Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Física Gleb Wataghin - IFGW

RELATÓRIO FINAL

F 609 - Tópicos de Ensino de Física I
Professor José Joaquim Lunazzi

COMO SE MEDIA A DISTÂNCIA ATÉ O SOL

ALUNA: Andressa Cristina Silva Ferreira RA 059034
E-mail: and_poli@yahoo.com.br

ORIENTADORES: Carola Dobrigkeit Chinellato (IFGW/UNICAMP) e Ramachrisna Teixeira (IAG/USP)
E-mail's: carola@ifi.unicamp.br **e** teixeira@astro.iag.usp.br

Campinas, 09 de novembro de 2008.

Sumário

Resumo

A curiosidade humana nos leva a descobrir muitas maneiras de contornar dificuldades e resolver problemas. Neste experimento veremos a metodologia utilizada por Aristarco de Samos há mais de 2000 anos para obter uma primeira explicação de algumas características do sistema Solar e estimar distâncias entre a Terra e determinados astros. Aqui utilizaremos conceitos básicos de trigonometria e o movimento da Lua para explicar como se determinou o primeiro valor da distância da Terra ao Sol.

Introdução

Este trabalho tem como ponto chave as origens do conhecimento astronômico que teve seu início como ciência na época dos gregos antigos. Entre outros feitos, eles conseguiam realizar medidas importantes e estimar distâncias entre alguns astros utilizando equipamentos rústicos, matemática básica e a observação do céu. Hoje temos técnicas avançadas para medir essas distâncias e sabemos com uma maior precisão a maioria das medidas aqui colocadas.

Contudo nesta ocasião preservaremos a origem dessa ciência que se ampara no domínio do pensamento analítico e utilizaremos suas metodologias para reproduzir essas observações e tentar entender o pensamento científico da época.

Idéia do Experimento

Nossa proposta foi elaborar e construir uma miniatura do Sistema TERRA-SOL-LUA tendo como destaque a dinâmica de formação dos ângulos entre os três astros (Sol, Lua e Terra) e suas distâncias relativas. Não serão considerados, no entanto, os diâmetros relativos, as órbitas elípticas e os movimentos de rotação e translação da Terra.

Com essa amostra teremos a visualização do triângulo retângulo formado pelo sistema quando a Lua se encontra nas fases quarto-crescente e quarto-minguante. Nessas fases o vértice da Lua, no nosso triângulo imaginário, possui um ângulo de 90° sendo esse fato de extrema importância para a elaboração do método de Aristarco.

Metodologia

O procedimento será medir no modelo a distância relativa Terra-Lua com uma régua e o ângulo no vértice da Terra com um transferidor.

A medida da distância Terra-Lua será simples, apenas aproxima-se uma régua da base da maquete onde se encontra a Terra e a Lua e mede-se qual a separação entre o centro da Terra e o centro da Lua. Um pouco mais complicado é obter o valor do ângulo no vértice da Terra. Isso se faz manipulando o braço de rotação da Lua e observando qual o momento em que o elástico que está preso ao eixo da Lua está exatamente sobre a marcação em sua base o que indica que há 90º nesse vértice. Nesta posição coleta-se o valor indicado no transferidor que indica o ângulo no vértice da Terra.

Possuindo um valor de cateto e dois valores de ângulos (90º e α), consegue-se calcular a distância Terra-Sol como obtida há mais de 2000 anos atrás.

Importância didática do trabalho

A importância deste experimento é mostrar ao público como se calculou a distância Terra-Sol utilizando algumas facilidades proporcionadas pela configuração do sistema quando no quarto-crescente ou quarto-minguante da Lua. Como não necessita de cálculos avançados, ele é de fácil aplicação e viabiliza sua execução até em séries do ensino médio.

Fica inviável para nossos objetivos esperar fazer a dinâmica do sistema Solar para que pudéssemos acompanhar a metodologia de Aristarco. Portanto, esse modelo manipulável deve alcançar a descrição de alguns pontos cruciais como se estivéssemos observando os fenômenos de fora do sistema. A idéia da maquete é improvisar um sistema Solar manipulável visualizando a geometria e trigonometria do sistema e fazendo entender o porquê de podermos obter as grandezas descritas.

Através desse projeto espera-se despertar o interesse das pessoas pela astronomia e estimular a busca pelo conhecimento, ensinar algumas relações trigonométricas em triângulos retângulos, aplicá-las, mostrar e ensinar as fases da Lua como conseqüência da mudança na configuração do sistema Terra-Sol-Lua.

Originalidade

Esse caráter de pensar extrapolando os limites do céu foi idealizado pelo astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.), um dos primeiros a propor um sistema heliocêntrico e o pioneiro em elaborar os cálculos para se estimar o valor da distância até o Sol. Esta grande inovação para a época foi arquitetada e executada por ele, que realizou as medidas e chegou a um valor para a distância Terra-Sol em termos da distância Terra-Lua.

Deste modo este experimento não é inédito sendo utilizado como referência em muitos livros e sites na internet. No entanto, a diferença aqui é que elaboramos uma maquete fundamentada no que se observaria de fora do sistema assim como foi imaginado por Aristarco e confirmado nos dias de hoje.

Lista de materiais

Utilizou-se para a montagem:

- × Bolas de isopor,
- × Tábua de madeira,
- × Elástico de tecido,
- × Tinta de tecido (azul, verde, branca, preta),
- × Pincel;
- × Serra,
- × Régua,
- × Cilindros de metal de 0,5 cm de diâmetro;
- × Arame;
- × Barbante,
- × Furadeira,
- × Porca;
- × Transferidor,
- × Tabelas informativas,
- × Calculadora científica,
- × Massa acrílica;
- × Morsa de bancada;
- × Luminária;
- × Palito de madeira;

Montagem

Para fazer a montagem experimental utilizou-se um cilindro de aço com diâmetro de aproximadamente 0,5 cm que comporta porcas. Fez-se a base de madeira com dimensões 18x18 cm^2 e finalizou-se as imperfeições do suporte com massa acrílica. As esferas de isopor foram pintadas com tinta de tecido para que se identificasse facilmente a Lua e a Terra. Pintou-se algumas peças auxiliares de preto para minimizar a reflexão da luz.

Fez-se um furo no centro da tábua de modo que encaixasse o cilindro. Neste em sua parte superior encontra-se a esfera de maior diâmetro que sustenta o arame no qual se localiza a esfera menor.

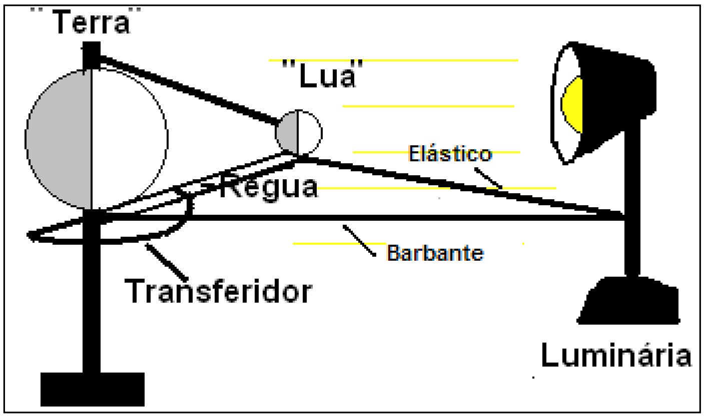


Figura 1 - Esquema para montagem experimental.

Perfurou-se uma régua de plástico e um transferidor para que fossem acoplados ao sistema e marcou-se uma indicação na régua para facilitar a determinação do ângulo reto entre o plano que separa o lado escuro do lado iluminado da “Lua” e os raios de luz.

Foi escolhida uma proporção de 8 centímetros para a distância Terra-Lua (D_{TL}) e uma distância de 2 metros para a luminária (D_{TS}). Como a distância D_{TS} calculada por Aristarco foi de aproximadamente 20 D_{TL}, esta escala é suficiente para alcançar os objetivos propostos. Por isso a maquete deve ser pequena para não fugir muito da escala de distâncias. Aqui não houve preocupação em mostrar proporções de diâmetro porque não é a finalidade do experimento.

Testou-se diferentes intensidades de luz para ver qual a que dá a melhor visualização das sombras na Lua. Ela não pode ser muito forte, pois por reflexões todos os lados da Lua ficam iluminados e não se tem a imagem desejada. E por outro lado, se for muito fraca, a iluminação é insuficiente. Escolheu-se uma lâmpada fluorescente de 5 w que foi a menor potência encontrada que é equivalente a uma lâmpada incandescente de 25 w. A opção por lâmpada fluorescente foi feita pelo fato dela não aquecer com tanta rapidez em relação às incandescentes·

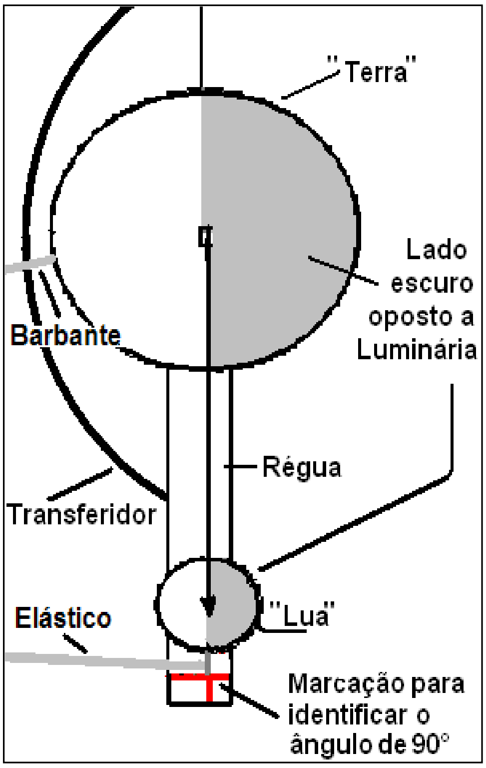


Figura 2 – Imagem vista de cima da montagem.

Nesta montagem é possível ver as fases da Lua em um ambiente escuro e explorar o movimento de translação da Lua em torno da Terra. Pode-se medir a distância Terra-Lua, e o ângulo no vértice da Terra ao longo do movimento. Portanto já se pode calcular a distância Terra-Sol baseada na metodologia de Aristarco.

Dificuldades

Percebeu-se certa dificuldade em medir o ângulo no vértice da Terra com precisão, pois a indicação do momento exato da fase quarto-crescente/minguante é feita por meio de comparação, sob o critério do observador, entre uma marcação e a posição do elástico. Este método exige que o elástico encubra totalmente a marca deixada no "raio de órbita" da Lua, o que realmente acontece, mas há diferenças entre os valores de ângulo encontrados pelo fato de algumas peças estarem folgadas na montagem e modificarem sutilmente a configuração inicial.

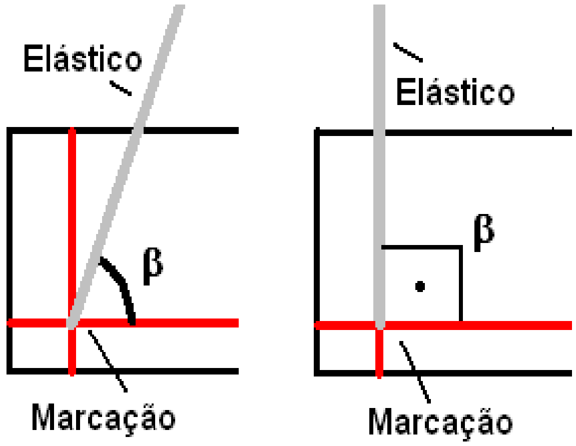


Figura 3 - Esquema de funcionamento da marcação dos 90º no vértice da Lua.

É relevante notar também que a marcação do ângulo é feita por um barbante que tem diâmetro equivalente a 2° do transferidor, isto é, ele mede um intervalo entre 2 valores de ângulo como mostrado na figura 4 tendo uma considerável imprecisão da medida que deve ser levada em conta nos cálculos.

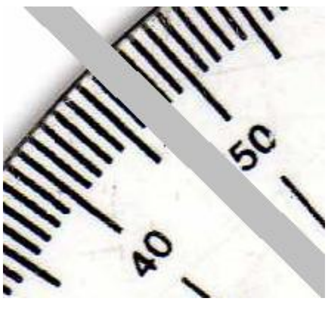
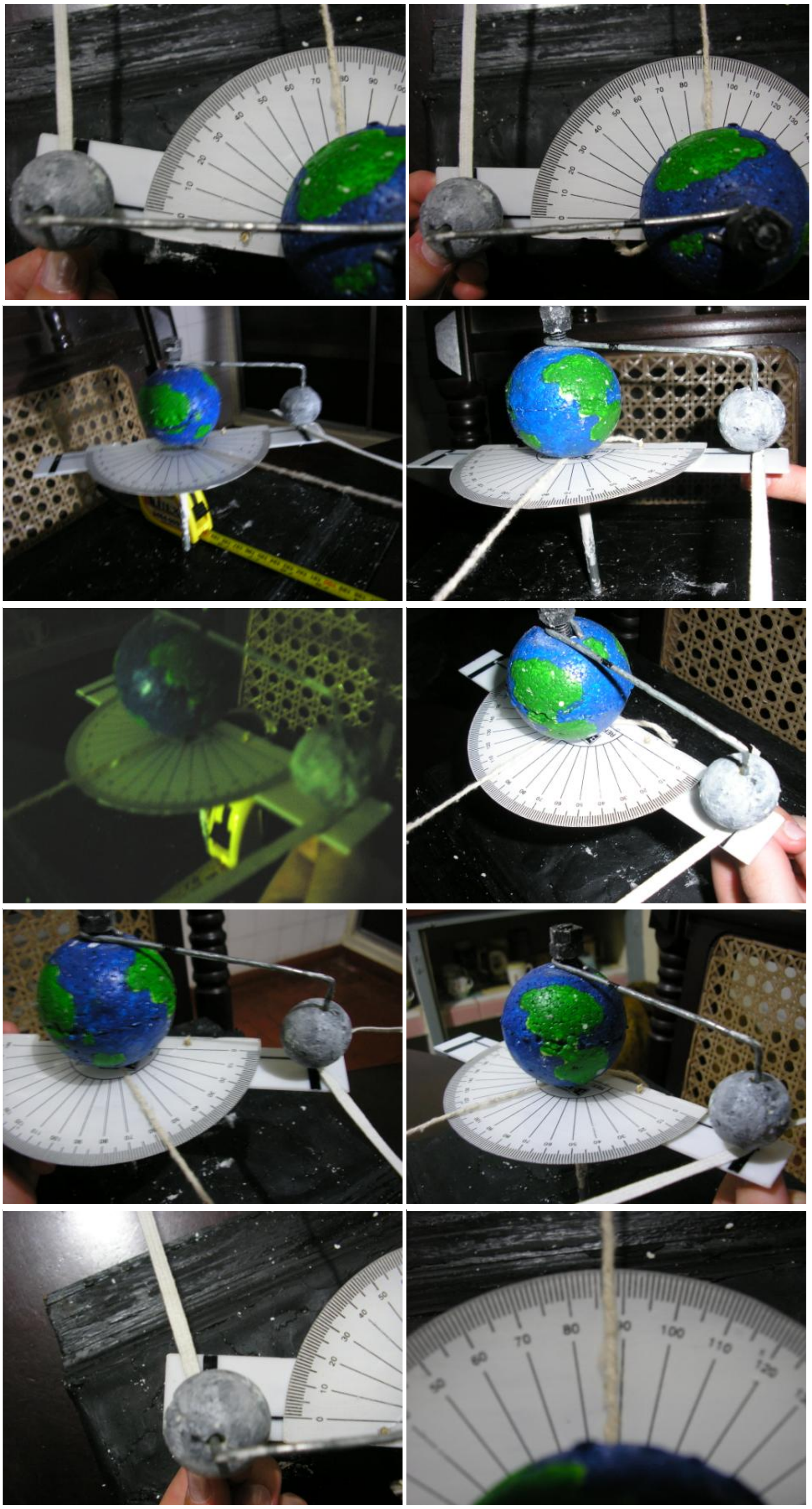


Figura 4 - Imprecisão na medida do ângulo.

É ainda necessário disponibilizar um ambiente escuro para a visualização das fases da Lua, o que é de muita importância para este experimento e que na prática é de difícil visualização.

Fotos do experimento



Teoria do projeto

Introdução à Astronomia Antiga

A astronomia é considerada a mais antiga dentre as ciências por apontar sinais de seu desenvolvimento que datam de 3000 a.C. como, por exemplo, os monumentos de Newgrange e Stonehenge.

Figura 5 - Em Newgrange (à esquerda e ao centro) no Solstício de inverno (dia mais curto do ano) o Sol ilumina o corredor e a câmara central. Já em Stonehenge (à direita) no dia mais longo do verão (Solstício) a avenida principal que sai do centro do monumento coincide com a direção onde o Sol nasce.

A maior parte da astronomia antiga foi desenvolvida na Grécia entre 600 a.C. a 400 d.C. só superada no século XVI pela ciência produzida por: Copérnico, Tycho Brahe, Johannes Kepler e Galileu Galilei que não serão abordados aqui.

Os gregos herdaram muitos conhecimentos astronômicos de povos como os chineses, babilônios, assírios e egípcios e a partir disso foram desenvolvendo seu próprio conhecimento. Vejamos alguns importantes nomes da astronomia clássica e seus feitos:

Pitágoras de Samos (~572 - 497 a.C.) acreditava na esfericidade da Terra e da Lua. Achava que todos os astros ficavam em esferas celestes separadas e que giravam em torno da Terra. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

Esfera celeste é uma esfera imaginária que envolve a Terra e onde se acreditava que se encontravam as estrelas e os astros incrustados. Imaginava-se que ela girava em torno de um eixo cujos pontos extremos eram chamados de pólos celestes.

Figura 6 - Imagem mostrando o movimento das estrelas em torno de um pólo celeste.

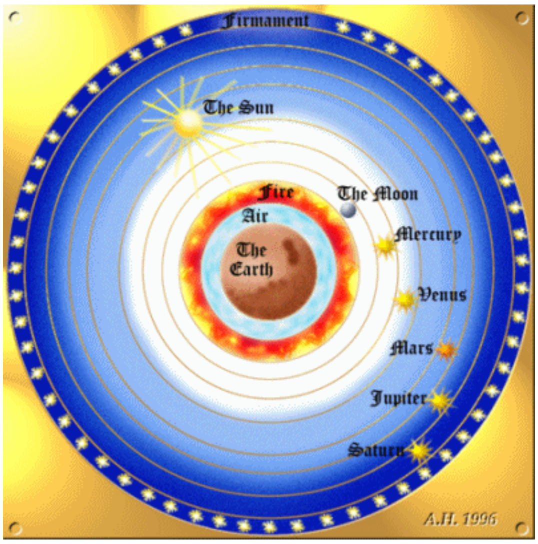


Figura 7 - Esfera Celeste imaginada pelos gregos antigos.

Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) explicou que as fases da Lua dependem da quantidade da face iluminada da Lua que está voltada para a Terra. Explicou que um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol e que um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. Afirmava que o Universo é esférico e finito.

Heráclides de Pontus (388-315 a.C.) propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo e que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro a propor a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua.

Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.), bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra.

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã. Hiparco deduziu corretamente a direção dos pólos celestes, o valor de 8/3 para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e que a Lua estava a 59 vezes o raio da Terra de distância quando o valor correto é 60. Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos.

Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.) (Claudius Ptolemaeus) foi o último astrônomo importante da antigüidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. Ele fez uma série de treze volumes sobre astronomia, o Almagesto, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia. A maior contribuição de Ptolomeu foi uma representação geométrica do sistema geocêntrico que permitia predizer o movimento dos planetas com considerável precisão e que foi usado até o século XVI.

O grego mais importante para nosso estudo é, sem dúvida, Aristarco de Samos em quem nos baseamos para a elaboração do projeto e do experimento. Quando se fala de medida de distâncias entre os astros celestes e a Terra, é notável encontrar em referências pela internet e livros o nome deste grego que trataremos mais em detalhes ao longo deste trabalho.

Quem foi Aristarco de Samos

Aristarco viveu entre 310 a.C. e 230 a.C. no reinado dos três primeiros Ptolomeus, foi aluno de Strato de Lampsacus, que liderava o Liceu Aristotélico, passou a maior parte da vida em Alexandria onde foi professor no Museu e ali publicou suas obras. Revolucionou tanto a astronomia que uma cratera lunar recebeu seu nome.

Aristarco foi o primeiro a acreditar no sistema heliocêntrico e a explorar a dinâmica dos movimentos dos astros a partir desta perspectiva. Sua única obra conhecida é "*Sobre os tamanhos e distâncias entre o Sol e a Lua",* que trata da geometria e dos cálculos dos diâmetros do Sol (D_S) e da Lua (D_L) estimados em função de diâmetros terrestres (D_T), e a distância da Terra ao Sol (D_{TS}) em função da distância Terra-Lua (D_{TL}) que ele também mediu.

Figura 8 - Estátua de Aristarco na Universidade Aristóteles de Salônica / Grécia.

Antes de entrarmos em detalhes sobre a metodologia de Aristarco vejamos os artifícios utilizados para a determinação de algumas constantes e a familiarização de conceitos importantes empregados por ele.

Forma e posição da Terra

Apesar dos astrônomos da época terem colocado a Terra no centro do universo em seus modelos, Aristarco acreditava que o Sol é que estava no centro e todos os outros astros giravam em torno dessa estrela em órbitas circulares. A obra que contém a descrição desse movimento heliocêntrico foi perdida. Restam-nos apenas referências desta obra em escritos de Arquimedes. Em seu livro “O Contador de areias” escreve:

> *“Aristarco de Samos publicou um livro que consistia em algumas hipóteses cujas premissas conduzem ao resultado de que o Universo é muitas vezes maior do que aquilo a que agora se dá esse nome. As suas hipóteses são que as estrelas fixas e o Sol se mantêm imóveis, que a Terra gira em torno do Sol na circunferência de um círculo, com o Sol situado no meio da órbita, e que a esfera das estrelas fixas, situada aproximadamente com o mesmo centro que o Sol é tão grande que o círculo em que ele supõe que a Terra gira está para a distância das estrelas fixas na mesma proporção que o centro da esfera está para a superfície.”*[1]

Segundo Arquimedes, os astrônomos contemporâneos de Aristarco tinham hipóteses que refutavam a teoria heliocêntrica, acreditavam que a Terra era o elemento mais pesado do Universo e por isso estava no centro. Ptolomeu partilhava do pensamento geocêntrico e descreveu sua afirmação apresentando o seguinte argumento: “Uma roda que roda possui uma força centrífuga tanto mais intensa quanto maior for a velocidade; se a Terra girasse em 24 horas como alguns tinham proposto, os pontos de seu equador girariam a uma velocidade fantástica e os seres, as casas, as pedras, as águas seriam lançadas nos ares; o próprio Solo saltaria em estilhaços” [1]. Também se apresentava o argumento de que, se ocorresse o movimento de translação da Terra, haveria o fenômeno de paralaxe**,** o que não era observado na ocasião. Aristarco explica tal ausência tomando a esfera celeste como tendo um raio tão grande que não era possível captar esse efeito. Atualmente se sabe que a imprecisão dos instrumentos não permitia a realização dessa medida que é muito sutil e que não se aplica a qualquer estrela.

Outra razão para duvidar do heliocentrismo é a imposição da igreja que, baseada na Bíblia, argumentava pelo Salmo 104:5 do Antigo Testamento que diz: *Deus colocou a Terra em suas fundações, para que nunca se mova*.

Apesar de ser contrariado, Aristarco se manteve confiante em suas hipóteses e continuou seu estudo sob essa perspectiva.

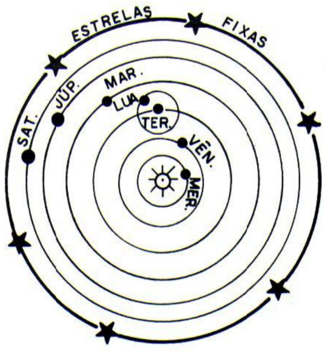


Figura 9 - Esquema do Universo suposto pelos antigos.

Passados séculos, Kepler descobriu que as órbitas não são circulares, mas sim elípticas com o Sol em um de seus focos. Como se pode ver na figura 10, algumas órbitas têm excentricidade pequena e por isso podem ser convenientemente aproximadas por uma circunferência para efeito de cálculo.

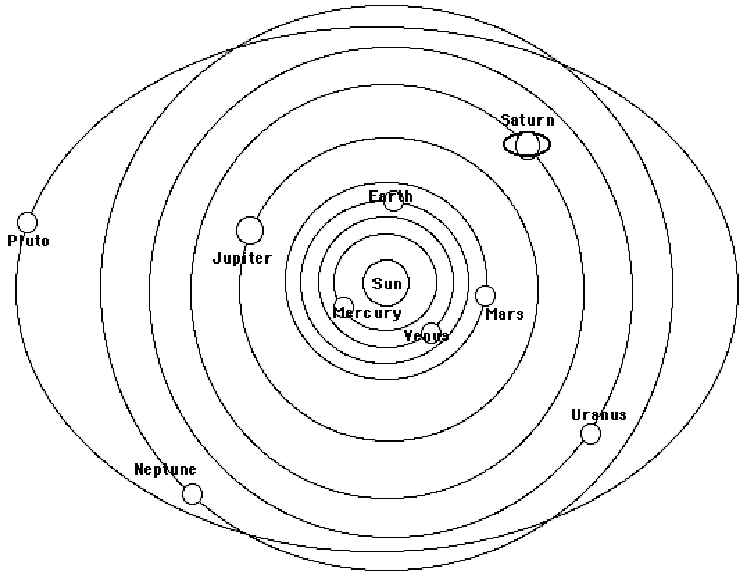


Figura 10 – Esquema do Sistema Solar como conhecido hoje.

Outro conceito utilizado por Aristarco foi o de que a Terra é esférica. Esta proposta vem da escola pitagórica por volta do séc. 6 a.C. e também Aristóteles afirma que a Terra assim o é devido à sombra circular projetada na Lua, durante eclipses lunares. Ptolomeu refuta a hipótese de a Terra ser plana explicando: “Se a Terra fosse plana de este a oeste, as estrelas nasceriam simultaneamente para os ocidentais e para os orientais, o que é falso. Além disso, se a Terra fosse plana de norte para sul e vice-versa, as estrelas visíveis para qualquer pessoa continuariam a sê-lo qualquer que fosse o local para onde essa pessoa se deslocasse, o que é falso. Mas parece plana para a visão humana porque é muito extensa” [1].

Foi necessário esperar vários séculos para que a esfericidade da Terra fosse aceita e, só em 1686, Newton mostrou matematicamente que a Terra não era uma esfera, pois tinha um achatamento nos pólos. Esse achatamento é pequeno, correspondendo a um desvio de 0,3% da forma esférica.

Conhecemos presentemente que a forma da Terra tem uma complexidade maior para descrevê-la matematicamente como, por exemplo: um esferóide achatado ou uma elipsóide achatada, utilizando harmônicos esféricos ou aproximações locais em termos de elipsóides de referências. No entanto tais termos não serão apropriados neste trabalho podendo-se, portanto, aproximar a Terra a uma esfera sem grandes perdas.

Figura 11 - Foto da Terra vista do espaço.

Determinando o diâmetro da Terra

O diâmetro da Terra já era conhecido na época, pois Eratóstenes (275-195) o havia calculado. Este outro grego fascinou o mundo antigo com seu procedimento para o cálculo do diâmetro da Terra na mesma simplicidade com que Aristarco desenvolvia suas idéias.

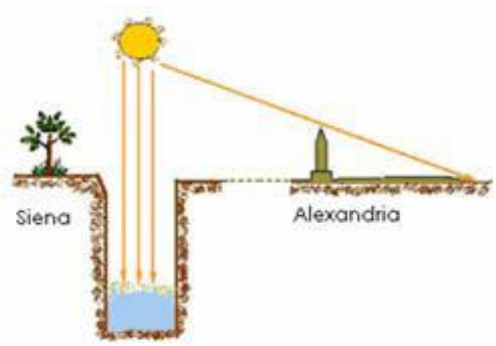


Figura 12 – Visualização do esquema de Erastóstenes.

Eratóstenes valeu-se de seus conhecimentos em geometria e sabia que em determinado dia do ano, no Solstício de verão, ao meio-dia, os raios do Sol entravam verticalmente em um poço bem fundo em Siena, que fica na linha do Trópico de Câncer. Simultaneamente em Alexandria observava-se que os raios faziam um ângulo θ com uma coluna vertical. Tendo como conhecida a distância S entre Alexandria e Siena (cerca de 785 km), que uma volta completa na Terra tem 360º, o ângulo θ = 7,2º, e sabendo o comprimento da circunferência $2\pi R$, se tem:

360º ———— x   x = 785 x 360 / 7,2

7,2º ___785 km   x = 39250 km de circunferência.

39250 km = $2\pi R$ R = $39250/2\pi$ **R = 6.247 km.**

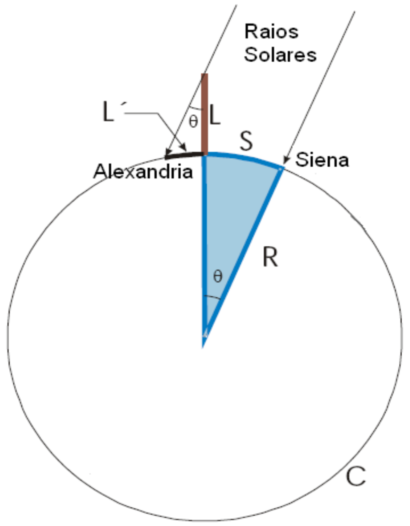


Figura 13 - Visualização da formação dos triângulos.

Erros cometidos por Eratóstenes

À primeira vista temos os erros de compatibilidade como: a distância entre Alexandria e Siena é de 729 km e não 800 km; a diferença angular θ é de 7,08º e não 7,2º e as duas cidades não estão no mesmo meridiano.

Estatisticamente o erro associado ao cálculo do raio da Terra é dado pela equação[22]:

$$\Delta R = \frac{S \cdot \Delta\theta + \theta \cdot \Delta S}{\left(\theta^2 - \Delta\theta^2\right)}$$

ΔR = 0,303.R = 0,303 x 6247 = 1.893 km.

Esta equação leva em conta o erro da medida do ângulo, da distância e a relação: R = S / θ. Para mais detalhes da demonstração deste cálculo ver [22].

Então o valor do raio da Terra considerando o erro associado às medidas é:

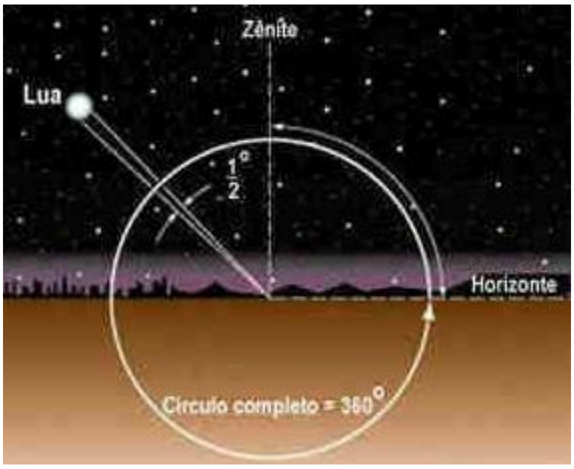
R = 6.247 $\pm$ 1.893 km.

O valor do raio da Terra adotado atualmente é de 6378 km que está na faixa de valores encontrados acima. Este cálculo tem um erro de mais de 30% sobre o valor calculado, o que implica que as medições de Eratóstenes foram quantitativamente ruins, porém sua metodologia e análise qualitativa são excelentes estando de acordo com os objetivos propostos pelo trabalho.

Não entraremos muito em detalhes sobre a metodologia de Eratóstenes e seus erros, pois não é a intenção deste relatório. Apenas introduzimos seu feito para contextualizar como se desenvolveu este conhecimento e mostrar que apesar de hoje sabermos de seus erros, em seu tempo eram valores extremamente importantes e inéditos.

Distância e diâmetro da Lua

Outra constante fundamental para Aristarco é a distância da Terra a Lua (D_{TL}). O método por ele utilizado consiste em primeiramente determinar o diâmetro da Lua (D_L). Fez-se isso a partir do tamanho angular que ela apresenta vista por um observador na Terra.



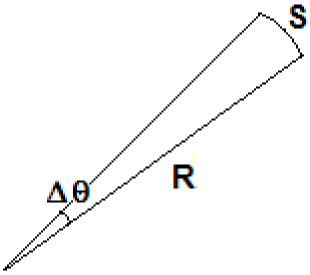


Figura 14 – a) Tamanho angular da Lua vista da Terra. b) Desenho de um arco de circunferência.

Sendo esse ângulo = 0,5º, por regra de três tira-se:

0,5º ——— x

180º ——— π   x = π/360 (rad).

Utilizando o método do cálculo de comprimento do arco de uma circunferência obtemos:

$S = R \times \Delta\theta$, $D_L = D_{TL} \times \Delta\theta \rightarrow D_{TL} = D_L / \Delta\theta = 360.D_L/\pi$.

$$\mathbf{D_{TL} = 114{,}6.D_L}$$

Observou-se que, durante o eclipse, a Lua avançava o equivalente ao seu diâmetro a cada hora e que a duração de um eclipse é de no máximo 3,5 horas, portanto a Lua anda o equivalente a 3,5 D_L durante o eclipse. Olhando para a figura 15, pode-se encontrar duas retas paralelas que saem da Terra e que simbolizam a projeção de sua sombra. Podemos então dizer que o trajeto que a Lua percorre dentro da sombra é aproximadamente o diâmetro da Terra.

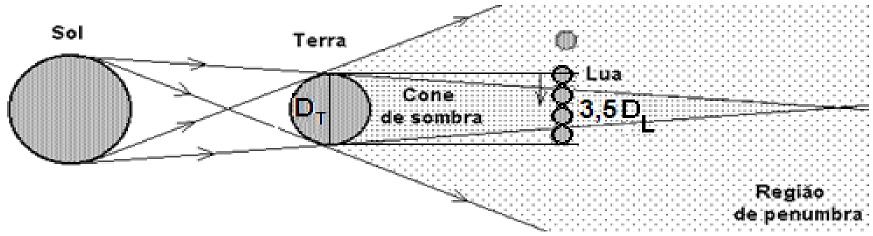


Figura 15 - Esquema idealizado para o cálculo do diâmetro da Lua.

Conclui-se então que o diâmetro da Terra é 3,5 vezes maior que o da Lua:

$D_L = D_T / 3,5$ $\quad$ $D_L = 2 \times 6247 / 3,5$ $\quad$ **D_L = 3.569 km,**

e utilizando esse valor calcula-se:

$D_{TL} = 114,6\ D_L,$ $\quad$ $D_{TL} = 114,6 \times 3569,$ $\quad$ **D_{TL} = 409.089 km,**

Os quais têm a mesma ordem de grandeza dos valores encontrados na literatura. Para o valor da distância Terra-Lua temos 384.400km e para o diâmetro da Lua temos 3.476 km.

A Lua e suas fases

A Lua é o satélite natural da Terra, isto é, o astro que orbita nosso planeta. Ao contrário dos satélites artificiais, supõe-se pela teoria do Big Splash que a Lua é o resultado de uma colisão da Terra primitiva com um planeta do tamanho de Marte chamado Theia. Por efeito Theia teria sido destruído e forçado a expulsão de um pedaço de rocha líquida da Terra do qual se formou a Lua. A Lua também é conhecida como Luna pelos romanos, Selene e Ártemis pelos gregos.

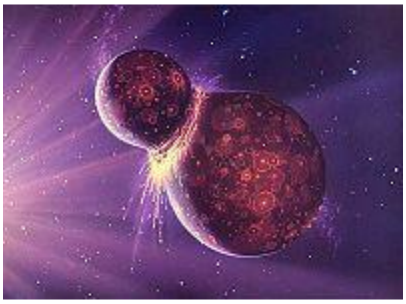


Figura 16 - Formação da Lua segundo o Big Splash.

A Lua possui um lado oculto que nunca se mostra para a Terra. Isso se explica pela rotação da Lua estar em fase com seu movimento de translação, de modo que o mesmo lado está sempre voltado para a Terra, como se vê na figura 17. O lado oculto da Lua era completamente desconhecido até ter sido fotografado pela sonda soviética Luna3 em 1959.

Vista da Terra, a Lua apresenta variação de luminosidade, o que chamamos de fases. Já se sabia desde Aristóteles (384 - 322 a.C.) que as fases da Lua são os resultados das reflexões da luz Solar pela superfície lunar sendo a Lua um corpo não luminoso. Esta luz incide em sua superfície e é refletida pela face iluminada cujo plano é perpendicular à reta que liga o centro do Sol ao centro da Lua. Portanto a face iluminada da Lua é aquela que está voltada para o Sol. As fases da Lua representam o quanto dessa face iluminada está voltado para a Terra.

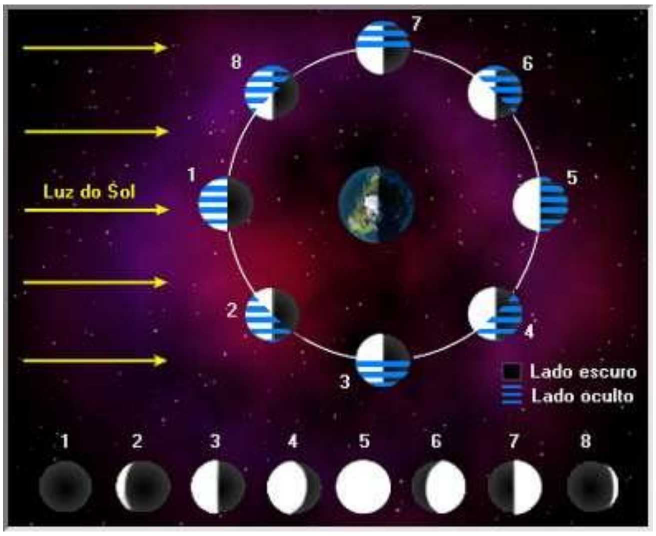


Figura 17 - Fases da Lua e lado oculto.

As figuras 17 e 18 mostram uma visualização das fases da Lua que consideram os raios Solares paralelos, ou seja, como se o Sol estivesse a uma distância infinita da Terra. No entanto se verá ao longo deste trabalho que, o Sol não está no infinito e as principais fases da Lua não estão, como é mostrado nessas figuras, geometricamente separadas de exatos 90º. Quando voltarmos a essas propriedades na seção "Calculando a distância da Terra ao Sol" comentaremos mais sobre isso.

As fases da Lua têm um período de repetição de 29,5 dias denominado mês sinódico, ou lunação, ou período sinódico da Lua, que é o tempo médio entre duas Luas Novas sucessivas. Durante esse tempo há 4 fases principais: a crescente (**2,3,4**), a minguante (**6,7,8**), a cheia (**5**) e a nova (**1**). Veja as indicações numéricas na figura 17.

Lua Nova

Quando a Lua está nessa fase, ela e o Sol estão na mesma direção, portanto não há face iluminada voltada para a Terra. A Lua nasce aproximadamente às 6 horas e se põe às 18 horas, ficando no céu durante o dia. Conforme passam os dias, ela fica cada vez mais a leste do Sol sendo crescentemente mais iluminada, chegando à fase Quarto-Crescente em uma semana.

Lua Quarto-Crescente

Nesta fase a Lua está 50% iluminada do lado oeste e está a leste do Sol. Ela nasce ao meio-dia e se põe à meia-noite. Apresenta uma forma semicircular e a Terra e o Sol, vistos da Lua, estão separados de exatos 90°. A fase crescente da Lua pode ser facilmente identificada do Hemisfério Sul pela forma aparente da Letra "C", enquanto que para o Hemisfério Norte sua forma lembra um "D". Depois de alguns dias a, luminosidade aumenta até a fase Cheia.

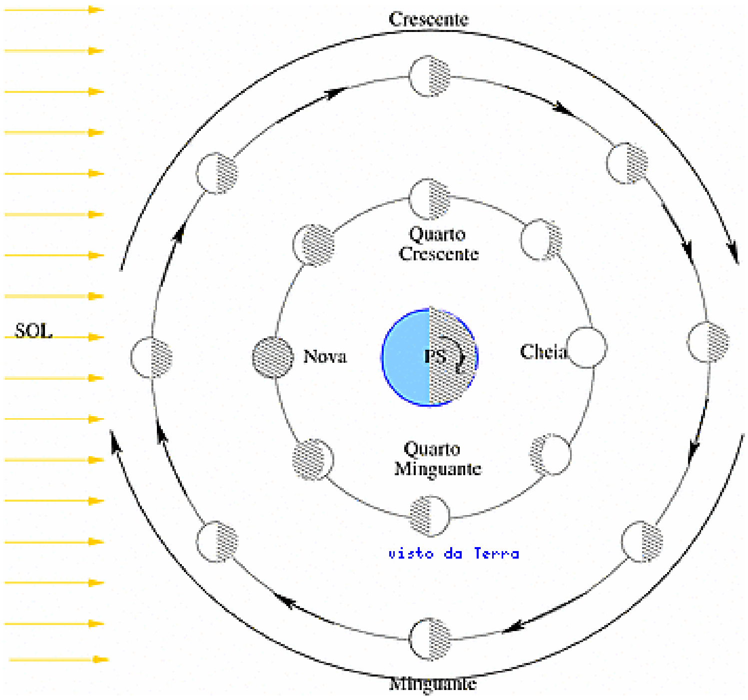


Figura 18 - Posições relativas da Terra, Lua e Sol.

Lua Cheia

Aqui temos o oposto da Lua Nova. A Lua Cheia tem sua face completamente iluminada e vista da Terra, ela e o Sol estão separados de 180°. A Lua nasce às 18h e se põe às 6h do dia seguinte.

Depois da fase cheia, a luz refletida pela Lua vai diminuindo sua intensidade e ficando mais escura até a próxima fase, o Quarto-Minguante.

Lua Quarto-Minguante

Com 50% da face iluminada, a Lua está a oeste do Sol e tem a forma de um semicírculo. Oposto à fase quarto-crescente, a Lua nasce à meia-noite e se põe ao meio-dia. Da mesma forma, nessa fase a Terra e o Sol são vistos da Lua separados de 90º.

Nos dias subseqüentes a luminosidade aparente da Lua diminui até chegar à Lua Nova onde reinicia o seu ciclo.

Chama-se a atenção para as fases quarto-crescente e quarto-minguante, pois são elas as observadas por Aristarco para o cálculo da distância Terra-Sol. Outro valor que se utiliza é o período sideral da Lua que tem 27,32 dias em que a Lua faz uma volta completa em torno da Terra, em relação às estrelas.

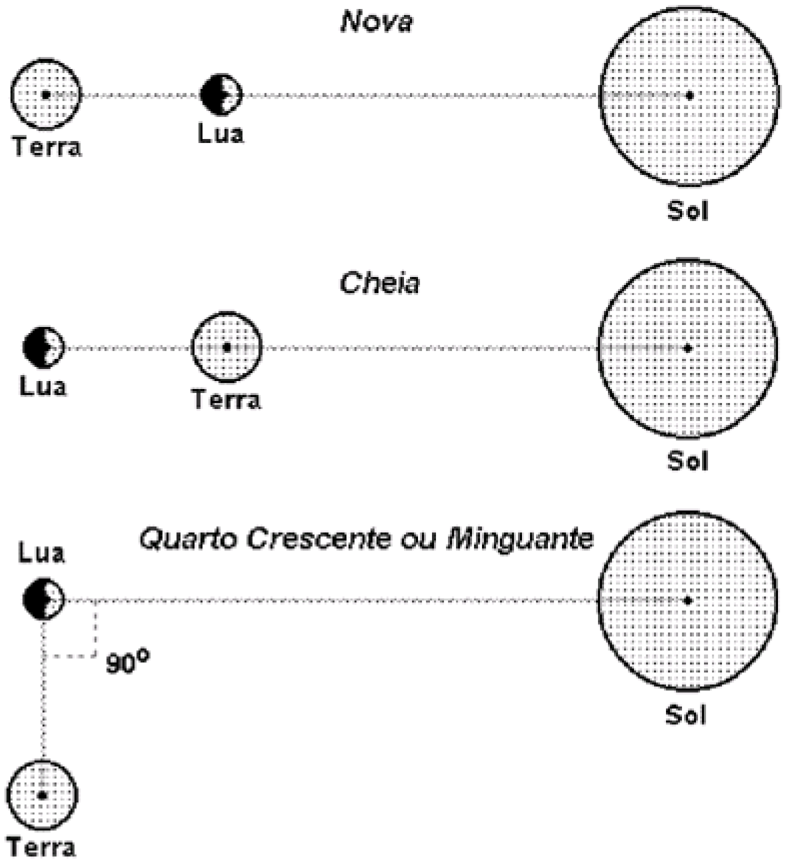


Figura 19 - Outra visualização das Fases da Lua.

Trigonometria

A palavra **trigonometria** vem do grego *trigōnon* "triângulo" + *metron* "medida" e é a área da matemática que estuda os triângulos e as relações entre seus lados e ângulos. Sua origem é incerta, mas sua necessidade se deu por problemas da Astronomia, Agrimensura e Navegações por volta do século IV ou V a.C. com os egípcios e babilônios. Hiparco de Nicéia, entre 180 a 125 a.C., foi denominado "o pai da Trigonometria" pois escreveu doze livros em que apresentou a primeira tabela trigonométrica, herdando a idéia de Hipsicles (180 a.C.) e os conceitos dos babilônios (140 a.C.) de que a divisão do círculo se faz em 360 graus, com cada grau valendo sessenta minutos e cada minuto sessenta segundos.

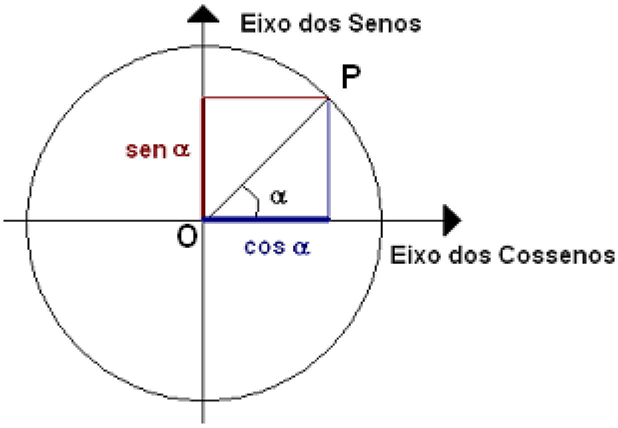


Figura 20 - Círculo Trigonométrico.

As funções trigonométricas são obtidas a partir de triângulos retângulos (que possuem um ângulo de 90º = ângulo reto) e as mais conhecidas são seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg). A representação geométrica dessas relações pode ser vista no círculo trigonométrico que por definição tem raio 1.

Seno

Seno é a projeção do segmento de reta OP, que parte do centro do círculo trigonométrico e vai até a circunferência, no eixo vertical (eixo dos senos) representado na figura 20 pela cor vermelha. Tem valores entre -1 e 1, ou seja, o intervalo fechado $[-1,1]$.

Em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa.

$$\sin A = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Cosseno

Cosseno é a projeção do segmento OP no eixo horizontal (eixo dos cossenos) representado na figura 20 pela cor azul e também varia de -1 a 1 ou $[-1,1]$. O cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente e a hipotenusa.

$$\cos A = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Essas relações foram muito importantes para a determinação numérica alcançada por Aristarco há mais de 2000 anos.

Calculando a distância da Terra ao Sol

Já ciente dos conhecimentos mostrados até aqui, Aristarco esquematizou uma maneira de se calcular a distância Terra-Sol (D_{TS}) a partir de algumas hipóteses que foram:

* O Sol não está no infinito;
* A Lua recebe a sua luz do Sol;
* A Terra está no centro da órbita circular da Lua;
* Quando a Lua está na fase Quarto-Crescente ou Minguante, a reta Terra-Lua é paralela ao plano que divide a Lua nas partes brilhante e escura;

Com isso, Aristarco foi capaz de montar um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice da Lua como na figura 21 e ângulo α no vértice da Terra. Para isso já se sabia que a distância Terra-Sol é finita e que α ≠ 90º.

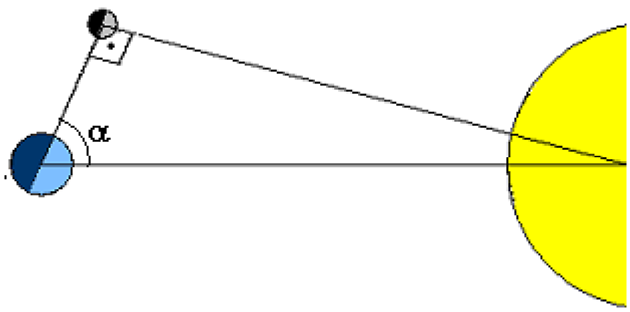


Figura 21 - Triangularização para o cálculo de Aristarco.

No entanto havia o desafio de medir o ângulo α com precisão. Para sua medição direta dever-se-ia observar a separação angular entre a Lua e o Sol durante o dia. Como a observação do Sol é dificultada pela forte radiação que emite e pelo perigo que isso causa aos olhos, elaborou-se um método indireto para estimar o tal valor.

Na figura 22 se vê a verdadeira configuração das posições relativas das fases quarto-crescente e quarto-minguante que não estão separadas de 180º, que difere das descritas nas figuras 16 e 17 e que permite a dedução do valor de α.

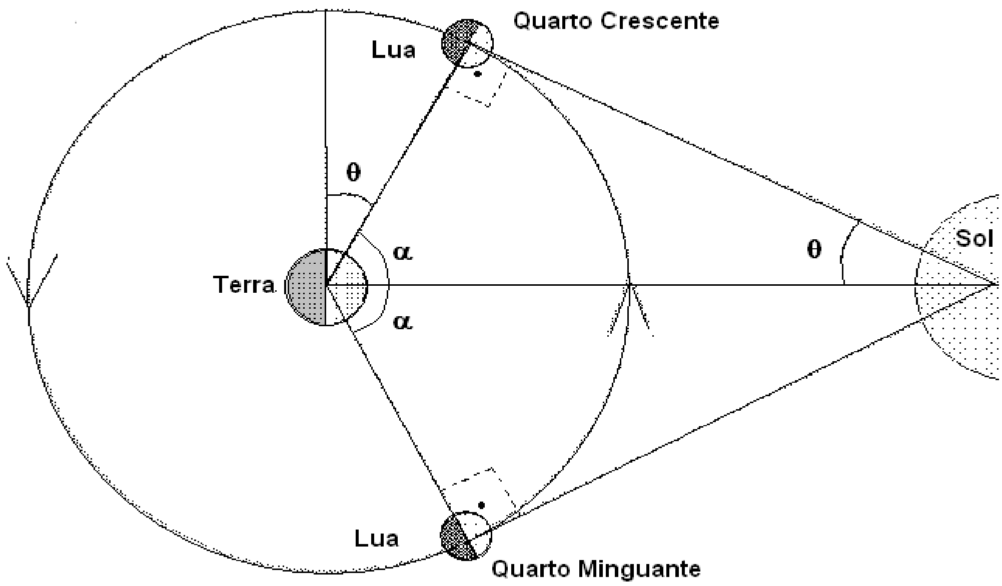


Figura 22 - Esquema para se obter o ângulo α.

Aristarco genialmente utilizou o movimento da Lua ao redor da Terra para chegar ao resultado desejado. Como na figura acima, ele reservou 2 instantes de posição da Lua: uma em quarto-crescente e outra em quarto-minguante. Em ambos há um ângulo de 90° no vértice da Lua que é de fácil reconhecimento visual.

Como se utilizam intervalos de tempo entre fases lunares, o período de rotação corresponde ao mês sinódico lunar que vale 29,53 dias. Considerou-se aqui que não há movimento de translação da Terra ao redor do Sol.

Observando as mudanças de fase da Lua, mediu-se o tempo entre a fase quarto-minguante e a seguinte quarto-crescente. Hoje podemos calcular tal valor consultando calendários que possuam a hora exata da entrada da Lua em cada fase ou em tabelas que se encontram na internet como a mostrada a seguir.

Tabela 1 - Horários das fases da Lua.

Fases Lunares para o Ano de 2008					
Quarto-Minguante			Quarto- Crescente		
Dia	Mês	Hora	Dia	Mês	Hora
15	Jan	19:45 h	30	Jan	05:02 h
14	Fev	03:33 h	29	Fev	02:19 h
14	Mar	10:45 h	29	Mar	21:48 h
12	Abr	18:31 h	28	Abr	14:13 h
12	Mai	03:46 h	28	Mai	02:57 h
10	Jun	15:02 h	26	Jun	12:10 h
10	Jul	04:34 h	25	Jul	18:42 h
08	Ago	20:20 h	23	Ago	23:50 h
07	**Set**	**14:04 h**	**22**	**Set**	**05:05 h**

07	Out	09:05 h	21	Out	11:56 h
06	Nov	04:03 h	19	Nov	21:32 h
05	Dez	21:25 h	19	Dez	10:30 h
Horários em T.U. (Tempo Universal).					
Hora de Brasília = T.U. – 3.					

Escolhendo-se um par qualquer de datas dessas fases consecutivas, obtém-se o intervalo de tempo entre elas. Aqui se escolheu a Lua quarto-minguante do dia 07 de Setembro e a quarto-crescente do dia 22 de Setembro.

22 Set 05:05h – 07 Set 14:04 h = 14d 15h 1min = **14,63 dias**.

Com esse valor tem-se quanto a Lua andou ao equivalente a 2α para encontrar o valor angular por regra de três temos:

360º 29,53

X 14,63 X = 178,35º X = 2α **α =89,18º.**

Aristarco quando o calculou chegou a um valor de 87º, pois não tinha a precisão para determinar o momento exato das mudanças e fase da Lua. Há também grandes variações entre os intervalos de tempo para os diferentes dias escolhidos. O valor que temos para o período sinódico é médio e não exato, o que cria variação nos cálculos.

Olhando a figura 22 vê-se que para encontrar o valor de D_{TS} é preciso usar a relação trigonométrica do cosseno que é igual a distância Terra-Lua dividida pela distância Terra-Sol. Então:

$\cos \alpha = D_{TL} / D_{TS},$ $D_{TS} = D_{TL} / \cos \alpha$ $\cos 89{,}18º = 0{,}0143$.

Para facilitar os cálculos, coloca-se D_{TS} em função de D_{TL} (atual 384.400 km),

$D_{TS} = D_{TL} / \cos \alpha$ $\mathbf{D_{TS} = 69{,}87 D_{TL}}$ ou

D_{TS} = 69,87 x 384400 = **26.858.028 km**.

Este valor é o que conseguimos utilizando a tabela 1 vejamos agora como ficam os cálculos com o α de Aristarco:

$D_{TS} = D_{TL} / \cos 87º \rightarrow \mathbf{D_{TS} = 19{,}11 D_{TL}}$.

Ele conhecia a distância Terra-Lua obtida com o raio da Terra de Eratóstenes:

D_{TS} = 19,11 x 409089 = **7.817.690 km**.

Este valor é próximo de 8 milhões de quilômetros, uma distância incomum e enorme para os padrões da época.

Comparando os valores pela razão temos:

$\mathbf{D_{TS\,(Aristarco)} / D_{TS\,(Calculada)} = 0{,}29}$

Apesar de encontrarmos um valor cerca de 30% maior que o de Aristarco, ainda é incorreto. Sabemos que o valor real de D_{TS} é 389 D_{TL} ou 149.597.870 km e α deve ser 89,85°. Essa diferença pode ser explicada pelas considerações que tomamos no início do cálculo. A começar: a órbita da Lua não é circular nem plana o que leva a um falso posicionamento dela no plano estabelecido. A distância Terra-Lua não é constante pois a órbita é elíptica e inclinada. A Terra possui movimento de translação em torno do Sol, o que faz variar a posição relativa de recebimento da luz. Utilizam-se também valores médios para os cálculos junto a valores exatos, o que gera imprecisão. Vendo a tabela abaixo, vê-se que uma mínima variação do angulo α causa uma mudança considerável em 1/cosα.

Tabela 2 - Comparação da sensibilidade da distância com o ângulo.

α (º)	1/cosα
87,00	19,11
87,50	22,93
88,00	28,65
88,50	38,20
89,00	57,30
89,50	114,59
89,85	381,97
89,86	409,26

Apesar da grande diferença entre o valor calculado por Aristarco (que é menor que 100 vezes a distância Terra-Lua) e o valor conhecido hoje (que é da ordem de 400 vezes) , para os objetivos desse trabalho este fato não apresenta muita relevância. O importante aqui é considerar que Aristarco foi o primeiro, de que se tem relatos, a tentar elaborar uma nova astronomia de medição e que sua engenhosidade ao aplicar seus conhecimentos para construir uma estratégia inédita de modo a reSolver problemas considerados impossíveis para a época foi surpreendente. Levando em conta que o experimento tenta reproduzir as condições imprecisas em que eram realizadas essas medidas, embora incorretos, os valores encontrados demonstravam para a época que as distâncias entre os astros eram muito grandes mas não infinitas.

Aristarco e o sistema heliocêntrico

A Lua e o Sol possuem o mesmo diâmetro angular visto da Terra, ou seja, um observador que vê os dois astros da Terra percebe que eles têm aparentemente o mesmo tamanho no céu. Esse diâmetro angular vale 0,5º ou 30’ de arco como visto na figura 14 para a Lua e na figura abaixo.

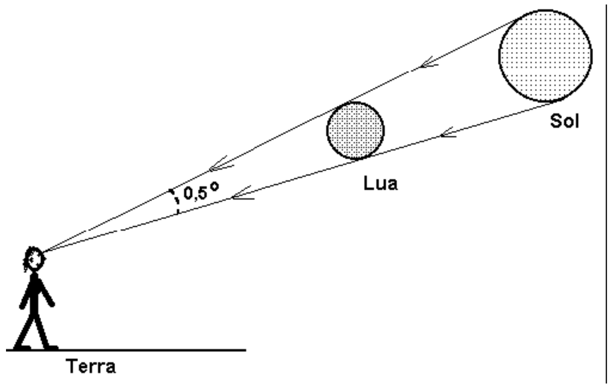


Figura 23- Diâmetro angular da Lua e do Sol.

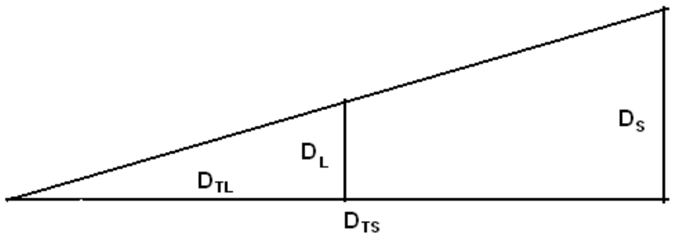


Figura 24- Esquema para equacionar o Teorema de Tales.

Podemos por teorema de Tales equacionar:

$$\frac{D_S}{D_L} = \frac{D_{TS}}{D_{TL}}$$

Substituindo-se os valores médios encontrados nos itens anteriores:

$$D_S = 71.380 \text{ km} = 5{,}6\ D_T.$$

Aristarco encontrou que o Sol deveria ter um diâmetro maior do que 5 diâmetros terrestres (atualmente se sabe que são 109 vezes esse diâmetro) e com isso mostrou que o Sol é maior do que a Terra o que não se sabia na época. Acha-se que, por essa razão, Aristarco começou a considerar o heliocentrismo já que o corpo menor é que gira em torno do maior.

A Atividade

Em uma sala escura ou qualquer outro local protegido da luz externa coloca-se uma fonte de luz não muito intensa, de preferência uma luminária de mesa, apontando para a maquete.

Na maquete vêem-se as faces escuras e as faces iluminadas da Lua e da Terra e, pode-se movimentar a Lua em torno da Terra permitindo a visualização de eclipses solares e lunares para fins didáticos. No entanto para este experimento deve-se encontrar o ângulo no vértice da Terra no momento em que a Lua estiver com 90° em seu vértice.

Para isso basta olhar para o elástico que prende a Lua à luminária. A direção do elástico deve coincidir com a marcação feita no "raio de órbita" da Lua, o que indica o ângulo de 90° em seu vértice. No momento em que isso acontece mede-se o valor do ângulo marcado pelo barbante que liga a Terra à Luminária o qual está sobre o transferidor.

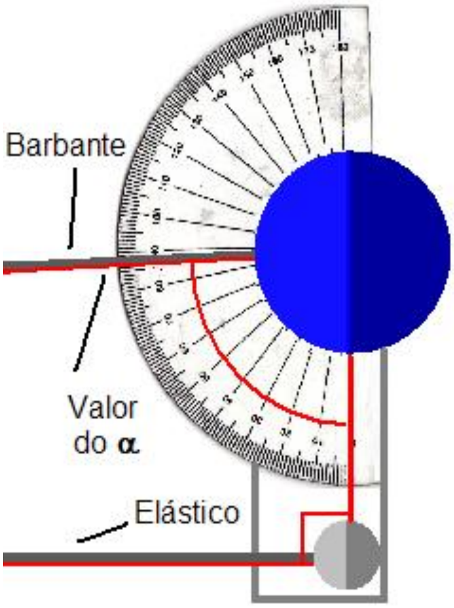


Figura 25 – Medindo o ângulo α.

Pode-se medir com uma régua a distância da Terra a Lua D_{TL} e calcular a distância da Terra ao Sol D_{TS}.

Resultados

Manipulando o "raio de órbita" da Lua observou-se a sobreposição entre o elástico e a marcação. Olhando no transferidor, o barbante marcou os valores de α entre 86º e 88º. Medindo-se com uma régua obteve-se o valor de 8 cm para a distância entre a Terra e a Lua.

Análise dos Resultados

Para o cálculo da distância da Terra ao Sol do nosso modelo é preciso utilizar a seguinte relação:

$$D_{TS} = D_{TL} / \cos \alpha$$

a qual é deduzida na teoria deste relatório. Já sabendo os valores de α e de D_{TL} fica fácil encontrar D_{TS}.

$D_{TS\ min}$= 8 / cos 86º= 114,68 cm.

$D_{TS\ max}$ = 8 / cos 88º = 229,23 cm.

$D_{TS\ méd}$ = 171,95 cm.

O erro associado a distância Terra-Sol dado pelo método de propagação de erros é:

$$(\Delta D_{TS})^2 = \left(\frac{\delta D_{TS}}{\delta D_{TL}}\right)^2 (\Delta D_{TL})^2 + \left(\frac{\delta D_{TS}}{\delta \alpha}\right)^2 (\Delta \alpha)^2$$

$$(\Delta D_{TS})^2 = \left(\frac{\Delta D_{TL}}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{D_{TS} . sen\, \alpha . \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)^2$$

onde Δ**D_{TL}** = 0,5 cm e $\Delta\alpha$ = π/180 rad,

ΔD_{TS} = 51,79 cm.

D_{TS} = 171,95 ± 51,79 cm.

O valor de **D_{TS}** foi medido com uma trena e obteve-se que a distância real entre a Terra e o Sol do modelo é 2 metros que está dentro da faixa de valores calculada.

No entanto vemos que o erro associado equivale a 30,11% do valor médio que é considerado alto para os padrões estatísticos.

Esse erro pode ser explicado pela limitação experimental ocasionada pelo largo diâmetro do barbante e também pelas oscilações provocadas por algumas peças que na montagem estão com folgas o que gera variações nas medidas.

No caso da observação real de Aristarco a discrepância é semelhante assim como queríamos mostrar ainda maior, pois foge ao nosso controle minimizar os erros de medição do ângulo α para que se aproxime o máximo do valor real. também não se tem a visualização de fora do sistema como na maquete tendo que utilizar métodos indiretos para o cálculo do ângulo α.

Conclusões

Apesar dos valores encontrados estarem com erro bem maior que 5% alcançou-se o objetivo principal do trabalho. Se analisarmos os objetivos deste trabalho encontraremos a proposta de explorar as metodologias envolvidas nos cálculos e acompanhar o desenvolvimento dessas técnicas pioneiras sem considerar com muita ênfase os erros teóricos e os de medição. Com essa idéia foi elaborada uma maquete didática que cumpre com os objetivos estabelecidos e permite o cálculo da distância da Terra ao Sol, assim como idealizado por Aristarco, a partir dos dados tirados dela. Percebeu-se que aqui vemos o sistema de fora encontrando o ângulo de forma direta, mas Aristarco com outra técnica encontrou teoricamente o valor do ângulo necessário para a realização dos cálculos.

Dadas as dificuldades em obter precisão nas medidas, ao longo do trabalho adquiriu-se a habilidade de desenvolver maneiras de se aperfeiçoar a maquete a fim de obter a melhor aproximação para o ângulo e resolver problemas de origem experimental.

Finalmente espera-se despertar o interesse das pessoas pela astronomia e que se busque compreender os fenômenos que nos cerca a fim de deslumbrar o universo em que vivemos.

Pesquisa e Referências

Este trabalho é baseado nas seguintes palavras chaves e referências:

1. Aristarco de Samos, a distância Terra-Lua e a distância Terra-Sol:

Principal item e tema do trabalho, Aristarco foi quem elaborou a técnica do cálculo estudado aqui.

[1] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/museu/astronomia.htm 21/09/2008;

[2] http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo1/modulo3/topico2.php 21/08/2008;

[3] EVORA, Fátima Regina Rodrigues. *A revolução copernicana-galileana*. Campinas, SP: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e Historia da Ciência, 1988.

[4] DERMAN, Samuel. Aristarchus at your service. *The Physics Teacher* **38**: p 574-575, Dezembro 2000.

[5] http://pt.wikipedia.org/wiki/Aristarco_de_Samos 21/09/2008;

[6] http://fisicomaluco.com/experimentos/aristarco-de-samos 21/09/2008;

[7] www.unisc.br/universidade/estrutura_administrativa/assessorias/atp/docs/forum_educacao_2006/Dimensoes_cosmologicas.pdf 19/09/2008;

2. Fases da Lua:

Importante para se calcular a distância Terra-Sol em destaque a fase quarto-crescente e quarto-minguante.

[8] http://astro.if.ufrgs.br/Lua/Lua.htm 28/08/2008;

[9] TEIXEIRA, Ramachrisna; FERRAZ, Sylvio. *Agenda IAG USP 2008*. São Paulo. Editora da USP: 2007.

[10] http://www.colegiosaofrancisco.com.br/alfa/Lua/Lua.php 21/09/2008;

[11] http://www.if.ufrj.br/teaching/astron/luna.html 21/09/2008;

[12] http://pt.wikipedia.org/wiki/Lua 21/09/2008;

[13] http://www.cosmobrain.com.br/res/fasesdaLua.html#fasesdoano 21/09/2008;

[14] http://lunar.astrodatabase.net/Lua_dia_dia.html 21/09/2008;

3. Trigonometria:

Utilizada no esquema geométrico de triangularização para descobrir o valor da distância Terra-Sol.

[15] http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco 21/09/2008;

[16] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm 21/09/2008;

[17] http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria 21/09/2008;

4. Forma da Terra, sua posição e o sistema heliocêntrico:

Importantes para entender as hipóteses de Aristarco.

[18] http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita 21/08/2008;

[19] http://pt.wikipedia.org/wiki/Forma_da_Terra 21/08/2008;

[20] http://pt.wikipedia.org/wiki/Terra_plana 21/08/2008;

[21] http://pt.wikipedia.org/wiki/Heliocentrismo 21/09/2008.

5. Eratóstenes e a determinação do diâmetro da Terra:

O diâmetro da Terra foi importante para se determinar a distância Terra-Lua.

[22] http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratóstenes .pdf 29/10/2008;

[23] http://www.mat.uc.pt/~me0604/aulas/Trab/Eratóstenes .pdf 19/09/2008;

6. Astronomia Antiga:

Conceitos conhecidos antes da época de Aristarco.

[24] http://www.ccvalg.pt/astronomia/historia/antiguidade.htm 25/10/2008;

[25] http://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto 25/10/2008;

[26] http://astro.if.ufrgs.br/movplan2/movplan2.htm 25/10/2008;

[27] http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm 25/10/2008;

Apêndice

Algumas das referências utilizadas:

Aristarco (320 a.C - 250 a.C) nasceu em Samos, na Grécia. Talvez por ser um astrônomo, não tenha tido tanto destaque quanto mereceu na história da Matemática até os tempos atuais. Por exemplo, *Thomas Heath* começou o segundo volume de sua história dos matemáticos gregos com as seguintes palavras:

A História dos matemáticos tem como regra dar pouca atenção à Aristarco de Samos. A razão, sem dúvida, é que ele foi um astrônomo, e portanto pode-se supor que seu trabalho não teria interesse suficiente para a Matemática. Os gregos o conheceram melhor, e o chamavam de "Aristarco, o Matemático".

Certamente, Aristarco foi tanto um matemático quanto astrônomo, sendo bastante celebrado como o primeiro a propor um universo centrado no Sol. Também é famoso por sua tentativa pioneira de determinar os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua. Foi aluno de *Strato de Lampsacus*, que liderava o Liceu Aristotélico. Considerado por muitos o Copérnico da Época Clássica, este astrônomo revolucionou tanto a astronomia que seu nome foi atribuído a uma cratera lunar.

Suas conclusões sobre a organização do Sistema Solar, mesmo que simples, são admiradas até hoje pela coerência que apresentam. Até então, as concepções mais avançadas eram as de Pitágoras e de Heráclides. Eles diziam que as estrelas eram imóveis; que a Terra estaria no centro do universo, mas apresentaria rotação; e que ao menos os planetas de Mercúrio e Vênus girariam em torno do Sol.

Aristarco foi além, afirmando que os movimentos de todos esses corpos poderiam ser mais facilmente descritos caso se admitisse que todos os planetas, incluindo a Terra, giravam em torno do Sol. Esse modelo heliocêntrico do universo foi, no entanto, considerado ousado demais e seu autor chegou a ser acusado de insulto religioso. Mesmo assim, a reação contra ele não chegou a ser tão agressiva quanto a que atemorizaria, quase 2000 anos mais tarde, Copérnico, Kepler e Galileu.

Os escritos de Aristarco sobre esse tema se perderam e só pudemos conhecer suas idéias porque foram mencionadas por Arquimedes. Porém, tivemos acesso a outros trabalhos de sua autoria. Em sua obra sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua, Aristarco procurou determinar a distância Terra-Lua em relação à distância Terra-Sol, considerando o triângulo formado por esses três astros no início do quarto crescente.

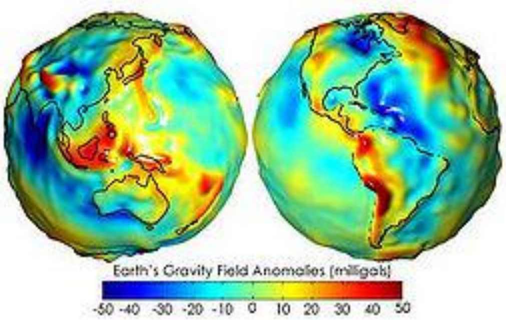
Aristarco concluiu que o Sol estaria 20 vezes mais distante da Terra que da Lua. Embora a proporção verdadeira seja cerca de 400 vezes, o procedimento utilizado estava correto. Os instrumentos de medição de ângulos então disponíveis é que não permitiam obter valores mais precisos.

Aristarco também procurou calcular o diâmetro da Lua em relação ao da Terra, baseando-se na sombra projetada pelo nosso planeta durante um eclipse lunar. Concluiu que a Lua tinha um diâmetro três vezes menor que o da Terra (o valor correto é 3,7). Com esse dado, deduziu que o diâmetro solar era 20 vezes maior que o da Lua e cerca de 7 vezes maior que o da Terra.

Aperfeiçoando as medições ao longo dos últimos séculos, sabemos hoje que o diâmetro terrestre não alcança um centésimo do solar. Embora os seus resultados tivessem erros de uma ordem de grandeza, o problema residia mais na falta de precisão dos seus instrumentos do que no seu método de trabalho, que era adequado. Além disso Aristarco também calculou, com mais precisão do que a dos antigos sábios, a duração de um ano solar. As imprecisões de Aristarco assumem pouca importância frente a seu bom senso. Para ele, seria mais natural supor que o astro menor girasse em torno do maior, e não o contrário.

http://fisicomaluco.com/experimentos/aristarco-de-samos/

Figura da Terra



Representação gráfica das ondulações do Geóide

A expressão **figura da Terra** tem variados sentidos em geodesia de acordo com o sentido em que for usado e com a precisão com que o tamanho e forma da terra devem ser definidos. A superfície topográfica actual é mais aparente com a sua variedade de formas de terra e áreas de água. Isto é, de facto, a superfície sobre a qual são efectuadas as medições da Terra. Não é prático, de facto, para cálculos matemáticos exactos, pois as fórmulas que seriam necessárias para tomar em conta todas as irregularidades teriam tantas variáveis que necessitariam de uma quantidade proibitiva de cálculos. A superfície topográfica é geralmente um assunto de topógrafos e hidrógrafos.

O conceito pitagórico de uma Terra esférica oferece uma superfície simples matematicamente fácil de lidar. Muitos cálculos astronómicos e de navegação usam esta superfície para representar a Terra. Enquanto que a esfera é uma aproximação próxima da verdadeira figura da Terra e satisfatória para muitas funções, para o geodesista interessado na medição de grandes distâncias — abrangendo continentes e oceanos — é necessária uma figura mais exacta. Aproximações mais precisas vão desde a modelação da forma de toda a Terra como um esferóide achatado ou um elipsóide achatado, até ao uso de harmónicos esféricas ou aproximações locais em termos de elipsóides de referências locais. A ideia de uma superfície planar ou chata para a Terra, mais do que a curvatura, é ainda aceitável para levantamentos de pequenas áreas como topografia local. Levantamentos de tabelas de planos são feitos para áreas relativamente pequenas, não tendo em conta a curvatura da Terra. O levantamento de uma cidade pode ser muito bem calculada como se a Terra fosse um plano do tamanho da cidade. Para áreas tão pequenas, o posicionamento exacto de um ponto pode ser determinado relativamente a outro sem necessidade de se considerar o tamanho ou a forma total da Terra.

Em meados do século XX, pesquisas nas geociências contribuíram para melhoramentos drásticos na precisão da **figura da Terra**. A utilidade primária (e a motivação para o seu financiamento e desenvolvimento, principalmente dos militares) desta precisão melhorada era fornecer dados geográficos e gravitacionais para os sistemas de navegação inercial dos mísseis balísticos. Este financiamento também permitiu a expansão de disciplinas geocientíficas, permitindo a criação e crescimento dos variados departamentos de geociências em muitas universidades.[1]

Elipsóide de Revolução

Como a Terra é de facto ligeiramente achatada nos pólos e alargada no equador, a figura geométrica usada na geodesia que mais se aproxima da **figura da Terra** é o elipsóide de revolução. O elipsóide de revolução é uma figura que se pode obter pela rotação de uma elipse pelo sei semi-eixo menor. Um elipsóide de revolução que descreva a **figura da Terra** é chamado de elipsóide de referência.

Um elipsóide de revolução é definido apenas pela especificação de duas dimensões. Os geodesistas, por convenção, usam o semi-eixo maior e o achatamento. O tamanho é representado pelo raio equatorial — o semi-eixo maior — é designado pela letra *a*. A forma do elipsóide é dada pelo achatamento *f*, que indica o quanto o elipsóide se aproxima da forma esférica. A diferença entre o elipsóide de referência representando a Terra e a esfera é muito pequena, apenas uma parte em 300 aproximadamente.

Para um tal *achatamento* do elipsóide, o raio polar da curvatura é maior que o equatorial.

$$\left(\frac{a^2}{b}\right),$$

apesar de a superfície da Terra estar mais próxima do seu centro nos pólos do que no equador. Em conversão, a vertical do equador do raio de curvatura é menor que o polar

$$\left(\frac{b^2}{a}\right).$$

Esta circunstância tem servido como base para tentar para determinar o achatamento do elipsóide médio da Terra pelas chamadas medições de graduação.

Elipsóides históricos da Terra

Nome do elipsóide de referência	**Raio Equatorial (m)**	**Raio Polar (m)**	**Achatamento inverso**	**Onde é usado**
Everest Modificado (Malásia) Revisto por Kertau	6,377,304.063	6,356,103.038993	300.801699969	
Timbalai	6,377,298.56	6,356,097.55	300.801639166	
Esferóide Everest	6,377,301.243	6,356,100.228	300.801694993	
Maupertuis (1738)	6,397,300	6,363,806.283	191	França
Everest (1830)	6,377,276.345	6,356,075.413	300.801697979	Índia
Airy (1830)	6,377,563.396	6,356,256.909	299.3249646	Grã-Bretanha
Bessel (1841)	6,377,397.155	6,356,078.963	299.1528128	Europa, Japão
Clarke (1866)	6,378,206.4	6,356,583.8	294.9786982	América do Norte
Clarke (1880)	6,378,249.145	6,356,514.870	293.465	França, África
Helmert (1906)	6,378,200	6,356,818.17	298.3	
Hayford (1910)	6,378,388	6,356,911.946	297	Estados

				Unidos
Internacional (1924)	6,378,388	6,356,911.946	297	Europa
NAD 27	6,378,206.4	6,356,583.800	294.978698208	América do Norte
Krassovsky (1940)	6,378,245	6,356,863.019	298.3	Rússia
WGS66 (1966)	6,378,145	6,356,759.769	298.25	EUA/DoD
Australian National (1966)	6,378,160	6,356,774.719	298.25	Austrália
Novo Internacional (1967)	6,378,157.5	6,356,772.2	298.24961539	
GRS-67 (1967)	6,378,160	6,356,774.516	298.247167427	
SAD-69 (1969)	6,378,160	6,356,774.719	298.25	América do Sul
WGS-72 (1972)	6,378,135	6,356,750.52	298.26	EUA/DoD
Datum 73 Hayford-Gauss Militar IGeoE	6,378,388		297	Portugal (Exército)
GRS-80 (1979)	6,378,137	6,356,752.3141	298.257222101	
NAD 83	6,378,137	6,356,752.3	298.257024899	América do Norte
WGS-84 (1984)	6,378,137	6,356,752.3142	298.257223563	
IERS (1989)	6,378,136	6,356,751.302	298.257	
Funções Gerais	**6,378,135**	**6,356,750**	**298.25274725275**	**Global**

Figuras mais complicadas

A hipótese de que o equador da Terra seja uma elipse em vez de um circulo e assim que o elipsóide seja triaxial tem sido uma matéria de controvérsia científica durante muitos anos. Os desenvolvimentos técnicos modernos têm fornecido novos e mais rápidos métodos de recolha de dados e desde o lançamento do primeiro Sputnik soviético, os dados orbitais têm sido usados para investigar a teoria da elipticidade.

Uma segunda teoria, mais complicada que a triaxialidade, proposta que observou longas variações periódicas dos primeiros satélites artificiais da Terra, indicam uma depressão adicional no pólo sul acompanhado de um "inchaço" da mesma magnitude no pólo norte. Também se descobriu que as latitudes médias do hemisfério norte eram ligeiramente achatados e que as latitudes médias do hemisfério sul "inchavam" na mesma razão. Este conceito sugeriu que a Terra tinha ligeiramente a forma de pêra e foi assunto de grande discussão pública. A geodesia moderna tende a manter o elipsóide de revolução e a tratar a triaxialidade e a forma de pêra como parte da figura do geóide: elas são representadas pelos coeficientes harmónicos esféricos C_{22},S_{22} e C_{30} respectivamente, correspondendo ao grau e números de ordem 2,2 para a triaxialidade e 3,0 para a forma de pêra.

Geóide

Existe outra superfície envolvida na medição geodésica: o geóide. Num levantamento geodésico, o cálculo das coordenadas geodésicas dos pontos é frequentemente efectuada sobre um elipsóide de referência como uma aproximação do tamanho e forma da Terra na área a ser levantada. As medições actuais feitas na superfície da Terra com instrumentos específicos são no entanto referidos ao geóide. O elipsóide é uma superfície regular matematicamente definida com dimensões específicas. No entanto, o geóide coincide com a superfície onde os oceanos estariam sobre todo o planeta Terra se estivesse livre para ajustar o efeito combinado da atracção de massas (gravidade) e a força centrífuga da rotação da Terra. Como resultado desta distribuição desigual das massas da Terra, a superfície do Geóide é irregular, e como o elipsóide é uma superfície regular, a separação das duas, referidas como ondulação do geóide, alturas do geóide ou separação do geóide, também são irregulares.

O geóide é uma superfície ao longo do qual o potencial da gravidade é em qualquer ponto constante e para o qual a direcção da gravidade é sempre perpendicular. Este último é particularmente importante pois os instrumentos ópticos que contêm os dispositivos de nivelamento são frequentemente usados para fazer medições geodésicas. Quando devidamente ajustadas, o eixo vertical do instrumento coincide com a direcção da gravidade, e assim, perpendicular com o geóide. O ângulo entre o fio-de-prumo que é perpendicular ao geóide (às vezes chamado de "vertical") e a perpendicular ao elipsóide (às vezes chamado de "normal do elipsóide") é definido como desvio da vertical. Tem duas componentes: uma este-oeste e uma norte-sul.

Correlação para Geofísica e Geologia

Rotação da Terra e Interior da Terra

A determinação da figura exacta da Terra não é apenas uma operação geodésica ou uma tarefa da geometria, mas também está relacionada com a geofísica. Se não se tiver em conta o interior da Terra, podemos declarar uma "densidade constante" de 5.515g/cm^3 e, de acordo com argumentos teóricos (ver Leonhard Euler, A. Wangerin, etc.), um tal corpo a rodar como a Terra teria um achatamento de 1/230.

De facto o achatamento medido é de 1/298.25, o que é mais semelhante a uma esfera e um forte argumento de que o núcleo da Terra é *muito compacto*. Assim a densidade tem de ser uma função da profundidade, tendo 2.7g/cm^3 à superfície (densidade das rochas de granito, arenito, etc. — ver geologia regional) a até cerca de 15g/cm^3 no núcleo interno. A sismologia moderna dá um valor de 16g/cm^3 (ferro ou hidrogénio) no centro da Terra)

Campo Gravítico Regional e Global

Outra implicação da exploração física do interior da Terra é o campo gravítico que pode ser medido com grande precisão à superfície e por satélites. A vertical verdadeira não corresponde a um vertical teórico (de facto tem um desvio entre 2" e 50") devido a que a topografia e as *massas geológicas* estão a perturbar ligeiramente o campo gravítico. Assim, o grosso da estrutura da crosta terrestre e manto pode ser determinada por modelos geodésicos-geofísicos do subsolo.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Forma_da_terra

Um pouco da História da Trigonometria

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro Rhind* e também uma notável tábua de secantes na tábua cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

Certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum, exceto uns poucos fragmentos que estão no Brooklin Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos. De qualquer modo, a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2000 anos, após um início bastante auspicioso. (in Boyer, C.B. História da Matemática, Editora Blücher, São Paulo, SP, 1974.)

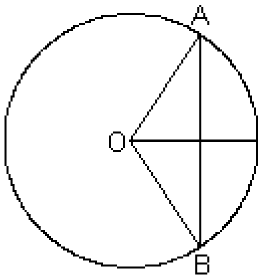
Talvez a mais notável das tabuas matemáticas babilônias já analisadas. O nome indica tratar-se da tabula da coleção G. A. Plimpton da universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tabula foi escrita no período Babilônico Antigo - aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. - e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sacs em 1945. (in Eves, H.: Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1997.)

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

Papiro Rhind, Museu de Londres.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estrelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes - duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica - e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios.

A "Trigonometria" era então baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Hiparco escreve a respeito do cálculo de comprimentos das cordas. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo x é $2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, conforme figura:



$A\hat{O}B = x$

$OB = r$

$\text{sen}\,\frac{x}{2} = \frac{AB}{2r}$

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, ao que parece, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

Outro matemático grego, Menelau de Alexandria, por volta de 100 d.C., produziu um tratado sobre cordas num círculo, em seis livros, porém vários deles se perderam. Felizmente o seu tratado *Sphaerica* , em três livros, se preservou numa versão árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica.

Esféricos

Entretanto, a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antigüidade foi a *Syntaxis mathematica*, obra escrita por Ptolomeu de Alexandria que contém 13 livros. Este tratado é famoso por sua compacidade e elegância, e para distingui-lo de outros foi associado a ele o superlativo magiste ou "o maior". Mais tarde na Arábia o chamaram de Almajesto, e a partir de então a obra é conhecida por esse nome.

Sintaxe Matemática

Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π. Embora não fizesse uso dos termos seno e cosseno, mas das cordas, utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Semelhantemente, em termos de cordas, Ptolomeu conhecia as propriedades que, em linguagem atual, são:

$$\operatorname{Sen}(x+y) = \operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} y + \operatorname{Sen} y \cdot \operatorname{Cos} x$$
$$\operatorname{Sen}(x-y) = \operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sen} y \cdot \operatorname{Cos} x$$
$$\operatorname{Cos}(x+y) = \operatorname{Cos} x \cdot \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sen} y \cdot \operatorname{Sen} x$$
$$\operatorname{Cos}(x-y) = \operatorname{Cos} x \cdot \operatorname{Cos} y + \operatorname{Sen} y \cdot \operatorname{Sen} x$$
$$\frac{a}{\operatorname{Sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{Sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{Sen} \hat{C}}$$

De posse do equivalente dessas fórmulas, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º. Calculou comprimentos de cordas, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num círculo. Isso lhe possibilitou encontrar a corda subtendida por ângulos de 36º, 60º, 72º, 90º e 120º. Descobriu então, um método para encontrar a corda subtendida pela metade do arco de uma corda conhecida. Esse fato que, em nossa simbologia, é o mesmo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, juntamente com interpolação, permitiu-lhe calcular cordas com um bom grau de precisão.

Posteriormente, surgiu a necessidade de uma nova unidade de medida para os ângulos. Foi quando surgiu o radiano, denominado *radian*, pois os estudiosos discutiam uma "expressão" do ângulo em termos de π, que primeiramente foi chamada "π-medida", "circular" ou "medida arcual". Nenhum autor explica por que fizeram uso dessa unidade, mas o seu uso simplificou várias fórmulas matemáticas e físicas.

Durante seis séculos, *O Almajesto*, representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Porém no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os Hindus.

A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde essas tábuas sem dúvida se originaram. Seus inventores, desconhecidos, conheciam as idéias matemáticas gregas e babilônias transmitidas como subprodutos de um florescente comércio romano com o sul da Índia, via Mar Vermelho e Oceano Índico. O *Surya Siddhanta*, cujo significado é sistemas de Astronomia, era um conjunto de textos matemáticos e regras enigmáticas de Astronomia, redigido em versos, em sânscrito, com poucas explicações e nenhuma prova. Foi composto no século IV ou V d.C., mas a versão que resta foi revista tantas vezes que é difícil dizer que partes estão em sua forma original.

O primeiro aparecimento real do seno de um ângulo se deu no trabalho dos hindus. Aryabhata, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno. Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de Brahmagupta, em 628, e um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150.

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de jiva - de origem hindu - o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe al-Battani adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno.

Os árabes trabalharam com senos e cossenos e, em 980, Abu'l - Wafa sabia que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$, embora isso pudesse facilmente ter sido deduzido pela fórmula de Ptolomeu $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$, fazendo x = y.

A palavra hindu *jiva* - meia corda, dada ao seno foi traduzida para o árabe que chamou o seno de jiba, uma palavra que tem o mesmo som que *jiva*. Daí, *jiba* se tornou *jaib* nos escritos árabes. A palavra árabe adequada que deveria ter sido traduzida seria *jiba*, que significa a corda de um arco, em vez de *jaib*, pois foi o estudo das cordas de arcos numa circunferência que originou o seno.

O nome seno vem do latim sinus que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. Em particular, o uso de Fibonacci do termo sinus rectus arcus rapidamente encorajou o uso universal de seno.

Seno do arco reto

Uma justificativa para esse erro de tradução seria o fato de que em árabe, como em hebraico, é freqüente escrever-se apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor a colocação das vogais. Além de *jiba* e *jaib* terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum, pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito.

Os capítulos do livro de Copérnico, mostrando toda a importância da Trigonometria para a Astronomia, foram publicados em 1542 por Rheticus. Este também produziu tabelas importantes de senos e cossenos que foram publicadas após a sua morte.

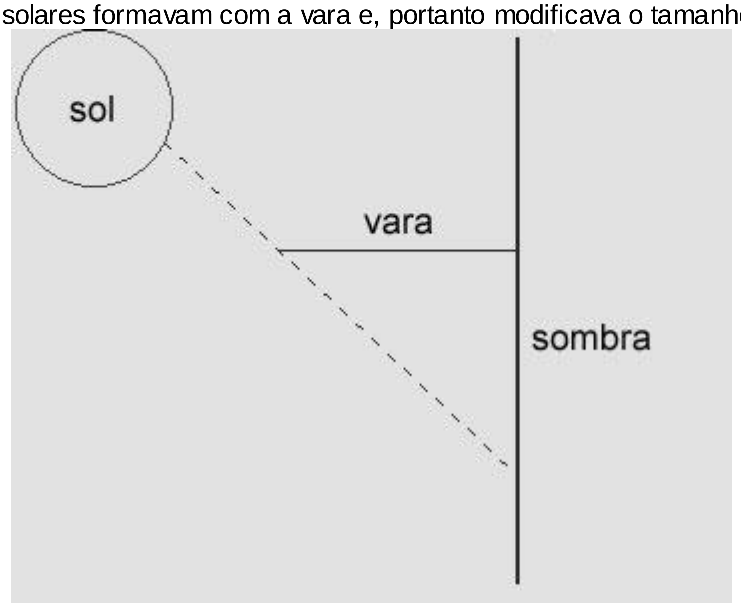
O termo seno certamente não foi aceito imediatamente como a notação padrão por todos os autores em tempos, quando a notação matemática era por si mesma uma nova idéia, muitos usaram a sua própria notação. Edmund Gunter foi o primeiro a usar a abreviação sen em 1624 em um desenho. O primeiro uso de sen em um livro foi em 1634 pelo matemático francês Hérigone, enquanto Cavalieri usava Si e Oughtred S.

Por sua vez, o cosseno seguiu um curso semelhante no que diz respeito ao desenvolvimento da notação. Viète usou o termo sinus residuae para o cosseno, Gunter em 1620, sugeriu co-sinus. A notação Si.2 foi usada por Cavalieri, s co arc por Oughtred e S por Wallis.

Resíduos do seno

Viète conhecia as fórmulas para sen nx em termos de sen x e cos x. Ele deu explicitamente as fórmulas relativas ao seno e ao cosseno do arco triplo

A função tangente era a antiga função sombra, que tinha idéias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto modificava o tamanho da sombra.



Assim, a tangente e a cotangente vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de sol. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos.

As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583. O termo cotangente foi primeiro usado por Edmund Gunter, em 1620.

As notações para a tangente e a cotangente seguiram um desenvolvimento semelhante àquele do sen e cos. Cavalieri usou Ta e Ta.2, Oughtred usou t arc e co arc, enquanto Wallis usou T e t. A abreviação comum usada hoje é tan (ou tg) sendo que a primeira ocorrência desta abreviação é devida a Albert Girard em 1626, com tan escrito por cima do ângulo; cot foi primeiro usada por Jonas Moore em 1674.

A secante e a cossecante não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas. Copérnico sabia da secante que ele chamou a hipotenusa. Viète conhecia os resultados $\frac{\cos\sec x}{\sec x} = \cot x = \frac{1}{\tan x}$ e $\frac{1}{\cos\sec x} = \frac{\cos x}{\cot x} = \operatorname{sen} x$.

As abreviações usadas por vários autores foram semelhantes para as funções trigonométricas já discutidas. Cavalieri usou Se e Se.2, Oughtred usou se arc e sec co arc, enquanto Wallis usou s e σ. Albert Girard usou sec, escrito por cima do ângulo como ele fez para a tan.

O século XVIII viu as funções trigonométricas de uma variável complexa sendo estudadas. Johann Bernoulli achou a relação entre $\operatorname{sen}^{-1} z$ e log z em 1702. *De Moivre* publicou seu famoso teorema $(\cos x + i.\operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i.\operatorname{sen} nx$ em 1722, enquanto Euler, em 1748, forneceu a fórmula $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm

Astronomia

Os sábios alexandrinos, devido à proximidade instituída por Alexandre com a civilização babilônica, puderam utilizar os conhecimentos da astronomia babilônica. Contudo, esta constituía mais um somatório de confirmações do que propriamente uma ciência, na verdadeira acepção da palavra.

Pelo contrário, os gregos desde cedo se interessaram pela explicação racional dos fenômenos astronômicos. A questão central prendia-se com a forma e a localização da Terra no Universo.

Quanto à *localização* do planeta, praticamente, todos os astrônomos situavam a Terra no centro do Universo com exceção de Aristarco de Samos. Digamos que o geocentrismo esteve presente em toda a astronomia antiga.

Quanto à *forma* da Terra para a qual teriam sido avançadas diversas soluções, a escola pitagórica por volta do século VI a.C., tentara já resolver o problema. É aí, por razões mais matemáticas (ou mesmo místicas) do que físicas, que pela primeira vez foi avançada a hipótese da esfericidade da Terra. É também na escola pitagórica que se estabelece a existência do movimento diurno da Terra em tomo do seu eixo, e do movimento anual da translação da Terra em torno do Sol.

De entre os vários sábios que passaram pelo Museu e se dedicaram a esta área, destacam-se os seguintes nomes: Aristarco, Hiparco e Ptolomeu.

Aristarco

Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.) viveu no reinado dos três primeiros Ptolomeus. Passou a maior parte da sua vida em Alexandria, foi professor no Museu e foi aí que publicou a maior parte das suas obras. Aristarco propôs para a explicação do universo um sistema heliocêntrico. Como relata Arquimedes em *O Contador de Areias:*

> "Aristarco de Samos publicou um livro que consistia em algumas hipóteses cujas premissas conduzem ao resultado de que o Universo é muitas vezes maior do que aquilo a que agora se dá esse nome. As suas hipóteses são que as estrelas fixas e o Sol se mantêm imóveis, que a Terra gira em torno do Sol na circunferência de um círculo, com o Sol situado no meio da órbita, e que a esfera das estrelas fixas, situada aproximadamente com o mesmo centro que o Sol, é tão grande que o círculo em que ele supõe que a Terra gira está para a distância das estrelas fixas na mesma proporção que o centro da esfera está para a superfície."
>
> Cit. in Sagan (1980: 193)

Esta idéia já tinha sido esboçada, ainda que rudimentarmente, por um peripatético chamado Heráclides de Ponto (séc. IV a. C.). No entanto, de acordo ainda com Arquimedes, a maioria dos astrônomos contemporâneos de Aristarco tê-la-á rejeitado. A hipótese era contrária à nova física aristotélica, segundo a qual o elemento mais pesado (neste caso, a Terra) só podia ocupar a posição central, contradizia a sensibilidade religiosa, segundo a qual a morada dos seres humanos tinha de coincidir com o centro do universo e contrastava com a doutrina astrológica aceite que se baseava numa referência geocêntrica.

Para além destes argumentos de ordem filosófica e religiosa (como podemos ler em Plutarco: "Cleantes, o estóico, considerava que Aristarco deveria ser acusado por ter proposto, por uma profanação sacrílega, deslocar o foco do Mundo", cit. in Couderc (1981: 24)) havia também fortes argumentos de ordem científica contra a sua hipótese. Tais argumentos podem ser encontrados em Aristóteles bem como num astrônomo tão eminente como Ptolomeu, que rejeita a rotação com um argumento de bom senso um pouco mais elaborado:

> "Uma roda que roda possui uma força centrífuga tanto mais intensa quanto maior for a velocidade; se a Terra girasse em 24 horas como alguns tinham proposto, os pontos de seu equador girariam a uma velocidade fantástica e os seres, as casas, as pedras, as águas

seriam lançadas nos ares; o próprio solo saltaria em estilhaços."
Cit in Couderc (1981: 23)

Outro argumento contrário à rotação da Terra à volta do Sol tinha por base o fenômeno da paralaxe das estrelas. Assim, o fato de a Terra se mover de um ponto para outro (por exemplo, do afélio para o periélio) implicaria uma mudança das posições relativas das estrelas, o que não era facilmente verificável. Para contornar esta dificuldade, Aristarco assume que a esfera celeste tem um raio tão grande que, em comparação, a órbita da Terra podia ser considerada um simples ponto.

A obra monumental em que Aristarco descreveu o seu sistema heliocêntrico perdeu-se. Resta apenas *Da Grandeza e da Distância do Sol e da Lua,* obra na qual, a partir de certas hipóteses derivadas da observação, Aristarco deduz as seguintes proposições:

1. A Terra está no centro da orbita lunar.
2. Quando a Lua apresenta exatamente uma metade iluminada, a sua distância ao Sol não é de um quadrante, mas de 29/30 de quadrante (87º)
3. A distância da Terra ao Sol é mais de 18 vezes mas menos de 20 vezes a distância da Terra à Lua.
4. A razão do diâmetro do Sol com o diâmetro da Terra é maior que 19/3 e menor que 43/6.

Aristarco teve o mérito de conceber um sistema solar com o centro ocupado pelo Sol e no qual a Terra percorria uma orbita circular, como os outros planetas. Sabemos que não conseguiu convencer os astrônomos seus contemporâneos que não possuíam instrumentos capazes de determinar as paralaxes estrelares. É que, se a Terra se move, a posição das estrelas nas diferentes estações tinha de relevar alguma variação. Ninguém supunha, então, que o fenômeno pudesse ser imperceptível devido à enorme distância a que se encontravam as estrelas.

Hiparco

Hiparco

Um dos sábios que refutou a teoria de Aristarco foi Hiparco de Nicéia (190 - 125 a.C.). Hiparco foi ao mesmo tempo astrônomo, matemático (a ele devemos a divisão da circunferência em 360º e sobretudo o estudo das primeiras funções trigonométricas) e um hábil construtor de instrumentos (construiu a diopta, chamada também posteriormente "Bastão de Tiago", que consiste numa régua graduada, com uma guia e um cursor para a medição de ângulos. Também se lhe atribui a invenção do astrolábio esférico ou esfera armilar).

Enquanto astrônomo, a ele se devem a descoberta da precessão dos equinócios, a determinação da hora noturna, a definição de ano sideral e do ano trópico, a determinação das dimensões e distâncias da Lua e do Sol (paralaxe quinze vezes superior á autentica, só melhorada mais tarde por Kepler). Por volta de 128A.C., comparando as suas observações com as anteriores de Timocárides por volta de 295 A.C. verifica que as posições estelares não são fixas. Durante o tempo decorrido, verificou que Spica se tinha deslocado cerca de 2º de longitude. esta observação permite a Hipócrates afirmar que os equinócios se deslocavam sobre a eclíptica, fixar essa velocidade de deslocação em 1/100 de grau por ano e estabelecer que o movimento tenha lugar em volta dos pólos da eclíptica.

O *Catálogo das Estrelas Fixas* foi a sua última obra. Nela descreveu a forma das constelações e enumerou cerca de 850 estrelas, indicando a sua grandeza e o valor de cada uma das suas coordenadas eclípticas, uma das quais a longitude, que variava devido ao fenômeno da precisão dos equinócios. Pela idéia de comparar as posições estelares em diferentes épocas, Hiparco é considerado o iniciador de um método cujos princípios continuaram a ser válidos pelo menos durante os dois mil anos seguintes.

Dedicou o resto da sua vida ao estudo da Lua e conseguiu elaborar a previsão de eclipses para os seiscentos anos seguintes.

Ptolomeu

Outro grande sábio que trabalhou em Alexandria foi Claudio Ptolomeu(85 - 165 d.C.). O seu nome deriva, provavelmente, não de quaisquer laços de parentesco com a família real, mas da cidade onde se julga ter nascido, *Ptolemaida*, no Egito.

Ptolomeu foi astrônomo, geógrafo e matemático. Escreveu várias obras, nomeadamente, As *Hipóteses planetárias,* em que apresenta um calendário que registra a hora do aparecimento e do ocaso de várias estrelas no firmamento; a *Tetrabíblia,* onde desenvolveu a mais completa doutrina astrológica da antiguidade, consolidando as regras básicas para a composição de horóscopos (originários da Babilônia); a *Geografia,* obra composta por oito livros e 27 mapas, onde faz a descrição e a medição da Terra. Ptolomeu tem o mérito de sistematizar os métodos e as descobertas anteriores e colocar a geometria ao serviço da geografia.

> "Em geografia, deve meditar-se na extensão de toda a Terra bem como na sua forma e no seu posicionamento nos céus, de modo a conseguir-se enunciar corretamente quais são as peculiaridades e proporções da parte com que se está a trabalhar (...). 0 mostrar todas estas coisas à inteligência humana é a grande e requintada conquista da Matemática."
>
> Ptolomeu, cit. in Osserman (1995: 29)

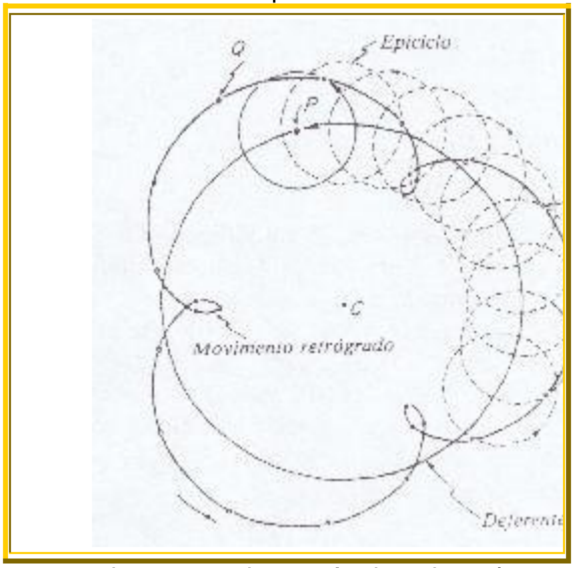
A forma esférica da Terra é também aceite como um fato estabelecido. Ptolomeu, justifica este fato da seguinte maneira:

> "Se a Terra fosse plana de este a oeste, as estrelas nasceriam simultaneamente para os ocidentais e para os orientais, o que é falso. Além disso, se a Terra fosse plana de norte para sul e vice-versa, as estrelas visíveis para qualquer pessoa continuariam a sê-lo qualquer que fosse o local para onde essa pessoa se deslocasse, o que é falso. Mas parece plana para a visão humana porque é muito extensa."
>
> Cit. in Osserman (1995: 30)

No entanto, também cometeu alguns erros. Errou o cálculo da circunferência da Terra, tendo feito uma estimativa que correspondia a um valor 20 % mais baixo do que o real. Além de subestimar o tamanho da Terra, Ptolomeu sobrevalorizou imenso o tamanho da Ásia.

Mapa Mundi de Ptolomeu

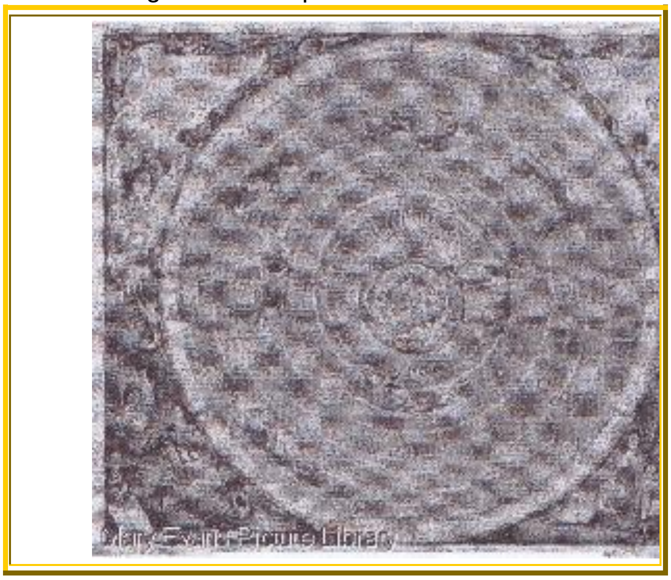
Ptolomeu fez ainda importantes estudos de óptica. Assim, na obra em cinco volumes - *Óptica* - verificou que os raios luminosos são desviados quando passam de um meio para o outro e formulou a regra da proporcionalidade nos ângulos de incidência e refração (quase verdadeira para ângulos pequenos). Com esta descoberta, Ptolomeu, apesar de não ter noções exatas da composição da atmosfera terrestre, intuiu que a luz das estrelas devia ser desviada quando atravessava a camada de ar terrestre, de tal modo que as estrelas pareciam estar mais próximas do Zênite do que estavam na realidade.



O artifício de Ptolomeu para dar conta das errâncias dos planetas resultou numa complicada combinação de movimentos. O planeta Q desloca-se em torno de P na circunferência de um círculo (linha ponteada), enquanto P se move na circunferência de outro círculo de centro C. A linha a cheio com as açadas é a trajetória de Q resultante do movimento combinado.

Mas a sua obra mais famosa foi o célebre trabalho, escrito em 13 volumes, *Almagesto. A* obra teve vários nomes, mas o mais conhecido é o que lhe foi dado pelos gregos: *Megale mathematike sytaxis* (ou seja a *Grande Síntese Matemática*) ou, no superlativo latino *magiste syntaxis,* expressão transformada pelos árabes (acrescentando-lhe o artigo) em *al-magiste* donde decorre *Almagesto*.

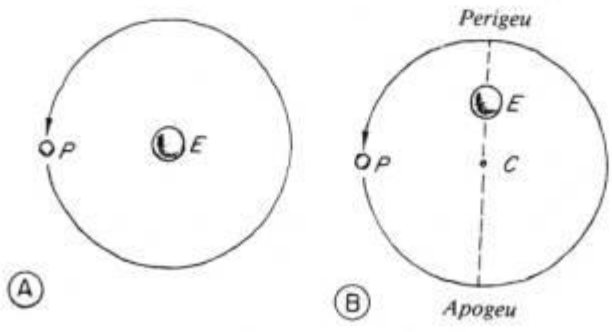
Nesta obra, em que Ptolomeu compilou grande parte dos conhecimentos astronômicos da Antiguidade, é apresentado o sistema geocêntrico que influenciou durante 1400 anos a cultura científica.



Sistema Ptolomaico

Ao contrário do sistema das esferas homocêntricas de Eudóxio e Aristóteles, o sistema ptolomaico tinha enorme complexidade.

Vejamos apenas umas das invenções capitais de Ptolomeu para explicar o movimento dos planetas:



Representação de um movimento circular uniforme que não admite nem pontos estacionários nem retrogradações.

A Terra não ocupa exatamente o centro *C* do círculo, encontrando-se deslocada, no ponto *E*.

Daqui ocorre obviamente que, se um ponto *P* corresponde ao planeta (ou ao Sol) observado da Terra, este não parecerá ter movimento uniforme relativamente às estrelas fixas, mesmo que o seu movimento seja, de fato uniforme. Se a Terra e os corpos celestes constituem um sistema excêntrico, e não um sistema homocêntrico, haverá momentos em que o Sol, ou um planeta, estarão mais perto da Terra (perigeu) e outros em que o Sol, ou esse planeta, estarão mais afastados da Terra (apogeu).

Assuma-se que, enquanto que o ponto *P* se move uniformemente na circunferência de um círculo de centro *C* (próxima fig.), um segundo ponto, *Q*, se move circularmente em redor de *P*. O resultado dos dois movimentos combinados será uma curva com uma serie de laços ou protuberâncias. O círculo maior em que *P* se move chama-se círculo de referência, e o menor, em que se move *Q*, é o epicentro. Assim se explica que o sistema ptolomaico seja muitas vezes descrito como sistema das deferentes e dos epiciclos. É claro que a curva resultante da combinação do deferente com o epiciclo é uma trajetória na descrição da qual o planeta por vezes se encontra mais próximo do centro do que noutras, apresenta pontos estacionários, que descreve um laço. Um observador em *C* vê-lo-á a mover-se em sentido retrógrado. Para tornar o movimento conforme a observação é apenas necessário escolher o tamanho relativo do epiciclo e da deferente e as velocidades relativas de rotação dos dois epiciclos de modo a concordarem com as aparências.

O sistema de Ptolomeu não só funcionava como se integrava perfeitamente no sistema da física de Aristóteles. Às estrelas, aos planetas, ao Sol e à Lua eram atribuídos “movimentos naturais”. A Terra não partilhava desse movimento, ocupando o seu lugar ”natural”, em repouso, no centro do universo

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/museu/astronomia.htm

Comentários

Comentários dos Orientadores

Comentários referentes ao Projeto

Meus orientadores, A Prof[a]. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato e o Prof. Dr. Ramachrisna Teixeira concordam com os termos aqui estabelecidos para o projeto e declaram que poderão dispor de todos os elementos necessários a menos de exceções indicadas embaixo.

Exceções: Não há.

Sigilo: NÃO SOLICITA.

Comentários referentes ao Relatório Parcial

Opinião do Ramachrisna:

"Por cima acho que está legal. A figura 17 que você usa para explicar as fases da Lua é contraditória com o experimento que você está montando e pode gerar confusão. Acho que o mais legal seria você usar essa figura, mas para dizer que seria assim se o Sol estivesse a uma distância, infinita, etc. Infelizmente não deu tempo ainda de parar para pensar mais no assunto, mas acho que deveríamos, apesar de todos os teus argumentos, obter valores mais próximos da realidade. Não é impossível que a utilização do período de 29.5 dias precise de alguma correção".

Opinião da Carola:

"O relatório parcial da aluna reflete muito bem os avanços realizados no projeto".

Comentários referentes ao Relatório Final

Os meus orientadores, Prof$^{a.}$ Carola Dobrigkeit Chinellato e Prof. Ramachrisna Teixeira realizaram os seguintes comentários:

Opinião do Ramachrisna:

"Acho que em algum lugar você deveria explorar o seguinte (não sei se é um fato): o Aristarco obteve para a distância Terra-Sol o valor de 8 milhões de km. Esse número está muito errado mas era enorme para os padrões da época. 8 milhões não devia ser uma quantidade comum de se pensar e usar na Grécia antiga. De posse desse valor e do diâmetro aparente do Sol (30') ele pode calcular o tamanho do Sol e verificou que era muito maior do que a Terra e pensa-se que por isso ele acabou pensando no sistema heliocêntrico."

Opinião da Carola:

"O relatório final reflete muito bem todas as atividades desenvolvidas e demonstra que os objetivos pretendidos foram de fato atingidos."

Comentários do Coordenador

Comentários referentes ao Projeto

“Projeto aprovado. No RP inclua o que colocou como texto anexo ao pdf no item no Portfólio.”

Comentários referentes ao Relatório Parcial

“O RP está aprovado porque mostra trabalho prático iniciado. Tem duas objeções: Não considera o trabalho da disciplina sobre Eratóstenes, o que é particularmente grave porque nele denunciamos o erro de atitude quando é afirmado que a medida foi de boa precisão. Ou seja, mesmo lendo o trabalho de outros, uma boa formação deveria levar a aluna ao mesmo trabalho crítico que fizemos. Por isto é preciso que venha a conversar com o coordenador para ver bem o conceito de erro de medição.

Segundo, não explica o porquê de cada referência, falta o resumo do conteúdo e o que dela é que foi utilizado para o trabalho.”