de esfera.

Realizando experimentos onde são variados os números de esferas é possível observar o comportamento do sistema e suas respostas ao desalinhamento, por exemplo. Para analisar efeitos do desalinhamento, este, embora seja mais fácil de ocorrer quando há muitas esferas,

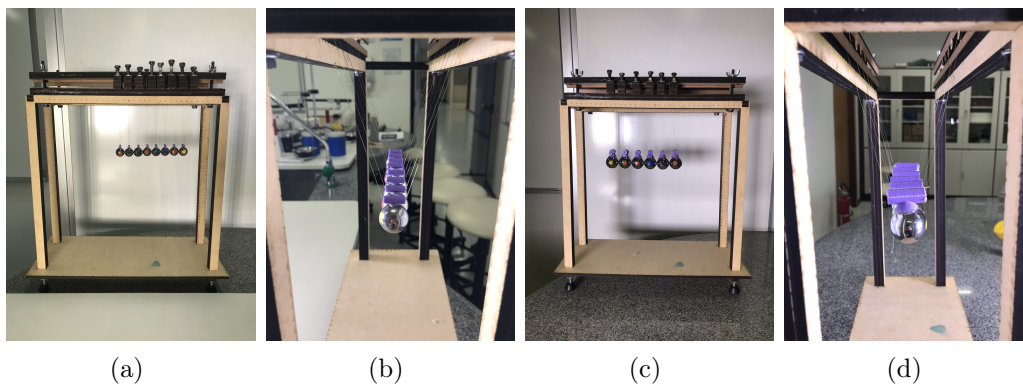


Figura 8: Disposição das esferas de 2 e 3 cm de diâmetro, e seus respectivos alinhamentos no experimento levado ao IYPT-Brasil

pode também ser induzido propositalmente. Variando o material, o tamanho e a massa das esferas, mantendo o alinhamento (Fig 8), pode-se observar a influência desses outros fatores sobre o comportamento observado.

Uma versão simplificada do experimento original será apresentada neste relatório, uma vez que o foco do mesmo é mais direcionado à criação de um experimento didático. Outros experimentos do mesmo bloco de disciplinas já abordaram transferência de momento e energia em colisões entre esferas, seja com um Pêndulo de Newton [13], ou com outros aparatos, como fazendo uma haste girar [15] ou causando a ejeção de uma segunda bola em lançamento horizontal para atingir um alvo [16], por exemplo. Em particular, para a apresentação do experimento no IFGW, no dia 24/06/2019, pretende-se utilizar diferentes combinações de esferas maiores e menores, bem como diferentes números de esferas. Combinações com diferentes números de esferas, seja colidindo ou não colidindo, podem ser utilizadas para propósitos diversos.

Uma única esfera oscilando pode ser utilizada para obter o valor do campo gravitacional local [17] ou para demonstrar a conservação da energia mecânica. Também é possível utilizar o experimento com uma única esfera para observar os efeitos da resistência do ar. Variando, por exemplo, o tamanho e a densidade das esferas, pode-se estudar a dependência

da resistência do ar em relação a esses parâmetros.

Duas esferas oscilando sem colidir, desde que a estrutura seja posicionada sobre um aparato parcialmente móvel, irão entrar em fase depois de um tempo [18], em situação semelhante à que se observa, por exemplo, no caso de metrônimos oscilando em fase após um tempo suficientemente longo quando dispostos sobre uma superfície parcialmente livre para deslizar.

Colocando duas esferas de mesma massa ou de massas diferentes para colidir entre si, previsões simples da teoria de colisões utilizando a conservação do momento também podem ser visualizadas na prática. Pode-se inclusive utilizar esferas revestidas de massa de modelar para estudar o caso de colisões perfeitamente elásticas. Para registrar e analisar as observações, um celular com câmera pode ser posicionado diante da estrutura e, com o auxílio de réguas para calibrar as medidas apropriadamente, é possível extrair rapidamente dados sobre a posição e a velocidade das esferas. Essa análise pode ser feita de forma sistemática utilizando o software *Tracker* para marcar as posições e gerar tabelas de dados e depois, caso seja preciso tratar os dados, basta exportá-los para um software de planilha, como o Excel e, a partir daí utilizar qualquer programa para construção e análise gráfica.

A oportunidade oferecida pelo evento na UNICAMP pode ser utilizada, ainda, para divulgar o torneio IYPT e engajar estudantes e professores na participação em olimpíadas científicas, despertando o interesse pelo aprendizado e ensino de Física Experimental.

IV. DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos pêndulos pode ser iniciada para o caso com apenas uma esfera. Tal experimento é realizado com o intuito de observar o efeito dissipativo causado pelo ar. Entretanto, mesmo para tempos muito maiores do que o que costuma durar o movimento típico de colisões, não se observa um decaimento de amplitude considerável. Para a maior esfera ob-

servada, portanto com a maior área frontal disponível, o que tende a maximizar o efeito da resistência do ar, por exemplo, observou-se uma perda de energia de cerca de 10% em 50 segundos como se vê no gráfico da Figura 9.

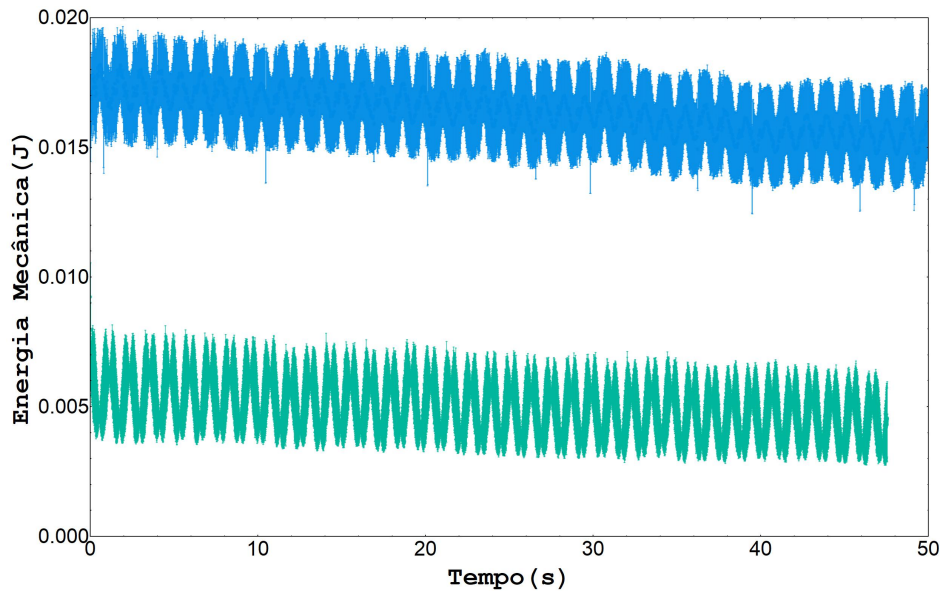
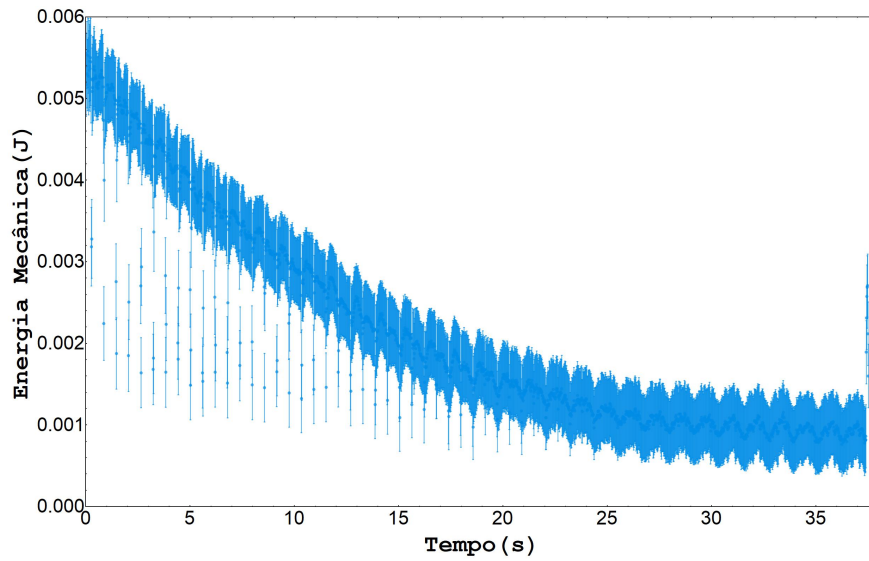


Figura 9: Gráfico da energia mecânica remanescente em função do tempo para duas esferas de aço, uma com raio 1 cm e outra com raio 1,5 cm.

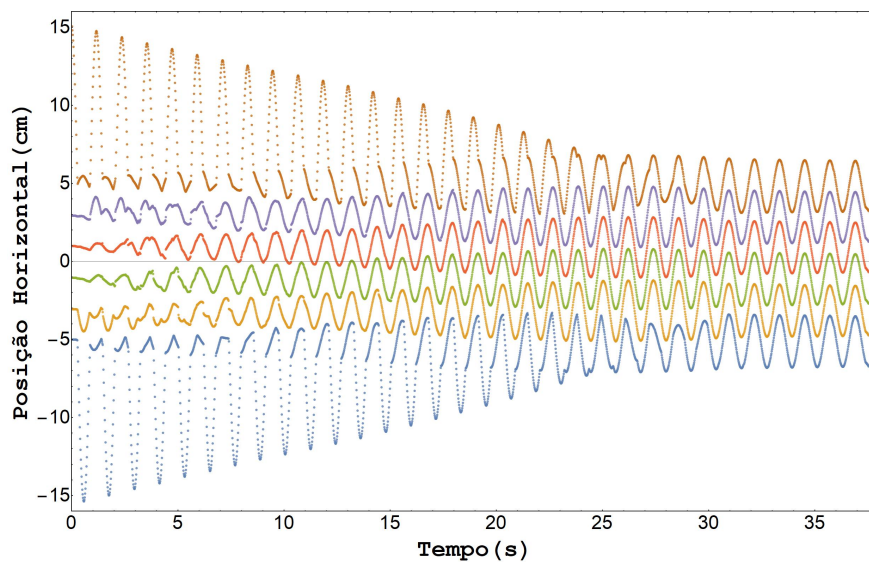
Descobrimos com isso que a dissipação pelo ar beira a zero, sendo de difícil obtenção empírica um valor numérico para o coeficiente de dissipação λ visto que o mesmo é tão baixo.

Em seguida, deve-se tratar as cadeias de duas esferas para obtermos os coeficientes de restituição. Com a análise dos gráficos da Figura 10 pode-se encontrá-lo facilmente.

(preciso terminar de formatar os gráficos para reescrever a análise)



(a)



(b)

Figura 10: Gráficos para uma cadeia de 6 esferas de raio $R = 1$ cm (a) Energia em função do tempo (b) Posição horizontal em função do tempo

V. CONCLUSÃO

Ao longo deste relatório, tratou-se de maneira diversificada a abordagem teórica que explica o movimento do Pêndulo de Newton. Procurou-se apresentar de maneira geral as principais correntes de pensamento acerca dos porquês da ocorrência dos fenômenos. Esse

problema é particularmente interessante, pois permite um aprofundamento teórico mais abrangente, que não será passível de realização no espaço concedido.

Procurou-se trazer à tona conceitos como a mecânica de contato de Hertz, muitas vezes pouco ou jamais abordada em cursos de graduação em Física. Entretanto, devido aos desafios impostos pela exploração da teoria das forças de contato de Hertz e dos modelos de *soft-spheres*, não pudemos abrir mão de atentarmos também aos modelos mais tradicionais de *hard-sphere*.

Na Sec IV foi analisado o decaimento da quantidade de energia no sistema, e decorrente decadência nas amplitudes dos movimentos, o que era o real enfoque deste problema no IYPT, mas também não deixamos de nos atentar a outros fenômenos ligados a ele, como a quebra da linha de ação e o movimento das esferas intermediárias.

(preciso acrescentar o relato da experiência do evento para a versão final)

-
- [1] S. Hutzler, G. Delaney, D. Weaire e F MacLeod, *Rocking Newton's Cradle*, *American Journal of Physics*, Vol. 72, 2004
 - [2] V. Ceanga e Y. Hurmuzlu, *A New Look at an Old Problem: Newton's Cradle*, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, 2001.
 - [3] F. Hermann e M. Seitz, *How does the ballchain work?*, *American Journal of Physics*, Vol. 50, 1982.
 - [4] E. J. Hinch e S. Saint-Jean, *The fragmentation of a line of balls by an impact*, *The Royal Society*, 1999.
 - [5] F. Hermann e P Schmazle, *American Journal of Physics*, Vol. 49, 1981.
 - [6] C. M. Donahue, C. M. Hrenya, A. P. Zelinskaya e K. J. Nakagawa, *Newton's cradle undone: Experiments and collision models for the normal collision of three solid spheres*, *Physics of Fluids*, Vol. 20, 2008.
 - [7] V. Acary e B. Brogliato, *Concurrent Multiple Impacts Modelling: Case-Study of a 3-Ball Chain*,

- HAL*, 2003.
- [8] B. Brogliato, *Nonsmooth Impact Mechanics: Models, Dynamics and Control*, Springer, Vol. 220, Capítulos 4 e 5, 1996.
- [9] G. Kuwabara e K. Kono, *Restitution Coefficient in a Collision between Two Spheres*, *Japanese Journal of Physics*, Vol. 26, 1987.
- [10] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985.
- [11] OSP Project. (2009). Tracker: Video Analysis and Modeling Tool (versao 5.0.7) [Software]. Disponível em: <http://physlets.org/tracker>.
- [12] Autodesk. Fusion 360: Free 3D CAD, CAM, and CAE software for students and educators [Software]. Disponível em: <http://www.autodesk.com/products/fusion-360/students-teachers-educators>.
- [13] C. F. Orsi, *Pêndulos de Newton*, Relatório da disciplina F809, UNICAMP, 2002. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/962020_Carla_pendolo_newton.pdf.
- [14] Jose Lunazzi, Canal do YouTube. Vídeo publicado em 7 de out de 2011. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=Ha8tWH80z4M>.
- [15] N. D. Nadai, *Transferência de Energia e Momento em Processos de Colisão*, Relatório da disciplina F609, UNICAMP, 2007. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2007/NataliaD-Aguiar_F609_RF2.pdf
- [16] I. L. Degasperi, *Colisões Frontais e Cinemática do Lançamento Horizontal*, Relatório da disciplina F609, UNICAMP, 2012. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F609_2012_sem1/IvanL-Marques_RF2.pdf
- [17] R. R. R. da Silva, *Medindo a Aceleração da Gravidade Terrestre Através de um Pêndulo*, Relatório da disciplina F809, UNICAMP, 2005. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2005/RafaelR-Raggio_F809_RF1.pdf
- [18] Jose Lunazzi, Canal do YouTube. Vídeo publicado em 4 de nov de 2013. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=gDzESCWm-Cs>