Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra

Autor: André Luiz Mendes Vinagre
Orientador: José J. Lunazzi

Introdução

Há mais de dois mil anos, Eratóstenes foi o primeiro homem a descobrir as dimensões da terra, utilizando um método bem simples como você poderá ver na primeira parte desse trabalho. No entanto, na época não se tinha noção exata do erro envolvido nas medidas por ele realizadas, conseqüentemente não foi possível avaliar a qualidade do resultado. Nosso trabalho aborda também essa última questão.

Outras pessoas calcularam as dimensões da terra, utilizando outros métodos que vamos comentar sem muita ênfase.

Hoje existem meios bem mais avançados para se determinar as dimensões da terra, mas a época das grandes descobertas essas medidas eram de importância crucial.

Esse foi um problema para Cristóvão Colombo antes de navegar pelos mares em busca de um caminho alternativo para índias. Afinal de contas, precisaria prever a quantidade de recursos necessária a sua viagem, se a distância percorrida fosse maior do que o previsto, possivelmente os tripulantes morreriam de fome.

Vale a pena rever o problema desse grande navegador.

Quem foi Eratóstenes?

Pode parecer estranho o fato de um homem que nos deu tantas respostas ter deixado tantas perguntas a responder sobre si mesmo. Pois Eratóstenes continua sendo um mistério para nós. Apesar de todos os livros que escreveu, não deixou documentos pessoais, diários ou dados sobre seu nascimento. É claro que muita coisa já se escreveu sobre sua época. Historiadores clássicos e científicos conhecem bem o tempo em que Eratóstenes viveu e reuniram aqui e ali fragmentos de informação sobre ele, principalmente sobre os anos em que trabalhou como bibliotecário-chefe na grande biblioteca de Alexandria, no Egito.

Há muita coisa que não sabemos e sem dúvida nunca saberemos. Essas lacunas existem em toda história. Não podemos preenche-las inventando fatos, mas podemos de forma responsável e honesta, tentar imaginar com base naquilo que já se conhece. Investigar a vida de um homem notável como foi Eratóstenes é um desafio dos mais agradáveis, pois sua curiosidade da vida é contagiante.

Eratóstenes viveu há mais de dois mil anos. Nasceu em 275 AC. Seus pais eram gregos e moravam em Cirene, uma cidade grega situada em um ponto da costa da África onde hoje é a Líbia.

Mesmo quando pequeno Eratóstenes era muito curioso e admirava-se com tudo que via. Quando começou a falar fazia muitas perguntas sobre tudo. Queria saber sobre o sol, os ventos, as estrelas, dentre outras coisas.

Figura 1 - Mapa da época

Quando tinha seis anos, foi para escola, naquele tempo se chamava, ginásio. Todas as manhãs ia para o ginásio levado por um escravo da família.

No ginásio não havia carteiras, nem papel, nem lápis. Meninas nem pensar. Elas ficavam em casa aprendendo a cozinhar e a tecer. Os alunos usavam estiletes para escrever em placas de cera.

Lá se aprendia de tudo, a ler, escrever, aritmética, música, poesia e até mesmo tocar lira enquanto recitavam poesias.

Eratóstenes era bom em todas essas coisas, mas era melhor em matemática e apaixonado por geografia. Sobre esse tema fazia muitas perguntas a seus professores. Algumas das quais ele mesmo haveria de responder.

Quando completou o ginásio, Eratóstenes se mudou para a famosa capital da Grécia, Atenas. Lá estudou muito sobre matemática, filosofia e ciências.

Além de um grande perguntador, Eratóstenes era um incrível fazedor de listas. Gostava muito de fazer listas. Era uma boa maneira de organizar as informações de modo que fossem úteis também as outras pessoas. Fez umas listas de todas as datas importantes da Grécia, uma lista de todos os vencedores dos jogos olímpicos. Então, começou a escrever livros. Escreveu um sobre comédias, outro sobre história e sobre constelações. Foi a partir daí que seu nome começou a ficar conhecido.

Quando Eratóstenes completou trinta anos, um rei chamado Ptolomeu III, o soberano do Egito, convidou-o para dar aulas particulares a seu filho na cidade de Alexandria. Para Eratóstenes isso foi excelente pois nessa cidade se encontravam a melhor biblioteca e o melhor museu do mundo. Não havia melhor lugar para pesquisar sobre as grandes questões da época.

Com todas as suas idéias e perguntas, Eratóstenes se sentiu em casa naquele lugar. Chegou inclusive a ser chamado de Pentatleta, devido aos seus múltiplos talentos.

Foi pouco tempo depois de sua chegada a Alexandria que adoeceu o bibliotecário-chefe da grande biblioteca, posto para o qual foi indicado. Agora, estava mais fácil encontrar as respostas a todas as suas perguntas. Dentre essas a que mais lhe interessava: a terra. Eratóstenes queria estudar mais sobre geografia.

Houve um tempo em que se imaginava que a terra era plana. Depois, durante um certo período, achou-se que tinha a forma de um cilindro, mas na época da Eratóstenes já se sabia que a terra era uma esfera. Mas ele queria saber mais sobre a terra, em especial saber qual era a circunferência da terra. Mas como poderia fazer ele para medir? Não dava para dar a volta ao mundo, não havia recursos, não se sabia dos perigos e obstáculos. Mas talvez houvesse uma outra maneira de se medir a terra.

Eratóstenes começou suas pesquisas na biblioteca de Alexandria e lá se deparou com um problema: as informações estavam separadas em muitos lugares diferentes. Com a intenção de organizar todas essas informações, ele percebeu que tinha que escrever o primeiro livro completo sobre geografia.

E mais, ele queria descobrir como medir a circunferência da terra e, sabia que seu livro não estaria completo sem isso.

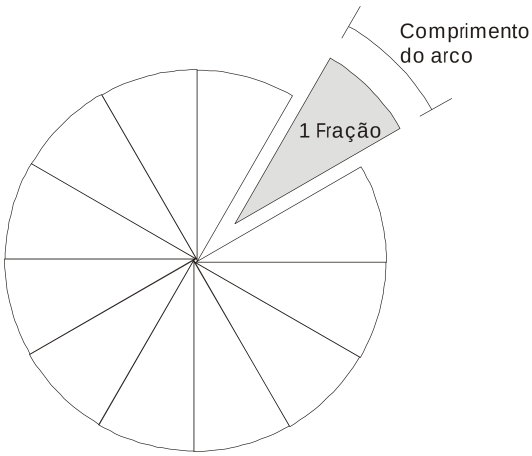


Figura 2 - Terra cortada ao meio e dividida em frações

Ninguém jamais pensara em medir o tamanho de uma circunferência tão grande quanto a terra – ninguém, a não ser Eratóstenes. Talvez ele tivesse imaginado a terra cortada ao meio e separada em diversas frações iguais. Se ele soubesse a quantidade de frações iguais e o comprimento do arco de uma dessas frações, bastaria multiplicar o comprimento desse arco pelo número de frações para obter o comprimento total da terra.

De que maneira Eratóstenes poderia descobrir quantas frações eram necessárias? Sabia que uma circunferência tem 360 graus, se ele descobrisse o ângulo de uma dessas frações poderia dividir 360 por esse ângulo e então encontrar o número de frações iguais que compõe o todo.

Eratóstenes imaginou uma das frações da terra com a borda exterior indo de Alexandria até Siena, uma cidade ao sul do Egito, hoje chamada Assua. Se ele conseguisse calcular a distância entre Alexandria e Siena, e se conseguisse medir o ângulo interno da fração que as duas cidades formavam, seria capaz de calcular a circunferência da terra. Mas de que jeito poderia calcular aquele ângulo?

Eratóstenes percebera que o sol seria de grande ajuda para solucionar o problema do ângulo e tinha razões para escolher a cidade de Siena. Ouvira dos homens de uma caravana que passara por Alexandria que no vigésimo primeiro dia de junho aconteceria o solstício de verão, e precisamente ao meio-dia o sol brilharia direto dentro de um certo poço em Siena e iluminaria seu fundo sem que nenhuma sombra se projetasse em suas paredes.

Entretanto, em Alexandria, exatamente à mesma hora, havia sombras sendo projetadas.

Eratóstenes sabia o motivo: porque a Terra é redonda. Se fosse plana, o sol incidiria em todos os lugares formando o mesmo ângulo, e as sombras seriam sempre iguais.

Eratóstenes tinha alguns conhecimentos sobre ângulos e sombras.

Sabia que é possível medir o ângulo do sol pela sombra projetada pelos objetos. E sabia também, por causa dos textos matemáticos que lera, que o ângulo do sol em

Alexandria ao meio-dia de 21 de junho formaria, lá no centro da terra, a fração da terra formada pela distância entre Alexandria e Siena.

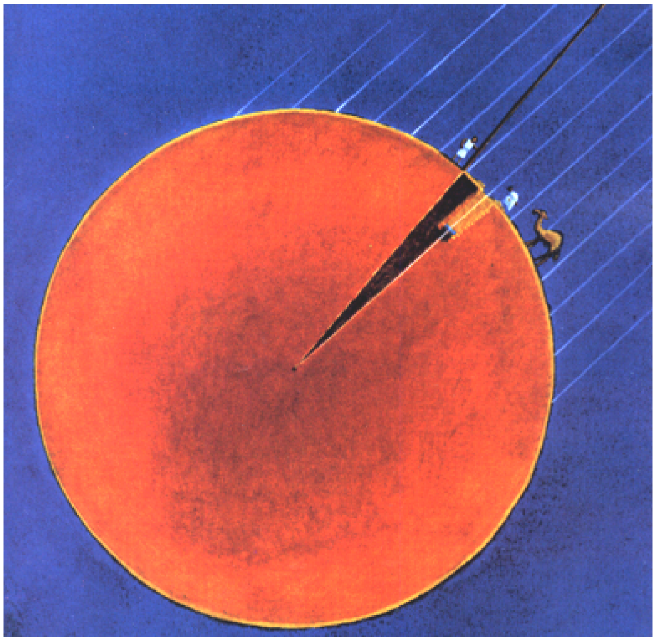


Figura 3 - Representação da fração formada pelas cidades de Alexandria e Siena

Assim, Eratóstenes saiu da biblioteca em vinte e um de junho alguns minutos antes do meio dia para medir a sombra exatamente naquele momento em Alexandria, enquanto, em Siena, no mesmo instante, a luz do sol entrava a pino dentro do poço. Ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus. Depois, dividiu 360 por 7,2, o que dá 50. Agora, sabia que eram necessárias 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da Terra.

No entanto, ele ainda não tinha terminado. Faltava descobrir qual era a extensão do arco dessa fração: a distância entre as duas cidades.

Depois, só teria que multiplicar esse número por 50 para descobrir a medida do contorno de toda a terra.

Inicialmente Eratóstenes tentou fazer essa medida com camelos, mas eles eram um problema.

Os camelos eram o principal meio de transporte do deserto e Eratóstenes tinha planejado medir a distância entre as cidades calculando quanto tempo os camelos levariam para ir de uma para a outra. Achava que esses animais seriam perfeitos para isso. Mas esqueceu como eles são difíceis de controlar.

Algumas caravanas de camelos seguiam lentamente, outras iam depressa demais, alguns camelos disparavam na direção errada.

Por mais que tentasse, não conseguia registrar tempos de viagens realizadas com camelos que fossem suficientemente precisos e servissem para suas equações matemáticas.

Por fim, acabou pedindo ajuda ao rei.

Perguntou ao rei se poderia utilizar os serviços de seus melhores bematistas – agrimensores trinados para caminhar com passos sempre do mesmo tamanho. Desse modo, as distâncias lineares poderiam ser medidas com uma certa precisão.

O rei consentiu. E os bematistas fizeram esse trabalho. Eratóstenes descobriu que a distância entre Alexandria e Siena era de cinco mil estádios. O estádio era uma antiga medida de comprimento equivalente à extensão de um campo grego de jogos esportivos – ou estádio. Mas podia variar ligeiramente. A unidade de medida que Eratóstenes usou tinha pouco mais de 157 metros.

Eratóstenes agora podia calcular a circunferência da terra que tinha 250.000 estádios, ou 39.250 quilômetros. Quando a terra foi novamente medida no nosso século, havia apenas uma diferença de cerca de 320 quilômetros entre o resultado atual e o que Eratóstenes obteve mais de dois mil anos atrás!

As medições de Eratóstenes proporcionaram a criação do primeiro mapa da terra baseado em cálculos matemáticos.

Seu livro Geographika, o primeiro livro de geografia do mundo, agora estava completo.

Eratóstenes morreu com 81 anos, em Alexandria.

A idéia de Eratóstenes

Eratóstenes concebeu um jeito para calcular a circunferência da terra. Abaixo, vamos analisar mais detalhadamente a sua idéia.

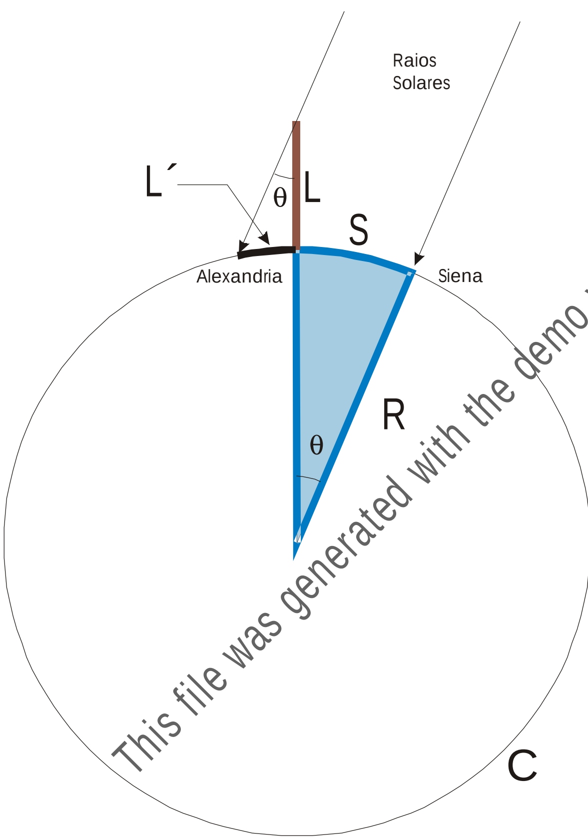


Figura 4 - Esquema da idéia de Eratóstenes

Vamos a partir do esquema da figura ao lado definir as grandezas envolvidas no problema:

- S é a distância entre Siena e Alexandria;

- θ é o ângulo formado da fração formada pelas cidades de Siena e Alexandria;

- C é a circunferência da terra;

- D é o diâmetro da terra;

- R é o raio da terra;

- L é o comprimento do poste;

- L´ é o comprimento da sombra do poste;

Podemos calcular a circunferência da terra, utilizando a seguinte relação trigonométrica:

$$\frac{S}{C} = \frac{q}{2p}$$

Ou seja, a razão entre a distância das cidades (S) e a circunferência da terra (C) é igual à razão do ângulo formado pelas cidades e o ângulo total da circunferência terrestre.

Obs.: aqui estamos realizando os cálculos considerando os ângulos expresso em radianos.

Isolando C teremos a seguinte relação para o comprimento da circunferência da terra:

$$C = \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)\cdot S$$

Bem, para calcular a circunferência necessitamos do ângulo θ e de S.

O ângulo entre as cidades (θ)

Mais uma vez observando o esquema acima, podem notar que o poste, sua sombra e a linha imaginária dos raios solares formam um triângulo, onde um dos ângulos é exatamente o ângulo θ. Assim, necessitamos apenas conhecer o comprimento do poste (L) e o comprimento de sua sombra (L´) para conhecer o ângulo θ.

Para isso é necessário lembrar que do conceito de tangente.

$$\tan\left(\frac{L'}{L}\right) = \theta$$

Isolando o ângulo θ teremos a seguinte relação

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L'}{L}\right)$$

Evidentemente não havia uma calculadora para resolver a inversa da tangente, o que Eratóstenes utilizou foram tabelas com a relação entre o ângulo e a razão do comprimento do arco pelo raio.

O tamanho do poste e da sombra é desconhecido, a única informação que temos após nossas pesquisas é que o ângulo calculado é de $7{,}2^{o}$.

A distância entre as cidades (S)

A distância entre as cidades é obtida pela multiplicação do número passos dados de Siena até Alexandria pelos Bematistas do Rei pelo comprimento de cada passo que supostamente tem o mesmo tamanho.

A informação que temos é que a distância encontrada é de 5000 estádios, como dissemos era a unidade de medida utilizada na época.

Obter o comprimento da circunferência da terra com essas informações se torna bem simples.

Cálculo do comprimento da circunferência da terra, seu diâmetro e raio

Vamos converter o ângulo encontrado por Eratóstenes de graus para radianos, isso pode ser feito pela seguinte relação trigonométrica:

$$\theta(rad) = \frac{\theta(graus)}{360}\cdot 2\pi$$

$$\theta(rad) = \frac{7,2}{360} \cdot 2\pi$$

$$\theta(rad) = 0,02 \cdot 2\pi$$

Agora substituímos na equação abaixo para calcular a circunferência:

$$C = \left(\frac{2\pi}{0,02 \cdot 2\pi}\right) \cdot 5.000$$

$$C = \left(\frac{1}{0,02}\right) \cdot 5.000$$

$$C = 50 \cdot 5.000$$

$$C = 250.000 \text{ estádios}$$

Bem agora podemos calcular a relação o comprimento em quilômetros multiplicando o resultado por 0,157 km o que resulta:

$$C = 39.250 \text{ km}$$

O raio da terra pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$C = 2\pi R$$

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

$$R = \frac{39.250}{6,28}$$

$$R = 6.247 \text{ km}$$

O diâmetro que é o dobro do raio é de 12.494 km.

Atualmente medidas obtidas com sistemas sofisticados de medição mostram que o raio da terra é de 6370 km o que dá uma diferença de 123 km da medida de Eratóstenes. Porém, essa comparação não é muito adequada. Devemos descobrir qual o erro envolvido nas medidas de Eratóstenes inerentes ao método utilizado. Afinal de contas essa medida seria boa para ser utilizada na confecção de mapas?

Através do erro que poderemos saber a confiabilidade dessa medida para época e para as épocas futuras.

Os erros envolvidos nas medições de Eratóstenes

Uma outra maneira idêntica a anteriormente mostrada para se determinar o raio da terra é simplesmente utilizar a definição de ângulo (em radianos).

$$\theta = \frac{S}{R}$$

Ou ainda, isolando o R temos que $R = \dfrac{S}{\theta}$

Mas como todo problema físico sabemos que a medidas possuem um erro envolvido. Assim a distância entre Siena e Alexandria será $S \pm \Delta S$ e o ângulo medido em radianos será $\theta \pm \Delta\theta$.

Com essas considerações sabemos a faixa de intervalo na qual podemos espera o real valor do raio terrestre. Podemos esperar um raio máximo e um raio mínimo, considerando os erros.

$$R_{man} = \frac{S + \Delta S}{\theta - \Delta\theta}$$

$$R_{\min} = \frac{S - \Delta S}{\theta + \Delta\theta}$$

O erro envolvido no raio será dado por

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(R_{\max} - R_{\min}\right)$$

Agora basta substituir os valores de R_{max} e R_{min} na equação acima e obtemos:

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S+\Delta S}{\theta - \Delta\theta} - \frac{S-\Delta S}{\theta + \Delta\theta}\right)$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{(S+\Delta S)(\theta+\Delta\theta) - (S-\Delta S)(\theta-\Delta\theta)}{(\theta-\Delta\theta)(\theta+\Delta\theta)}\right)$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S\cdot\theta + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S + \Delta S\cdot\Delta\theta - S\cdot\theta + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S - \Delta S\cdot\Delta\theta}{(\theta^2 - \Delta\theta^2)}\right)$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S}{(\theta^2 - \Delta\theta^2)}\right)$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot S\cdot\Delta\theta + 2\cdot\theta\cdot\Delta S}{(\theta^2 - \Delta\theta^2)}\right)$$

$$\Delta R = \frac{S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S}{(\theta^2 - \Delta\theta^2)}$$

Observando a relação acima notamos que para calcular efetivamente o erro na medida do raio terrestre precisamos conhecer o erro do ângulo e o erro no comprimento, uma vez que sabemos qual é a distância e o ângulo entre as cidades.

O Erro no ângulo θ

Analogamente ao que fizemos anteriormente devemos observar que o ângulo é determinado pela seguinte relação:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L'}{L}\right)$$

A medida do poste e da sombra envolve um certo erro. Assim, o comprimento do poste será L±ΔL e o comprimento da sombra será L´±ΔL´. Teremos assim um ângulo máximo e um ângulo mínimo de acordo com as seguintes relações:

$$\theta_{max} = \tan^{-1}\left(\frac{L' + \Delta L'}{L - \Delta L}\right)$$

$$\theta_{min} = \tan^{-1}\left(\frac{L' - \Delta L'}{L + \Delta L}\right)$$

O erro no ângulo será dado da seguinte maneira:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\theta_{max} - \theta_{min})$$

Então o erro no ângulo será dado por $\Delta\theta = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{L' + \Delta L'}{L - \Delta L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L' - \Delta L'}{L + \Delta L}\right)\right]$

Temos então o primeiro limite para se determinar o erro na medição do ângulo. Não sabemos o comprimento do poste, o comprimento da sombra e muito menos os erros envolvidos nessas medidas.

As fontes de erros são diversas: o poste poderia não estar na horizontal, existência de penumbra, dentre outros.

Quando Eratóstenes concebeu seu método considerou o sol como se fosse uma fonte luminosa pontual e infinitamente distante. Se fosse esse o caso, os raios solares projetariam somente a sombra do poste sem a existência de penumbra e não seria uma fonte de erro na medição do comprimento, como indicado na figura ao lado.

No entanto, o sol é uma fonte extensa que está distante cerca de 1,5 . 10^8 km da terra e apresenta um diâmetro angular de 0,5°. Isso leva fatalmente a existência da também da penumbra projetada, dificultando a medição do comprimento da sombra projetada do poste.

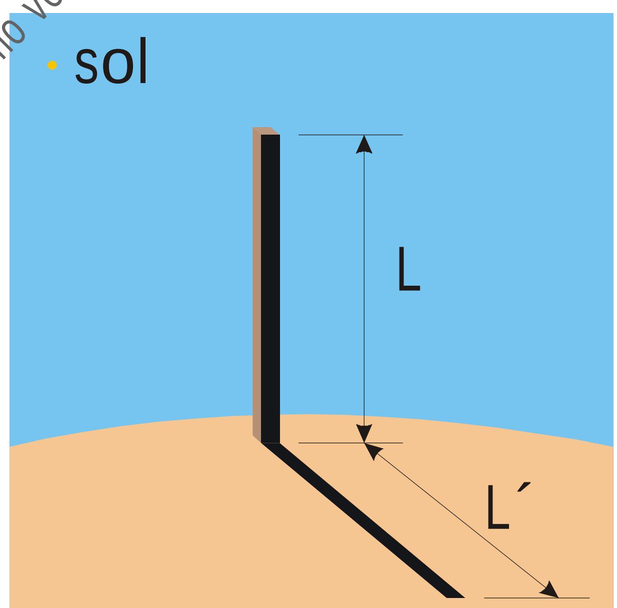


Figura 5 - Sombra projetada sem penumbra. Sol como fonte pontual e infinitamente distante.

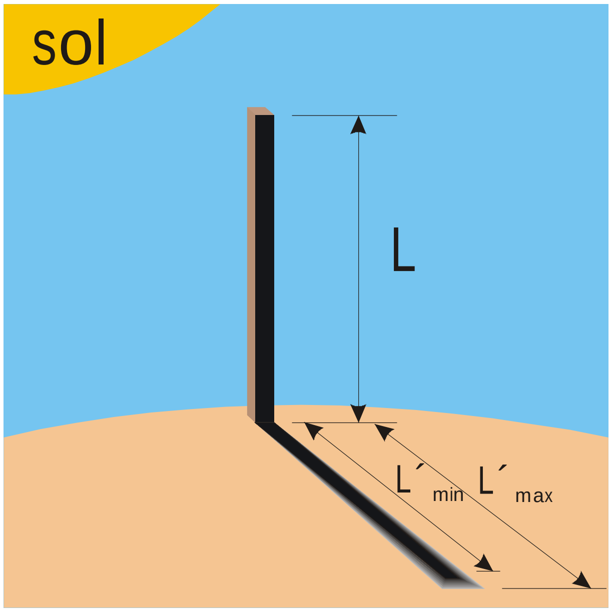


Figura 6 - Situação real. Sombra e penumbra projetas pelo sol.

Observando a figura à esquerda podemos verificar a dificuldade na medição. O valor medido da sombra estaria compreendido entre um valor máximo e um valor mínimo pela dificuldade de se definir um extremo.

Analisando com mais cuidado, podemos dizer esse fato implica um o erro no ângulo descoberto de no mínimo 0,5º dividido por dois que é exatamente o diâmetro angular do sol.

Observe o esquema da figura 7 abaixo. Ele permite um melhor entendimento do erro existente devido a projeção da penumbra.

Como foi dito o ângulo medido por Eratóstenes foi de 7,2° e o erro devido a penumbra é de no mínimo **3,5%**.

Para evitar o impacto desse erro Eratóstenes deveria medir frações maiores da terra, o que levaria a medição de um ângulo maior, reduzindo o impacto dessa fonte de erros. No entanto, isso para ele se tornaria um problema porque deveria caminhar muito mais para obter a distância entre os pontos de medição.

Existe ainda uma alternativa para se calcular o ângulo θ, utilizando as estrelas como referência. Esse método será esclarecido com mais detalhes um pouco mais a frente.

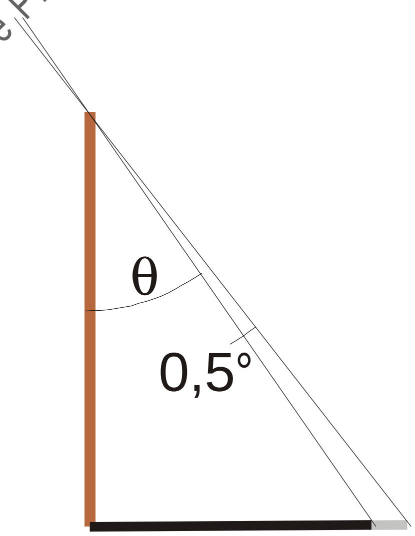


Figura 7 - Erro ocasionado pela existência da penumbra

O erro na distância entre as cidades S

A distância entre as cidades de Siena e Alexandria depende da quantidade de passos e o comprimento de cada passo.

$$S = N_P \cdot S'$$

Onde N_P é o número de passos dados e S´ é o comprimento de cada passo. O erro no comprimento será dado por $\Delta S = \frac{1}{2}\left(S_{\max} - S_{\min}\right)$. Sabemos que as relações para distância máxima e mínima:

$$S_{\max} = \left(N_P + \Delta N_P\right)\cdot\left(S' + \Delta S'\right)$$

$$S_{\min} = \left(N_P - \Delta N_P\right)\cdot\left(S' - \Delta S'\right)$$

Dessa forma, obtemos o valor para ΔS dado pela seguinte expressão:

$$\Delta S = N_P \cdot \Delta S' + S' \cdot \Delta N_P$$

Mais uma vez temos um limite, não sabemos a quantidade de passos dados de Siena até Alexandria, bem como não sabemos o tamanho de um passo e muito menos os erros envolvidos na questão.

O erro dessas medidas deveria ser calculado da seguinte maneira: O número de passos deveria ser a média de vários Bematistas e o erro deveria ser o desvio padrão. O mesmo para o comprimento do passo, seria necessário uma média de vários outros comprimentos de passos de diversos bematistas e o erro deveria ser o desvio padrão.

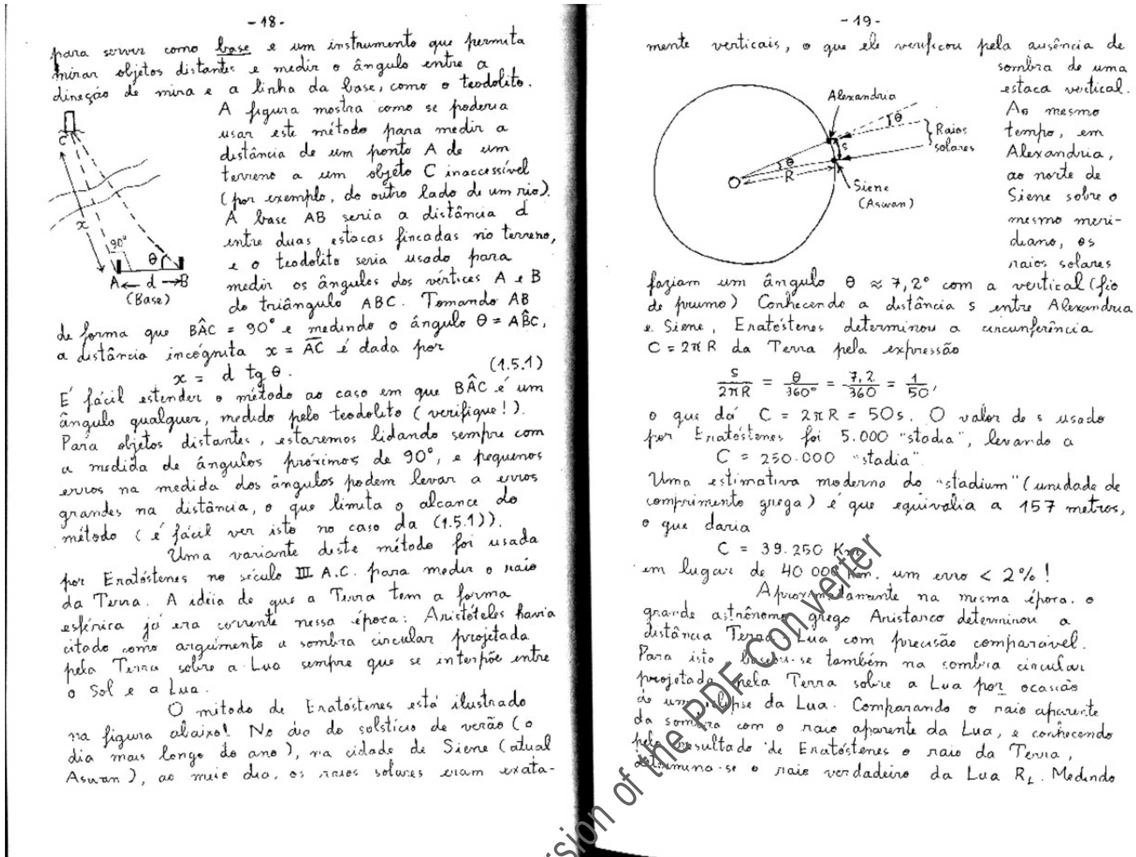
As fontes de erros são diversas: falta de linearidade no percurso, erro na contagem dos passos, variação da distância entre os passos, dentre outros.

Com essa carência de informação não nos restas muitas opções para verificar o erro envolvido no método de Eratóstenes. Mas podemos fazer estimativas.

Cabe salientar que na maior parte das referências sobre Eratóstenes, considera que o fato de Siena e Alexandria não pertencerem ao mesmo meridiano seria uma fonte de erro. Isso é em parte um engano. Na verdade qualquer lugar que ele resolvesse realizar o cálculo o resultado seria o mesmo. Isso ocorre porque o sol incide perpendicularmente em Siena ao meio-dia. Claro que em outros locais fora do meridiano de Siena deveria realizar a medição quando fosse meio-dia em Siena e não quando fosse meio-dia no local.

Mas como poderia Eratóstenes saber quando seria meio-dia em Siena? Não sabia. Ele mediu quando o sol estava a pino sobre Alexandria. E por isso o fato das cidades não estarem no mesmo meridiano constituiu uma outra fonte de erro sobre a distância que deveria medir. Em outras palavras, deveria medir a distância entre Alexandria e o local que se encontra no mesmo meridiano que Alexandria, ou seja, um pouco mais a oeste de Siena.

No livro de H. Moysés Nussenzveig, chamado Curso de Física Básica, ele comenta o trabalho de Eratóstenes, mas não faz referência a qualquer tipo de erro existente no método. Observe o texto na íntegra na figura abaixo.



-18-

para servir como base e um instrumento que permita mirar objetos distantes e medir o ângulo entre a direção de mira e a linha da base, como o teodolito.

A figura mostra como se poderia usar este método para medir a distância de um ponto A de um terreno a um objeto C inaccessível (por exemplo, do outro lado de um rio). A base AB seria a distância d entre duas estacas fincadas no terreno, e o teodolito seria usado para medir os ângulos dos vértices A e B do triângulo ABC. Tomando AB de forma que $B\hat{A}C = 90°$ e medindo o ângulo $\theta = A\hat{B}C$, a distância incógnita $x = \overline{AC}$ é dada por

$$x = d \operatorname{tg} \theta . \tag{1.5.1}$$

É fácil estender o método ao caso em que $B\hat{A}C$ é um ângulo qualquer, medido pelo teodolito (verifique!). Para objetos distantes, estaremos lidando sempre com a medida de ângulos próximos de 90°, e pequenos erros na medida dos ângulos podem levar a erros grandes na distância, o que limita o alcance do método (é fácil ver isto no caso da (1.5.1)).

Uma variante deste método foi usada por Eratóstenes no século III A.C. para medir o raio da Terra. A ideia de que a Terra tem a forma esférica já era corrente nessa época: Aristóteles havia citado como argumento a sombra circular projetada pela Terra sobre a Lua sempre que se interpõe entre o Sol e a Lua.

O método de Eratóstenes está ilustrado na figura abaixo. No dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano), na cidade de Siene (atual Asuan), ao meio dia, os raios solares eram exata-

-19-

mente verticais, o que ele verificou pela ausência de sombra de uma estaca vertical. Ao mesmo tempo, em Alexandria, ao norte de Siene sobre o mesmo meridiano, os raios solares faziam um ângulo $\theta \approx 7{,}2°$ com a vertical (fio de prumo). Conhecendo a distância s entre Alexandria e Siene, Eratóstenes determinou a circunferência $C = 2\pi R$ da Terra pela expressão

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\theta}{360°} = \frac{7{,}2}{360} = \frac{1}{50},$$

o que dá $C = 2\pi R = 50s$. O valor de s usado por Eratóstenes foi 5.000 "stadia", levando a

$$C = 250.000 \text{ "stadia"}.$$

Uma estimativa moderna do "stadium" (unidade de comprimento grega) é que equivalia a 157 metros, o que daria

$$C = 39.250 \text{ Km}$$

em lugar de 40 000 Km, um erro < 2%!

Aproximadamente na mesma época, o grande astrônomo grego Aristarco determinou a distância Terra-Lua com precisão comparável. Para isto, baseou-se também na sombra circular projetada pela Terra sobre a Lua por ocasião de um eclipse da Lua. Comparando o raio aparente da sombra com o raio aparente da Lua, e conhecendo pelo resultado de Eratóstenes o raio da Terra, determina-se o raio verdadeiro da Lua R_L. Medindo

Estimativa do erro

Vamos admitir um erro de 10% no ângulo θ e um erro de 20% na distância S. Podemos escrever as seguintes relações:

$$\Delta S = \frac{1}{5} \cdot S$$

$$\Delta q = \frac{1}{10} \cdot q$$

Mostramos que o erro no raio da terra é dado por

$$\Delta R = \frac{S \cdot \Delta q + q \cdot \Delta S}{\left(q^2 - \Delta q^2\right)}$$

Substituindo os valores de Δθ e ΔS na equação acima encontramos

$$\Delta R = \frac{S \cdot \frac{q}{10} + q \cdot \frac{S}{5}}{\left(q^2 - \left(\frac{q}{10} \right)^2 \right)}$$

$$\Delta R = \frac{\frac{S \cdot q + 2 \cdot S \cdot q}{10}}{\left(q^2 - \frac{q^2}{10^2} \right)}$$

$$\Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot q}{10}}{\left(q^2 - \frac{q^2}{100} \right)}$$

$$\Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot q}{10}}{\left(\frac{100 \cdot q^2 - q^2}{100} \right)}$$

$$\Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot q}{10}}{\left(\frac{99 \cdot q^2}{100} \right)}$$

$$\Delta R = \frac{3 \cdot S \cdot q}{10} \cdot \frac{100}{99 \cdot q^2}$$

$$\Delta R = \frac{3 \cdot S}{1} \cdot \frac{10}{99 \cdot q}$$

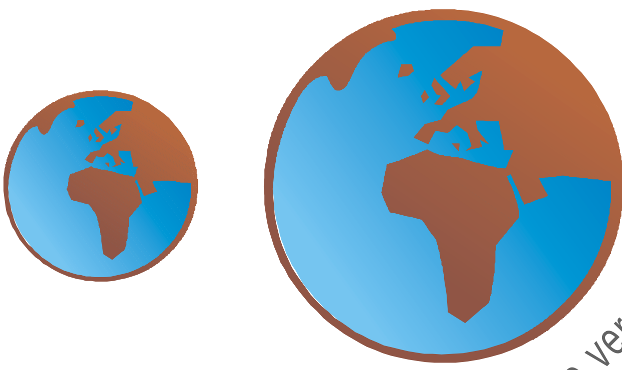
$$\Delta R = \frac{30 \cdot S}{99 \cdot q}$$

$$\Delta R = \frac{30}{99} \cdot R$$

$$\Delta R = 0{,}303 \cdot R$$

Esta estimativa nos diz que o erro do raio será de aproximadamente 30,3% do raio da terra. Em outras palavras o raio da terra será

R = 6247±1893 km



Para se ter uma idéia do impacto do erro podemos pensar em duas terras uma com o raio máximo possível e a outra com o raio mínimo possível. Observe a figura ao lado.

Figura 8 - Terra com raio máximo e raio mínimo

O método alternativo para a medição do ângulo q

Uma outra maneira para medir o ângulo θ com uma maior precisão é utilizar uma estrela como referência nas medições.

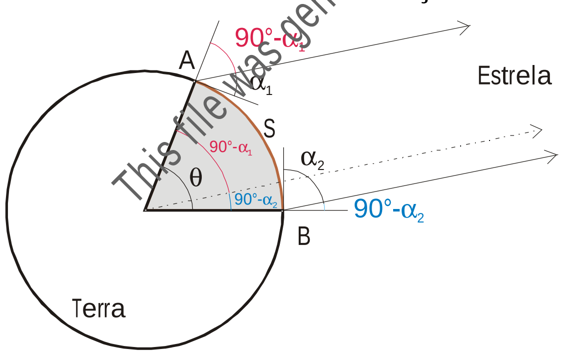


Figura 9 - Medição de q, utilizando uma estrela com referência.

Para explicar esse método observe a figura ao lado. Um observador se encontra em um local **A** enquanto um outro observador se encontra em outro local **B**. Os dois locais **A** e **B** se encontram no mesmo meridiano, separados pela distância S, formando a fração que possue o ângulo θ que desejamos descobrir.

Cada observador mede o ângulo entre estrela utilizada como referência e a horizontal. Assim, o observador **A** medirá um ângulo α_1 e o observador **B** medirá um ângulo

α_2. Evidentemente, as medidas devem ser realizadas num mesmo instante, ou então, pode-se escolher uma estrela permaneça praticamente no mesmo lugar com a rotação da terra, como a estrela polar do norte.

Observe que em cada um dos lugares de onde se observa a estrela o ângulo formado com a vertical é (90° - α_1) para o lugar **A** e (90° - α_2) para o lugar **B**.

Pela simples observação da figura acima percebemos facilmente que

$\theta = (90° - \alpha_1) + (90° - \alpha_2)$ ou simplesmente

$\theta = \alpha_2 + \alpha_1$ (esta equação tinha erro de sinal, que foi notado por um leitor, em 2008)

Outras pessoas utilizaram esse método, como comentaremos mais adiante.

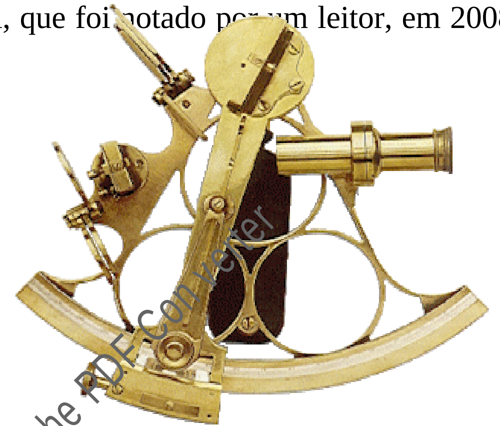


Figura 10 - Sextante

A questão que resta responder é como poderíamos medir o ângulo. Uma idéia criada pelo Prof. Lunazzi é utilizar o Sextante. Esse instrumento é capaz de medir ângulos com a precisão de segundos.

O funcionamento do ***sextante*** é simples. O objetivo é medir um ângulo entre dois objetos. Pega-se firme o instrumento e visa-se o horizonte através da *luneta* e movendo a *haste* temos de levar a imagem refletida do astro a coincidir com a imagem do horizonte visada diretamente. Se o astro visado é grande, como o sol ou a lua, a coincidência com o horizonte faz-se pelo limbo (borda) superior ou inferior do astro. A *haste* indica no *limbo* do ***sextante*** o valor do ângulo medido.

Experimento

Como podemos saber se fizemos uma boa estimativa dos erros da distância e do ângulo entre as cidades de Siena e Alexandria?

Existe um grupo na internet, denominado "Youth Net" que organiza a realização de experimentos onde podem participar pessoas de todo o mundo. Um desses experimentos envolve a reprodução do método adotado por Eratóstenes para determinar a circunferência da terra, com algumas adaptações. O endereço do site pode ser encontrado nas referências mais a frente.

Figura 11 - Reprodução do experimento de Eratóstenes

Depois de tudo pronto, os jovens que realizam seus experimentos remetem os resultados com as medições experimentais para os organizadores do experimento que os armazena e os apresenta na página.

Basicamente o método utilizado pelos jovens é o seguinte: primeiramente com um poste na vertical é medido o ângulo formado pelo poste e a sombra projetado, exatamente ao meio-dia. Para se colocar o poste na vertical é utilizado um prumo ou um nível.

Sendo o experimento realizado no equinócio, os raios solares incidem perpendicularmente ao equador, como em Siena. Assim, utilizando um mapa ou Atlas é verificado qual a distância do local de medição e o equador.

Os dados experimentais se encontram no site e estou apenas colocando de forma resumida os resultados na tabela a seguir. Esses dados são referentes aos experimentos realizados em setembro de 2002.

Mês Experimento: Setembro de 2002

Escola	Local	Data	Distância do Equador	Ângulo (graus)	Circunf.(km)
Montessori Children's House	Fort Worth, Texas	19/set/02	3621,0	33,0	39501,8
Bayside Elementary	Stevensville, Maryland	20/set/02	4316,3	30,0	51795,0
Jacobs Academy	5724 Kinlock Place, Fort Wayne, IN 46835	21/set/02	4578,3	41,2	40004,3
Cracchiolo Homeschool	Boca Raton, Florida	22/set/02	2917,7	26,5	39694,3
Flower Mound High School	Flower Mound, Texas, USA	23/set/02	3650,0	32,0	41062,5
Lanier Middle School	Buford, Ga	23/set/02	3788,4	32,0	42619,4
Rosedell Elementary	southern California	23/set/02	4023,4	30,0	48280,2
Rosedell Elementary	southern California	23/set/02	4023,4	45,0	32186,8
Rosedell Elementary	saugus, california	23/set/02	4023,4	40,0	36210,2
Rosedell Elementary	saugus, california	23/set/02	4023,4	40,0	36210,2
Rosedell Elementary	southern California	23/set/02	4023,4	48,0	30175,1
Rosedell Elementary	saugus, california	23/set/02	4023,4	30,0	48280,2
Rosedell Elementary	saugus, california	23/set/02	4023,4	40,0	36210,2
Rosedell	saugus union	23/set/02	4023,4	40,0	36210,2
Rosedell Elementary	southern California	23/set/02	4023,4	36,0	40233,5
Torrington High School	Torrington High School	23/set/02	4636,5	42,7	39115,7
E. B. Aycock Middle School	Greenville, North Carolina, United States	24/set/02	3942,9	35,0	40555,3
Jane Stenson School	Skokie, Illinois	25/set/02	4655,8	43,0	38979,0
Bayside Elementary School	301 Church Street, Stevensville, Maryland, USA	25/set/02	4316,3	43,0	36136,0
Pacific Christian School	Santa Maria, CA	25/set/02	3867,2	34,0	40947,2
Batesville Middle School	955 Water Street Batesville Arkansas 72501	27/set/02	3937,6	35,0	40501,4
Stovner Upper High School	Oslo, Norway	30/set/02	6670,0	60,0	40020,0

Média	**39769,5**
Desvio Padrão	**4960,3**

Observando o resultado acima, podemos ver que existe um erro razoável. Temos as seguintes análises:

Para 68% das medidas o erro será de 12,5%, para 95% das medidas o erro será de 24,9% e para 99,7% o erro será de 37%.

Ora nossa estimativa foi de 30,3% e considerando a precariedade de recursos da época não consideramos muito elevada essa estimativa.

Sugerimos que você mesmo realize esse experimento, de acordo com o método acima, ou então utilize um sextante para medir o ângulo θ e um GPS para medir as distâncias entre os locais.

Medições da terra além de Eratóstenes

Os gregos dos períodos arcaico e clássico tiveram idéias variadas quanto à forma e tamanho da Terra. Homero sugeriu uma forma de um disco plano; Pitágoras e Aristóteles advogavam uma forma esférica. Pitágoras era um matemático que considerava a esfera a figura geométrica mais perfeita, sendo para ele, portanto, natural que os deuses dessem esta forma ao mundo. Já Anaximenes acreditava que a Terra tinha uma forma retangular.

A idéia de uma Terra esférica foi predominante entre os Gregos. A tarefa seguinte e que ocupou muitas mentes foi a de determinar seu tamanho. Platão estimou a circunferência da Terra como sendo de umas 64360 km. Arquimedes estimou em 48270 km. Estes valores, contudo, não passavam muito do campo da mera especulação. Coube a Eratóstenes determinar o tamanho da Terra usando medidas objetivas.

Outro Grego antigo a estimar o tamanho do globo foi Posidonius. Ele utilizou uma estrela que era circumpolar quando vista da cidade de Rodes, tangenciando o horizonte no instante da culminação inferior. Esta mesma estrela teve então sua altura medida em Alexandria e, conhecida, a distância entre as duas cidades, foi possível a Posidonius determinar um valor de 38616 km para a circunferência da Terra. Outro filósofo chamado Estrabón revisou o método de Posidonius e encontrou um valor substancialmente menor: 28962 km. Este valor foi o adotado por Ptolomeu, cujo trabalho e modelo de cosmos foi adotado na Europa ao longo da Idade Média. Foi possivelmente graças a esta subestimativa da circunferência do globo que Cristóvão Colombo foi levado a crer que o Extremo Oriente estaria a apenas umas 3 ou 4 mil milhas a oeste da Europa. Somente no século 15 que o valor aceito por Ptolomeu foi revisado pelo cartógrafo finlandês Mercator.

O Califa Árabe El Ma'mun que governou Bagdá de 813 a 833 D.C. enviou uma equipe de agrimensores para medir uma linha de norte a Sul e suas medidas foram equivalentes a de Eratóstenes.

Cristóvão Colombo e Eratóstenes

Tentamos em vão contato com Salamanca com o intuito de saber mais sobre a discussão de Colombo em Salamanca para provar suas teorias a respeito de como chegar as índias navegando pelo oeste.

Quando Colombo decidiu afinal ir da Espanha para as Índias navegando na direção oeste, deveria ter prestado mais atenção aos cálculos de Eratóstenes. Em vez disso, examinou mapas feitos por geógrafos posteriores a Eratóstenes. Esses geógrafos como verificamos tomaram como base os cálculos de Estrabón que cometeu erros graves e mostraram o planeta com uma circunferência bem menor que a real. Segundo nossas pesquisas, cerca de 30% menor. Colombo pensava que a viagem para as índias seria rápida. Estava errado. Porém, se tivesse acreditado nas medições de Eratóstenes, que mostravam os mares do mundo parecerem tão intensos e as distâncias entre as terras tão vastas, talvez nem sequer tivesse feito a viagem.

Referência:

Sites:

1) **url:** http://sites.uol.com.br/sandroatini/eratoste.htm - **Data de Pesquisa:** 22/08/2002 – **Autor:** Alessandro Andreatini – **Título:** Alessandro Home Page;

2) **url:** http://www.terravista.pt/FerNoronha/8376/Eratos/Meridian.htm - **Data de Pesquisa:** 23/09/2002 – **Autor:** alunas do 2º colegial do Colégio Sagrado Coração de Jesus - São Paulo – **Título:** Trigonometria HP;

3) **url:** http://www.malhatlantica.pt/mat/Eratostenes.pdf - **Data de Pesquisa:** 23/09/2002 – **Autor:** João Vasco – **Título:** Eratóstenes de Cirene;

4) **url:** http://www.zenite.nu/menu08/0108.htm - **Data de Pesquisa:** 22/08/2002 – **Autor:** Astronomia no Zênite – **Título:** Astronomia no Zênite;

5) **url:** http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/aplic/aplicac.htm - **Data de Pesquisa:** 24/09/2002 – **Autor:** Ulysses Sodré – **Título:** Matemática Essencial: Aplicações da Matemática;

6) **url:** http://astronomy.tripod.com.br/mat1.2.htm - **Data de Pesquisa:** 22/08/2002 – **Autor:** Raphael Caliman de Castro – **Título:** Astronomy;

7) **url:** http://www.str.com.br/Scientia/astronomia.htm - **Data de Pesquisa:** 05/10/2002 – **Autor:** José Maria Filardo Bassalo – **Título:** Sociedade da Terra Redonda - Scientia: Astronomia na Idade Antiga;

8) **url:** http://www.fisica.uminho.pt/Pg_pessoais/epereira/Portugues/Cadeiras/FisicaI-LESI/Ano-2001-2002/Problemas/EspacoTempo-FisI-Out2001.pdf - **Data de Pesquisa:** 05/10/2002 – **Autor:** Edson Pereira – **Título:** Espaço-Tempo;

9) **url:** http://www.terravista.pt/Bilene/4331/geomcuriosidades.htm - **Data de Pesquisa:** 22/08/2002 – **Autor:** Leonelo Caldonazo – **Título:** GeomCuriosidades;

10) **url:** http://euclides.if.usp.br/~fmt405/apostila/helen8/node16.html - **Data de Pesquisa:** 18/10/2002 – **Autor:** Hugo Franco – **Título:** Evolução dos Conceitos da Física - FMT405;

11) **url:** http://www.matematica.br/historia/medida_raio_terra.html - **Data de Pesquisa:** 18/10/2002 – **Autor:** Fernanda Bührer Rizzato – **Título:** Imática – A Matemática Interativa na Internet;

12) **url:** http://www.uol.com.br/novaescola/ed/153_jun02/html/ciencias.htm - **Data de Pesquisa:** 18/10/2002 – **Autor:** Ricardo Prado – **Título:** Nova Escola On-Line;

13) **url:** http://www.expoente.com.br/professores/kalinke/Home%20page/Erast%C3%B3stenes.htm - **Data de Pesquisa:** 30/10/2002 – **Autor:** Marco Aurélio Kalinke – **Título:** Kalinke;

14) **url:** http://www.eso.org/outreach/spec-prog/aol/market/collaboration/erathostenes/ - **Data de Pesquisa:** 22/08/2002 – **Autor:** Bernard Pellequer – **Título:** Astronomy On-Line: How to measure the size of the Earth;

15) **url:** http://math.rice.edu/~ddonovan/Lessons/eratos.html - **Data de Pesquisa:** 30/10/2002 – **Autor:** Dennis P. Donovan – **Título:** Eratosthenes Measures Earth's Circumference;

16) **url:** http://www.youth.net/eratosthenes/welcome.html - **Data de Pesquisa:** 08/07/2002 – **Autor:** James D. Meinke – **Título:** Youth Net Homepage;

17) **url:** http://www.phys-astro.sonoma.edu/observatory/eratosthenes/ - **Data de Pesquisa:** 16/08/2002 – **Autor:** The SSU Observatory – **Título:** The Eratosthenes Project;

18) **url:** http://www.3villagecsd.k12.ny.us/wmhs/Departments/Math/OBrien/eros2.html - **Data de Pesquisa:** 19/07/2002 – **Autor:** Mike O´Brien – **Título:** The Math;

19) **url:** http://www.jimloy.com/astro/columbus.htm - **Data de Pesquisa:** 22/09/2002 – **Autor:** Jim Loy – **Título:** Columbus' Mistake;

20) **url:** http://www.phy6.org/stargaze/Scolumb.htm - **Data de Pesquisa:** 13/11/2002 – **Autor:** David P. Stern – **Título:** The Round Earth and Christopher Columbus;

21) **url:** http://www.anselm.edu/homepage/dbanach/erat.htm - **Data de Pesquisa:** 09/08/2002 – **Autor:** Julia E. Diggins – **Título:** David Banach's Homepage;

22) **url:** http://www.knowdeep.org/eratosthenes/ - **Data de Pesquisa:** 11/07/2002 – **Autor:** Knowdeep – **Título:** Eratosthenes Hub;

Livros:

1) O bibliotecário que mediu a terra – Kathryn Lasky – Ed. Salamandra – Rio de Janeiro, 2001

2) Eratosthenes of Cyrene – P. M. Fraser - London, Oxford University Press, 1971.

Filmes:

1) 1492 – A Conquista do Paraíso (ano de 1992)