

# Projeto para o curso de Instrumentação para Ensino F809 1º Semestre de 2002

## *Estudo da Dimensão Fractal de Esferas de Papel Amassado e Arruelas*

Francisco Clovis de Sousa Júnior [fclovis@ifi.unicamp.br](mailto:fclovis@ifi.unicamp.br)  
Orientador: Maurício Urban Kleinke [kleinke@ifi.unicamp.br](mailto:kleinke@ifi.unicamp.br)

### 1. Objetivo

Pretendemos neste trabalho introduzir conceitos básicos de fractais, abrangendo um pouco da história de sua conceitualização bem como o modelamento matemático da dimensão fractal de um objeto. Estaremos estimando, a partir da relação massa raio, a dimensão fractal de folhas papel amassado em forma de esferas e comparando com objetos de dimensão definida (esferas e folhas de papel). Também será sugerida uma análise inédita referente a fractalidade de arruelas.

### 2. Justificativas

O programa básico das disciplinas de Física Experimental I tem como objetivo central introduzir o estudante em técnicas de obtenção, tratamento e análise de dados obtidos em experimentos de Física bem como a apresentação dos resultados obtidos; isso envolve a manipulação de gráficos em escalas lineares e Logarítmicas, os métodos matemáticos de aproximação de curvas (Método de mínimos quadrados) e, as teorias introdutórias de cálculo de erros. [Apêndice 1, 2 e 3]

O que se observa é que em grande parte esses experimentos abrangem apenas conceitos de mecânica. Pretendemos aqui, ilustrar um experimento que abrange grande parte do exigido num primeiro curso de Laboratório de Física e que aborda uma nova classe de fenômenos. Estaremos falando da geometria fractal, um assunto geralmente nunca abordado nos cursos de formação. É bom ressaltar que isso já é tratado em alguns cursos de graduação em nosso país [Apêndice 3].

### 3. Introdução

No espaço Euclidiano podemos imaginar objetos que têm dimensão zero (0D), uma dimensão (1D), duas dimensões (2D) e três dimensões (3D); dizemos que nesse espaço os objetos têm dimensão inteira (veja a figura 1). Porém, a maior parte da natureza é mais complicada. Na natureza a matéria está distribuída, nas mais variadas formas, estruturas e arranjos espaciais, com os mais diversos graus de aleatoriedade e complexidade que se possa imaginar, em qualquer que seja a escala considerada. Por isso nos deparamos em várias áreas do conhecimento humano com a necessidade de descrever e entender o processo de formação dessas estruturas face aos fenômenos que nelas acontecem. Por exemplo, a determinação do comprimento do litoral de uma ilha ou uma baía, ou das ramificações de uma bacia hidrográfica, bem como a avaliação precisa da forma, da área e do volume de regiões geográficas com escarpas, montanhas e vales.

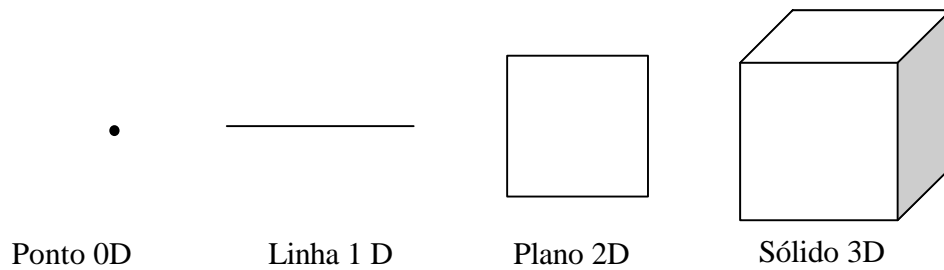


Figura 1: Objetos de dimensão inteira, euclidiana.

Para analisar e descrever as irregularidades e a complexidade das formas no mundo natural, o matemático francês Benoit Mandelbrot criou a Geometria Fractal [1]. Este nome está associado ao adjetivo latim *fractus* cujo verbo correspondente é *frangere*, ou seja, quebrar, criar irregularidades.

A propriedade mais notável dessas formas “fractais” é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala, de modo que suas partes, em qualquer escala, são na forma, semelhantes ao todo. Mandelbrot ilustra essa propriedade da “auto-similaridade” arrancando um pedaço de uma couve-flor e indicando que por si mesmo, esse pedaço se parece exatamente com uma pequena couve-flor. Desse modo, cada parte se parece com a hortaliça inteira. A forma de todo é semelhante a si em todos os níveis de escala.

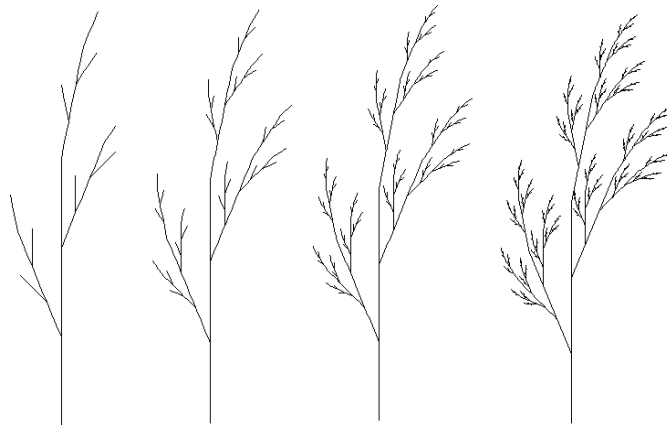


Figura 2: Exemplo de geração de um fractal observe como a forma se mantém a mesma quando mudamos a escala de observação.

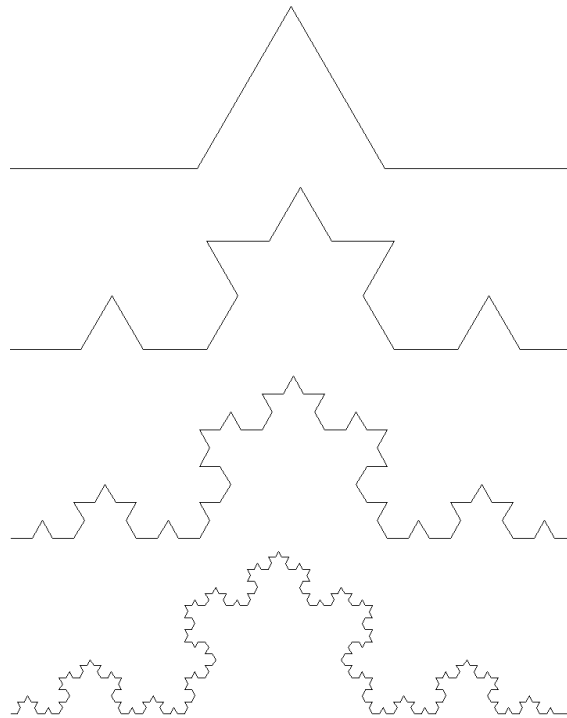


Figura 3: Geração das Curvas de Koch, um dos fractais mais conhecidos

### 3.1 Caos e Fractais:

Quando Mandelbrot publicou seu livro em meados da década de 70, ele ainda não estava ciente das conexões entre a geometria fractal e a teoria do caos, mas não demorou muito para que descobrissem que os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Atualmente se tem encontrado relações entre fractais e indicadores econômicos, em pequena escala de observação mostrando como o estudo da geometria fractal pode abranger várias áreas.

Outro elo importante entre a teoria do caos e a geometria fractal é a mudança da quantidade para a qualidade. É impossível prever os valores das variáveis de um sistema caótico em um instante determinado, mas podemos prever as características qualitativas do comportamento do sistema. Da mesma maneira, é impossível calcular o comprimento, a área ou volume de uma forma fractal, mas podemos definir o grau de “desordem” ou de “denteamento” de uma maneira qualitativa.

### 3.2 Dimensão Fractal e o Comprimento de um Litoral

Mandelbrot acentuou a característica dramática das formas fractais fazendo uma pergunta provocativa: “Qual é o comprimento do litoral da Inglaterra?” Ele mostrou que desde que o comprimento medido pode ser indefinidamente estendido se nos dirigirmos para escalas cada vez menores, não há uma resposta certa para essa pergunta.

O que Mandelbrot mostrou é que podemos definir um número que caracterize esse grau de desordem do litoral. Uma vez que se pode mostrar que esse número tem certas propriedades de dimensão, Mandelbrot o chamou de dimensão fractal. Podemos entender

intuitivamente essa idéia compreendendo que uma linha denteada (desordenada) em um plano preenche mais espaço que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos espaço que um plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal. Para a costa britânica esse número é aproximadamente 1,58; para a costa norueguesa, muito mais acidentada, ele mede aproximadamente 1,70. De maneira semelhante, um papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos que uma esfera. Deste modo, quanto mais amarrotado estiver o papel, mais perto de 3 estará sua dimensão fractal.



Figura 4 Uma linha denteada no plano ocupa mais espaço que uma linha reta.

Esse conceito de dimensão fractal, que foi, de início, uma idéia matemática puramente abstrata, tornou-se uma ferramenta muito poderosa para analisar formas da natureza, quanto mais dentados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem, e quanto mais acidentados forem as formas de uma linha litorânea e os contornos de uma montanha, maiores serão suas dimensões fractais.

A partir da questão "Qual o tamanho da costa da Grã-Bretanha?", Mandelbrot [1] expôs um problema complexo e que permite discernir o que é um fractal. A Tabela 1 mostra a estimativa do tamanho da costa da Grã-Bretanha.

Tabela 1: Estimativa do tamanho da costa da Grã-Bretanha	
Tamanho da fita métrica (milhas)	Tamanho da costa (milhas)
200	1600
25	2550

Utilizando-se trenas de 200 e 25 milhas, chega-se a resultados diferentes. Quanto menor a régua, maior será o valor medido. Isto é muito simples para explicar: como a costa da Grã-Bretanha é muito irregular, uma régua muito grande não consegue levar em conta as irregularidades, enquanto régua menores conseguem medir mais precisamente as variações.

Realizando uma série de medidas com diversas régua, seriam medidos certos valores. Colocando estes valores em eixo cartesiano, apresentar-se-ia uma seqüência de pontos próxima a uma reta. Fazendo uma regressão linear, tem-se uma reta dos pontos; a inclinação desta reta é a medida fractal  $D$  da curva da costa da Grã-Bretanha. O valor  $D$  representa o quão irregular é a costa britânica.

## 4. Construções Matemáticas

Considere um quadrado de lado  $L$  coberto por  $N$  quadrados menores de lado  $l$  (figura 5). A área do quadrado ( $L^2$ ) é igual a  $N$  vezes a área do quadrado menor ( $l^2$ ), logo  $L$ ,  $N$  e  $l$  satisfazem a relação:

$$N \cdot l^2 = L^2 \quad (2)$$

Portanto o número de quadrados de lado  $l$  necessários para “cobrir” um quadrado de lado  $L$  é  $N=L^2/l^2$ . Imagine que  $N$  seja uma função de  $L$  e  $l$ , ou seja,  $N=N(L, l)$ , desta forma teremos:

$$\begin{aligned} N &\sim l^{-2} \text{ para } L \text{ fixo e} \\ N &\sim L^2 \text{ para } l \text{ fixo} \end{aligned}$$

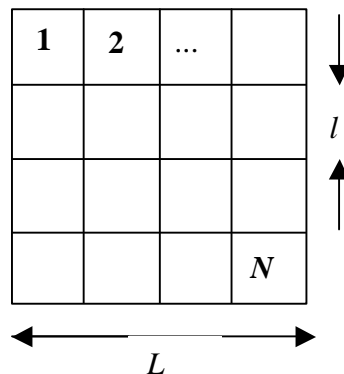


Figura 5: Um quadrado de lado  $L$  é dividido em  $N$  quadrados de lado  $l$ .

Na figura 6 temos um cubo de aresta  $L$  dividido em  $N$  cubos menores de aresta  $l$ . Neste caso, temos:

$$N \cdot l^3 = L^3 \quad (2)$$

$$N \sim l^{-3}, L \text{ fixo}$$

$$N \sim L^3, l \text{ fixo.}$$

Podemos generalizar estes resultados para um hipercubo  $d$ -dimensional de aresta  $L$  “coberto” por  $N$  hipercubos de aresta  $l$  ( $l \ll L$ ) dizendo que:

$$N \cdot l^d = L^d \quad (3)$$

$$N \sim l^{-d}, L \text{ fixo;}$$

$$N \sim L^d, l \text{ fixo.}$$

Dizemos que o quadrado é bidimensional, o cubo é tridimensional ou o hipercubo é  $d$ -dimensional devido aos expoentes 2, 3 e  $d$  que aparecem nas equações (1), (2) e (3), respectivamente.

Esta definição de dimensão pode ainda ser aplicada a outros objetos de formas diferentes como elipses, esferas, cones – Objetos Euclidianos -, etc. Suponha por exemplo uma esfera maciça de diâmetro  $L$ . Dizemos que esta é tridimensional pois a relação entre o

número de cubos  $N$  de aresta  $l$  ( $l \ll L$ ) necessários para “cobrir” toda a esfera satisfaz  $N(l, L) \cdot l^3 \sim L^3$ .

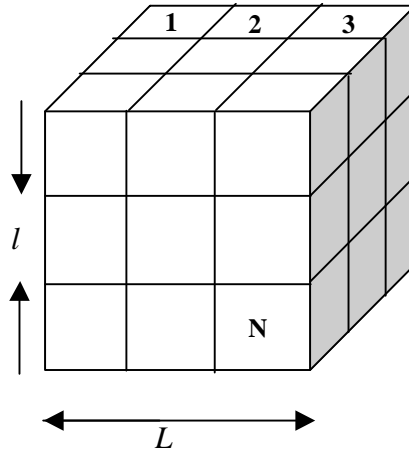


Figura 6: Um cubo de aresta  $L$  é dividido em  $N$  cubos de aresta  $l$ .

Tem sido observada em muitas estruturas naturais, uma relação do tipo:

$$N(l, L) \cdot l^{D_F} \sim L^{D_F}, \text{ Onde } D_F \notin \mathbb{Z} \quad (4)$$

Quando  $D$  indica um valor fracionário, é chamado de fractal.

Como anteriormente,  $N$  é o número de cubos, tridimensionais, de aresta  $l$  necessários para cobrir toda a estrutura de tamanho global  $L$ . A diferença é o expoente  $D_F$  não inteiro. Falamos em dimensão fracionária ou fractal.

Na equação (4):

- $D_F$  - índice crítico que caracteriza o sistema a ser estudado.
- $l$  - Escala ou resolução com que o sistema está sendo estudado.

#### 4.1 Como Calcular $D_F$ ?

Para Calcularmos  $D_F$  basta “sabermos” o número de cubos  $d$ -dimensionais  $[N(l, L)]$  necessários para cobrir todo o conjunto analisado. Isso é dado pela equação (4).

$$N(l, L) \cdot l^D = kL^D \quad \text{onde } k \in \mathbb{Q}$$

Dessa equação tiramos a seguinte relação:

$$N(l, L) \left( \frac{l}{L} \right)^D = k$$

Fazendo  $e = l/L$  na equação acima e tomando o logaritmo ficamos com:

$$\ln[N(e)] = \ln \left[ \frac{k}{e^D} \right]$$

Assim:

$$\ln[N(\epsilon)] = \ln k + D \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (5)$$

Observamos então que a dimensão  $D$  pode ser dada pela inclinação da reta num gráfico de  $\ln[N(\epsilon)]$  vs  $\ln(1/\epsilon)$ . Assim, podemos expressar  $D$  por:

$$D = D_F = \frac{d \ln N(\epsilon)}{d \ln(1/\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (6)$$

Como o número de cubos  $N(\epsilon)$  na equação (6) não pode ser maior que o número de cubos para preencher todo o espaço (de dimensão inteira), temos que:

$$d > D_F \text{ onde } D_F \text{ é fracionário}$$

Assim, um fractal está associado à idéia de conjuntos que não conseguem preencher todo o espaço onde estão “mergulhados”.

#### 4.2 Fractais Auto-Similares

Chamamos de fractais auto-similares aqueles que mantêm a mesma forma (aparência) quando observado em escalas (resolução) diferentes (veja a figura 2 e 3). Esses tipos de fractais obedecem a uma regra de formação matemática e muito raramente são encontrados na natureza. Dizemos que estes são fractais isotrópicos, uma vez que são invariantes sobre uma transformação de escala isotrópica. Podemos citar como os exemplo mais simples dessas estruturas auto-similares o conjunto de Cantor e as curvas de Koch.

Matematicamente podemos mostrar a validade desta relação entre forma e escala.

Para um objeto observado numa escala  $l = \epsilon L$ , temos:

$$N(\epsilon) = \epsilon^{-D} k$$

Numa outra escala  $l = \mathbf{I} \epsilon$  ficamos com:

$$N(\mathbf{I} \epsilon) = \mathbf{I}^{-D} \epsilon^{-D} k$$

Dessa forma:

$$N(\mathbf{I} \epsilon) = \mathbf{I}^{-D} N(\epsilon) \quad (8)$$

Ou seja, a auto-similaridade é consistente com a função homogênea por escala equação (8).

##### 4.2.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor (descoberto em 1883) na chamada versão triádica é obtido dividindo-se o intervalo  $[0,1]$  em três intervalos iguais e retirando a terça parte central. O processo é repetido iterativamente como sugerido na figura (7).

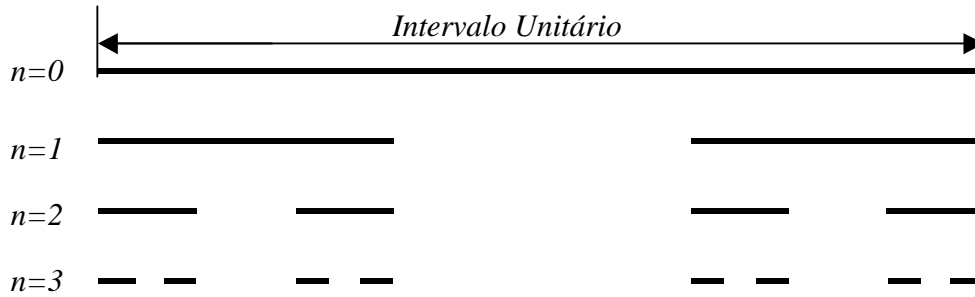


Figura 7. Construção do conjunto de Cantor

Para determinar a Dimensão fractal do conjunto de Cantor, imagine o conjunto de segmentos obtidos até a  $n$ -ésima interação é  $N_n = 2^n$ , o comprimento de cada divisão será  $l_n = (1/3)^n$ , da equação (6) ficamos com:

$$D_F = \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309 \quad (9)$$

Notemos que a equação (9) independe de  $n$  isso mostra a validade do resultado no limite de infinitas interações.

Essa construção matemática do conjunto de Cantor apareceu pela primeira vez nas ciências naturais em 1962, num estudo sobre ruído em linhas de transmissão de dados num laboratório da IBM. Mais tarde, em 1978, foi detectado na estrutura dos anéis de Saturno, quando a sonda espacial Voyager passou perto daquele planeta [3].

#### 4.2.2 Curvas de Koch

A curva de Koch é obtida por um processo determinístico, onde a cada interação os segmentos são substituídos por um gerador formado por quatro segmentos de comprimento igual a um terço do segmento do predecessor como mostrado na figura (8) para 4 interações.

Para o cálculo de sua dimensão fractal temos que, para  $n$  interações o número de segmentos gerados é  $N_n = 4^n$  e o comprimento de cada segmento vale  $l_n = (1/3)^n$ . Usando a equação (6) ficamos com:

$$D_F = \frac{\ln(4^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618 \quad (10)$$

Esse valor é muito próximo ao encontrado para as dimensões fractais de litorais de muitos países [1].



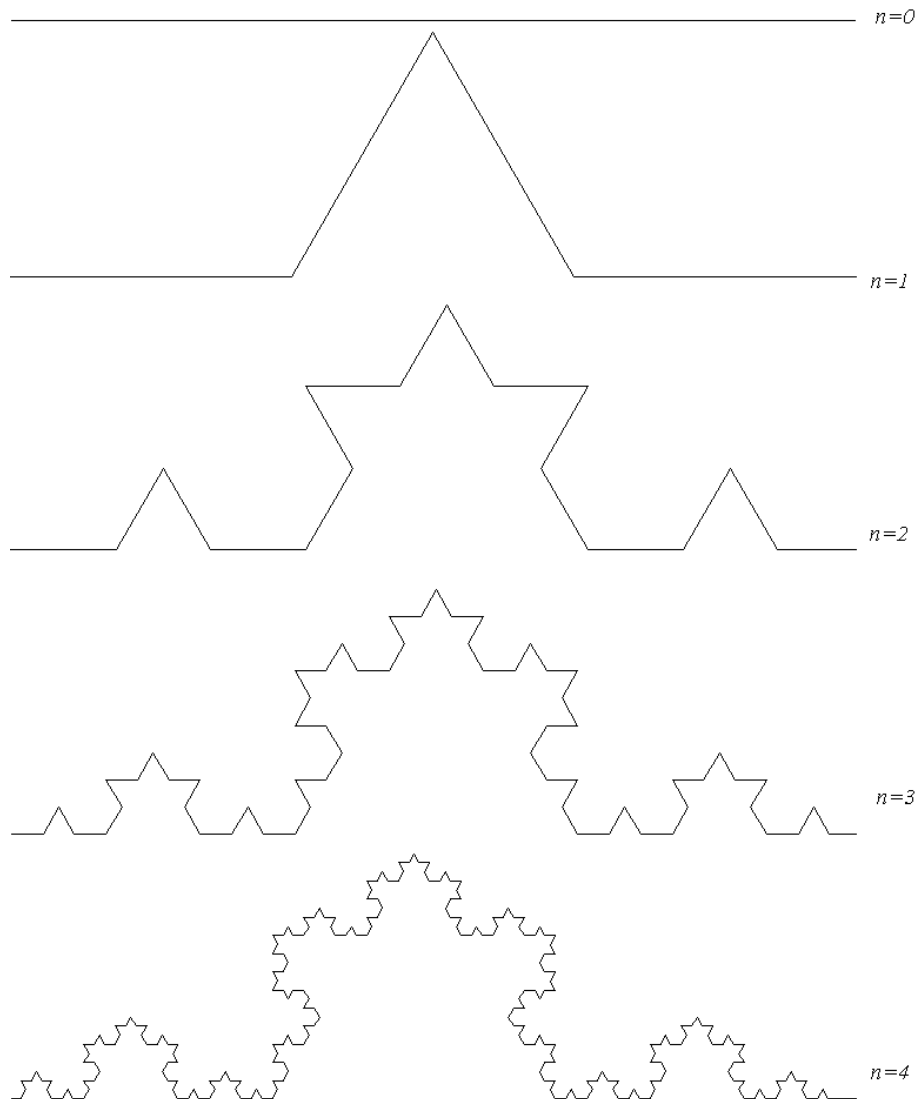


Figura 8. Construção das Curvas de Koch.

#### 4.3 Fractais Auto-Afins

Em contraste com os fractais determinísticos surge uma nova classe de estruturas na natureza que não obedecem a uma regra de formação matemática, chamamos de fractais Auto-Afins as estruturas que tem sua formação governada uma invariância de escala anisotrópica. Para caracterizar um fractal auto-afim usamos métodos estatísticos e o conceito de expoentes críticos. Observe a Figura 9.

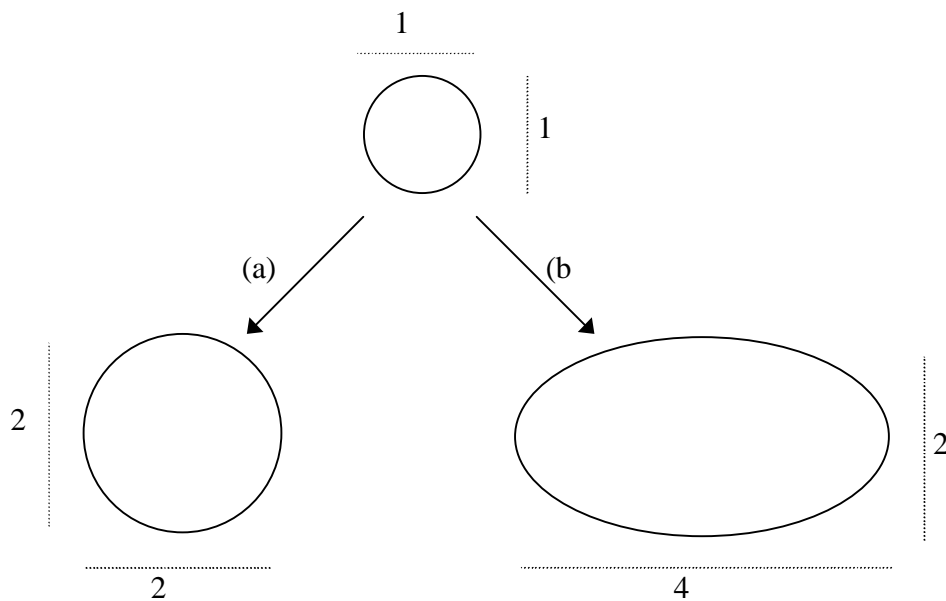


Figura 9. Efeito de uma transformação de escala isotrópica e anisotrópica em um simples objeto. (a) o diâmetro é aumentado de um fator dois no caso de uma transformação de escala isotrópica (b) No caso de uma transformação anisotrópica, o diâmetro é aumentado por um fator quatro na direção horizontal e por um fator dois na vertical resultando numa elipse. [4]

Se uma função  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representar um fractal ela terá a seguinte propriedade de escala [5].

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong b_1^{-a_1} \dots b_n^{-a_n} F(b_1 x_1, b_2 x_2, \dots, b_n x_n)$$

Um fractal é chamado auto-similar quando  $a_i = 1$ , ou seja, quando ele possuir a mesma forma após uma transformação isotrópica de escala (figura 9 – a). Quando  $a_i \neq 1$  o fractal é auto-afim de maneira que é necessário uma transformação anisotrópica de escala para ocorrer a invariância de forma do objeto fractal (Figura 9 – b).

## 5. Materiais e Métodos

Estaremos analisando a dimensão fractal de folhas de papel amassadas a partir da relação massa diâmetro bem verificar se as arruelas têm dimensão fractal. É evidente que nessas condições essas esferas terão tal dimensão, mas como será o comportamento dessa grandeza quando analisamos tipos de papel diferentes?

Para isso dispomos de um paquímetro com precisão na ordem de 0,05 mm e uma balança Mettler, AE 163, com precisão de 0,0005 g.

### 5.1 Conceito de Medida

Entre a teoria das bifurcações e das Catástrofes e o estudo das dimensões fracionárias ou fractais, há supostamente parentesco próximo, as mais variadas linhas de pesquisa buscam como quantificar estas formas tão complicadas.

Nas ciências experimentais os resultados das medidas são raramente simples números. O dado experimental é fruto de uma complexa conjunção de circunstâncias. Ele nasce do ato da medição e vem carregado de atributos do próprio sistema experimental e da forma como este foi planejado.

No exemplo da medida da costa de um litoral, Mandelbrot observa que a extensão deste litoral depende unicamente da competência do desenhista que o reproduz em mapa ou da redução do equipamento óptico eletrônico que o registra. Quanto mais detalhes, maior o comprimento: “Todos os métodos de medida levam finalmente à conclusão de que a extensão do litoral é tão grande e tão mal determinada que é melhor considera-la infinita” [1].

O mesmo pode ser dito de objetos descritos euclidianamente como bidimensionais: uma chapa recurvada, um papel amassado não é, de fato, bidimensionais para o senso comum nem para a topologia fractal. *O componente fractal é descrito como o fator que controla a geração e tais valores de modo que eles se assemelham ao que é possível existir na natureza.* O fator aqui citado é a **dimensão fractal**.

## 5.2 Relação Massa – Área para folhas de papel

Para uma folha de papel, de densidade constante, temos que sua massa é proporcional à sua área e essa por sua vez, ao produto de suas dimensões e sendo uma dimensão proporcional à outra, podemos afirmar que, sendo  $l$  uma de suas dimensões:

$$M \propto A \propto l^2 \quad (11)$$

Fazendo medidas de massa e área para papeis de vários tamanhos e tomado um gráfico de  $\text{Log}M \times \text{Log}l$  dará um coeficiente angular 2 o que indica que uma folha de papel é um objeto euclidiano.

## 5.3 Relação Massa – Diâmetro para esferas

Para uma esfera metálica, podemos dizer que a sua massa é proporcional ao seu volume e esse, por sua vez, ao cubo de seu diâmetro ( $d$ ), ou seja:

$$M \propto V \propto d^3$$

Novamente, se para várias esferas tomarmos a suas massas e seus diâmetros respectivos, e com esses dados fizermos um gráfico  $\text{Log}M \times \text{Log}d$  teremos um coeficiente angular 3, indicando que a esfera pertence ao espaço euclidiano de três dimensões.

Devemos obter para as esferas de papel amassado, com o método descrito acima, um coeficiente angular entre dois e três.

### 5.3.3 Desvios associados às medidas

Os erros experimentais estão associados tanto à precisão dos instrumentos de medida como nos desvios associados as medidas. Para verificar a massa usamos uma balança de alta precisão,  $\Delta M = 0.005$  g. Já para verificar o diâmetro, foram feitas 4 medidas

devido a forma irregular das esferas. Para essas medidas, tomamos o desvio padrão  $\Delta l$  e o erro no valor da dimensão fractal será dado por:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\sum_i \sqrt{\frac{\Delta M}{M_i} + \frac{\Delta l_i}{l_i}}}{n} \quad (12)$$

Onde  $M_i$  e  $l_i$  são as massas e os diâmetros de cada esfera respectivamente, e  $n$  é o número de esferas tomadas.

## 6. Resultados Para Esferas

As medidas de massa e diâmetro para as esferas com o respectivo papel e para esfera de aço são dadas na tabela 2.

Tabela 2. Relação Diâmetro Massa para as esferas de aço e as de papel amassado.

Esfera de aço		Papel alumínio		Papel seda		Papel madeira		Papel sulfite (carta)	
D (cm)	M (g)	D (cm)	M (g)	D (cm)	M (g)	D (cm)	M (g)	D (cm)	M (g)
2,5	63,69	2,115	1,7947	2,5525	2,263	3,6825	5,735	3,1675	4,7432
2,2	43,32	1,61	0,899	2,0125	1,134	2,915	3,013	2,5125	2,3406
1,7	20,02	1,215	0,4445	1,62	0,603	2,3075	1,497	1,9225	1,1982
1,6	16,86	0,9575	0,2238	1,1725	0,3006	1,8525	0,757	1,5075	0,6034
1,5	13,74	0,74	0,112	0,88	0,152	1,35	0,37	1,0825	0,3033
1,3	8,93	0,5375	0,0554	0,695	0,077	1,1125	0,188	0,8775	0,1538
0,9	2,98	0,39	0,0273	0,51	0,038	0,8625	0,093	0,6925	0,0754
0,8	2,08	0,295	0,0137	0,41	0,0188	0,605	0,048	0,51	0,0376

Os gráficos das Figuras abaixo mostram o valor da dimensão fractal para as esferas listadas na Tabela 2.

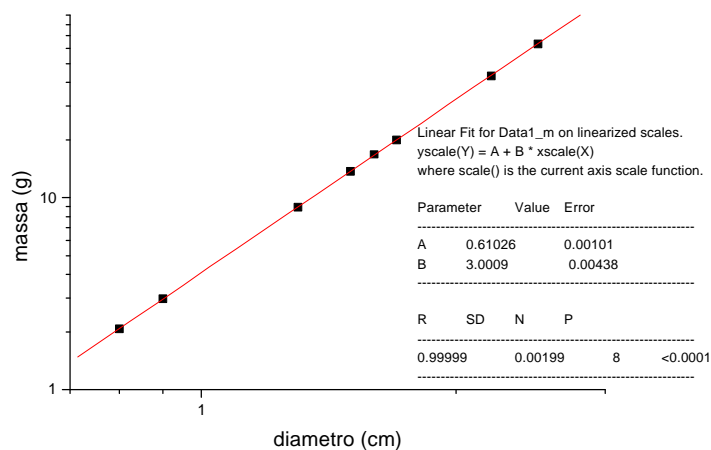


Figura 10. Dimensão fractal para a esfera de aço. Observamos que para essa esfera, perfeita, a dimensão vale 3, como esperado no modelo.

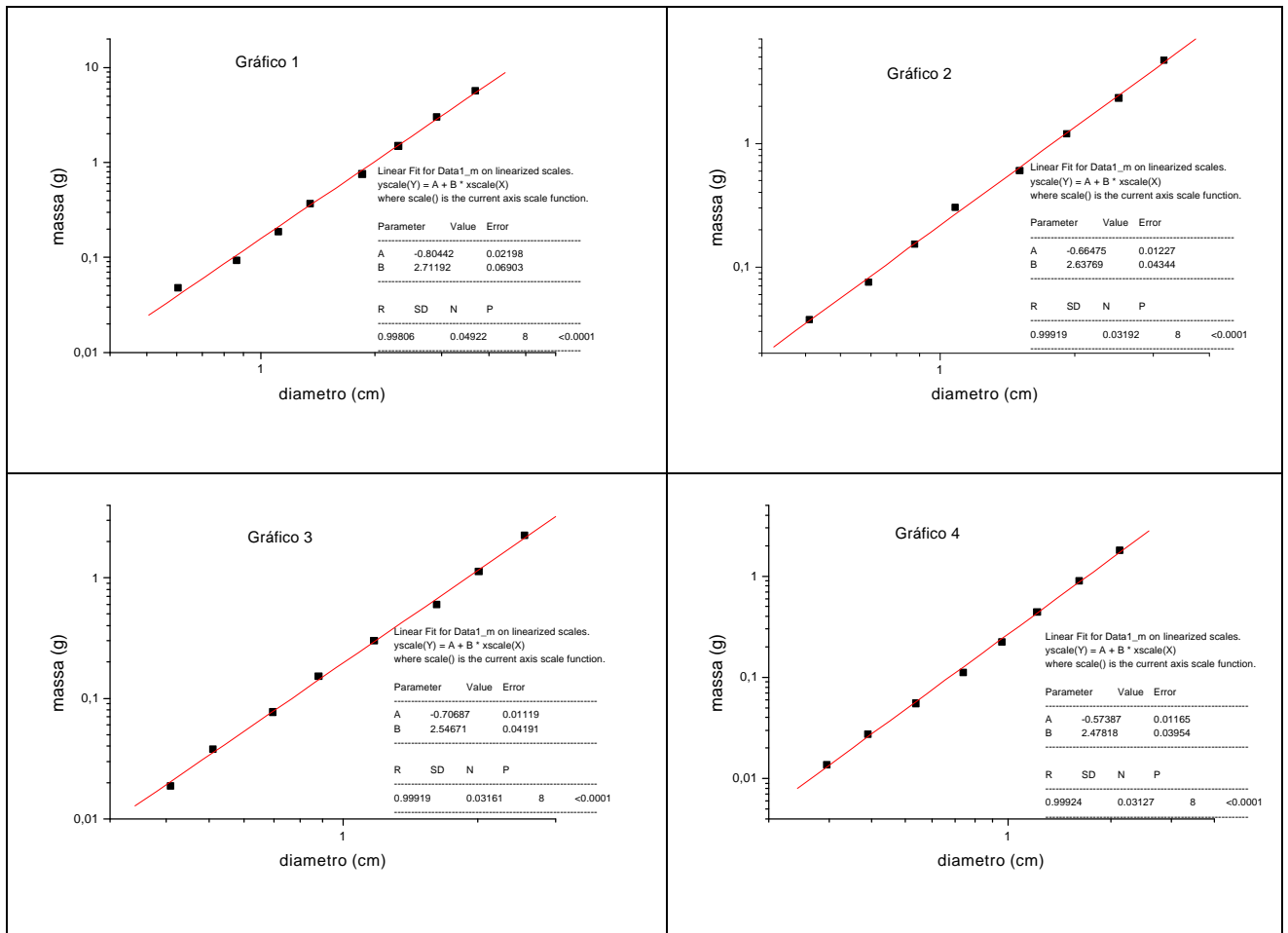


Figura 11. A seqüência dos gráficos corresponde as esferas de papel listadas na tabela 2, os gráficos estão dispostos em ordem decrescente do valor da dimensão fractal. O Gráfico 1 corresponde á esfera de papel madeira, o Gráfico 2 à esfera de papel sulfite (Tipo Carta), o Gráfico 3 ao papel de Seda e o Gráfico 4 ao papel Alumínio.

Devemos agora verificar como devemos explicar as diferentes dimensões para os diferentes papeis, uma coisa é certa, quanto maior for a dificuldade de amassar a folha de papel maior a sua dimensão fractal. Os resultados estão resumidos na tabela 3.

Tabela 3. Dimensão Fractal para Esferas de Papel

Esferas	Dimensão Fractal
Aço	3
Papel Madeira Amassado	$2,71 \pm 0,01$
Papel Sulfite Amassado	$2,63 \pm 0,01$
Papel de Seda Amassado	$2,54 \pm 0,02$
Papel Alumínio Amassado	$2,47 \pm 0,02$

O Que torna evidente nos valores obtidos é que quanto mais “frágil” o papel, maior será a quantidade de irregularidades na sua superfície, ou seja, maior será sua fractalidade, de forma que sua dimensão ficará mais distante da dimensão de uma esfera perfeita. Para os papéis tomados, os mais “frágeis” em ordem crescente são respectivamente o de alumínio, o de seda, o papel sulfite e o papel madeira. A tabela acima mostra a evidência desse comportamento fractal.

## 7. Resultados Para Arruelas

Para uma arruela como mostrada na figura abaixo temos que a sua massa deve ter uma relação de proporção com o raio interno e externo, esta relação deverá descrever se a arruela em questão apresenta um conjunto com dimensão fractal. Além desta relação estaremos verificando possíveis correlações entre a massa e a área e a massa e o volume.

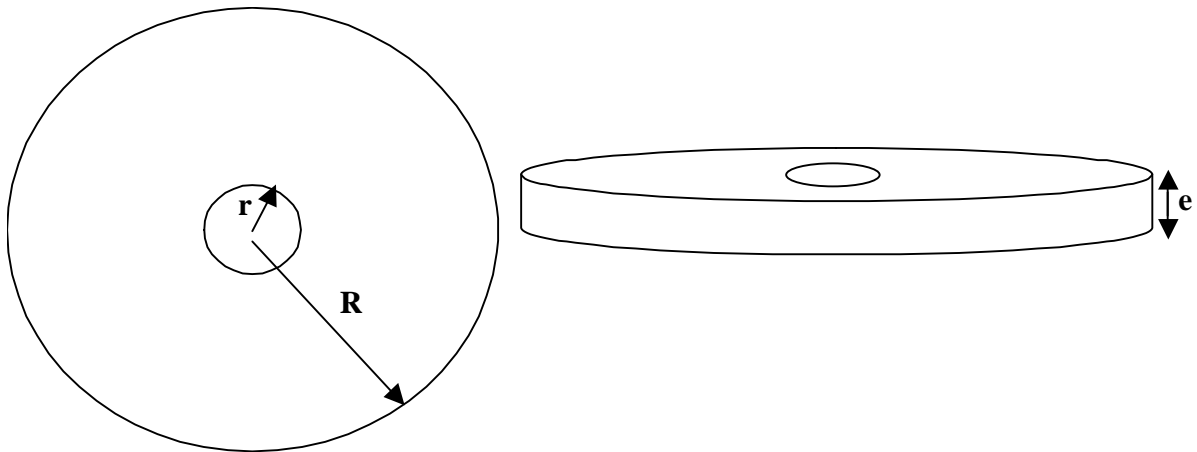


Figura 12: Arruelas como as usadas na experiência. Estão destacados na figura os raios interno e externo bem como sua espessura

Se considerarmos que temos um disco perfeito, a relação entre massa, área, e diâmetro é dado por:

$$M \propto A \propto d^2$$

Dessa forma um gráfico Log – Log, de massa em função do diâmetro deve apresentar um expoente dois.

Independentemente, se considerarmos um disco maciço ou uma arruela, a relação massa – volume deve apresentar numa escala Log – Log, um expoente um, uma vez que:

$$M \propto V$$

As relações para um disco perfeito são de fácil análise, o problema será verificar as relações para arruelas. Procuraremos discutir a existência de tal fractalidade nos resultados seguintes.

### 7.1 Dados para Arruelas

Para um número de 13 arruelas de massas e diâmetros diferentes foram feitas as medidas de massa, raio interno e raio externo, esses dados se encontram na figura abaixo:

Tabela 4: Dados para as arruelas

Massa (g)	Diâmetro Interno (cm)	Diâmetro Externo (cm)	Espessura (cm)
106.39	5.2	9.09	0.32
64.02	4.07	7.29	0.28
41.67	2.77	5.49	0.3
39.11	2.48	5.19	0.3
30.75	2.05	4.55	0.3
21.53	1.69	3.69	0.31
16.52	1.56	3.35	0.29
13.89	1.39	3.1	0.31
10.57	1.33	2.69	0.31
4.71	1.01	2.39	0.15
3.1	0.86	1.88	0.17
2.15	0.7	1.69	0.14
0.95	0.54	1.38	0.09

Devemos a partir dos dados acima descrever as relações citadas e através dessas discutir se há ou não dimensão fractal nas arruelas.

### 7.2 Relação Massa x Volume para Arruelas

Podemos verificar diretamente a relação Massa x Volume. Nas equações abaixo destacamos o cálculo do volume das arruelas, sendo **A** a área e **V** o volume respectivo.

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$V = A \cdot e$$

Nas equações acima, **R** é o raio externo, **r** o raio interno e **e** é a espessura. É importante observarmos que as arruelas apresentam uma espessura significativa, e que a relação para a área acima é válida apenas para a área dos tampões (área da base, se imaginarmos um sólido retangular).

Para a relação Massa x Volume, temos a relação destacada no gráfico abaixo.

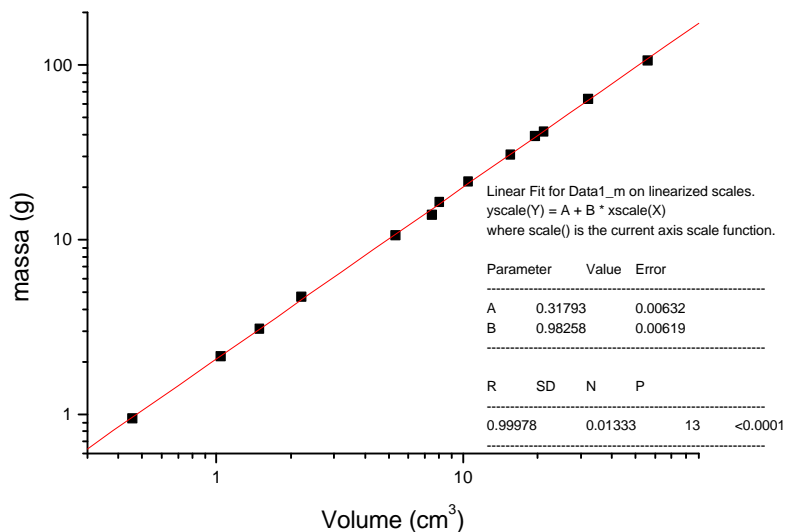


Figura 13. Relação Massa x Volume para arruelas

Observamos que para as arruelas temos a relação massa volume dando um expoente 1, como tínhamos previsto anteriormente.

### 7.3 Relação Massa x Diâmetro para Arruelas

Como a relação Massa x Volume não trouxe nenhuma evidência de fractalidade resta-no avaliar as outras relações.

#### 7.3.1 Relação Massa x Diâmetro Interno

Foi dito que se considerássemos o círculo interno da arruela, como um disco perfeito, devíamos ter um expoente 2 para a relação massa x diâmetro. Partindo dos dados da Tabela 4, obtemos:

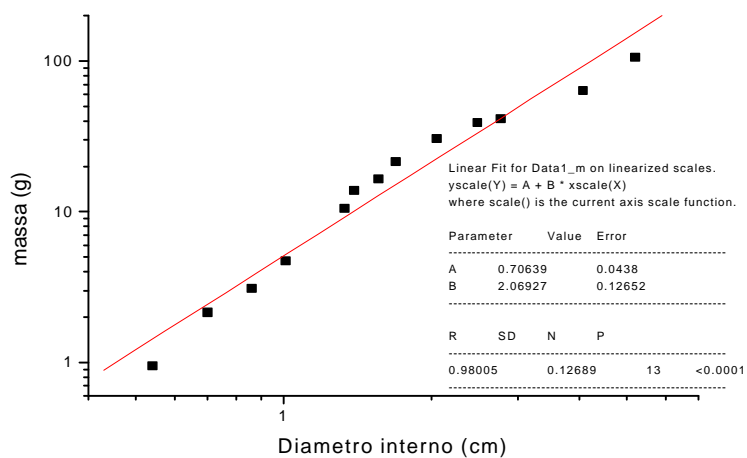


Figura 14: Relação Massa x Diâmetro Interno para Arruelas



Tínhamos previsto um coeficiente angular 2 para um gráfico Log – Log da massa em função do diâmetro (isso foi para um disco perfeito). Observamos que essa relação foi satisfeita para o diâmetro interno. Assim, essa relação não evidencia a forma fractal nessa geometria. Verificaremos as próximas relações:

### 7.32 Relação Massa x Diâmetro Externo

Observemos agora a relação entre Massa x Diâmetro Externo partindo do gráfico da Tabela 4.

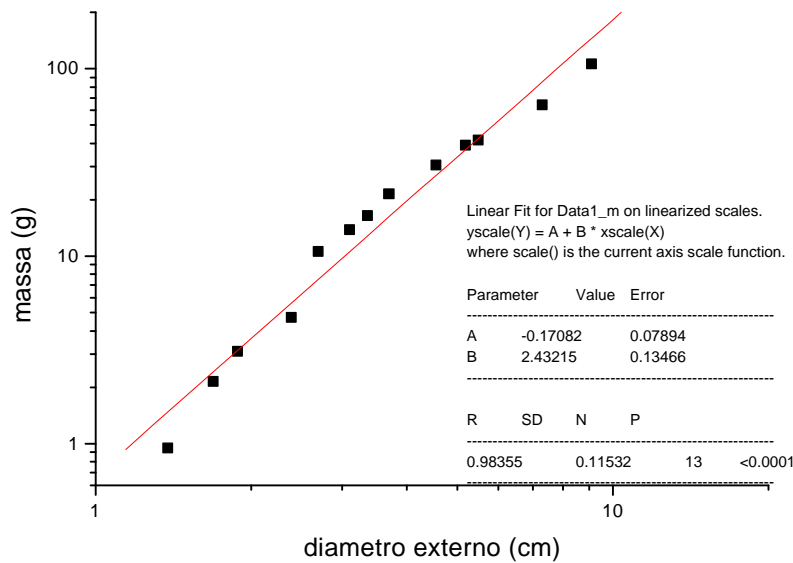


Figura 14. Relação Massa x Diâmetro Externo para Arruelas

Para a relação Massa x diâmetro Externo não se pode dizer muita coisa por enquanto. Apenas que a ausência de massa no espaço, de dimensão desconhecida, faz com que a dimensão euclidiana seja alterada. Isso pode ser um indício de que as arruelas tenham dimensão fractal, pois se pensarmos em esferas ocas, a relação entre massa e diâmetro dará um expoente 3.

Podemos chegar a uma conclusão na análise dos próximos dados.

### 7.4 Relação Massa x Área para Arruelas

Vimos que a massa é proporcional a área independentemente se o disco está ou não furado (é ou não uma arruela). Pensando assim devemos num gráfico Log-Log, verificar um expoente 1.

Foram feitos dois gráficos, em um só colocamos as áreas dos tampões das arruelas (área da base) e em outro calculamos a área total, que seria a área dos tampões adicionado da área lateral. Ou seja:

$$A_{\text{total}} = \pi(R^2 - r^2) + 2\pi(R + r) \cdot e$$

Destacamos os gráficos abaixo

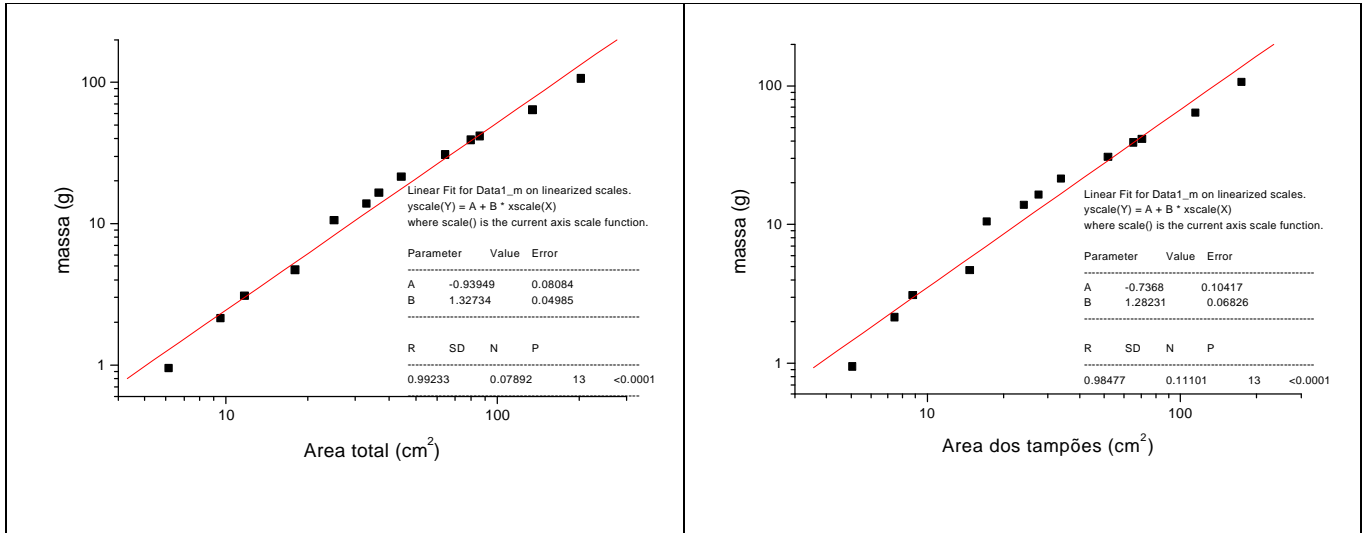


Figura 15: Relação Massa x Área para arruelas. O primeiro gráfico destaca a área total e o segundo a área dos tampões.

Analisando os gráficos acima observamos que os expoentes, 1,28 para a área dos tampões e 1,32 para a área total, são maiores que os esperados. Esse resultado nos permite afirmar, em primeira análise, que as arruelas formam um sistema cuja distribuição de massa não se encontra perfeitamente num plano.

Porém observando os dados da Tabela 4 verificamos que a espessura delas é variável, fazendo com que a relação massa área não tenha um comportamento uniforme. Abstraindo então o efeito da espessura de forma que todas as arruelas tenham uma distribuição uniforme de massa no espaço, podemos fazer um gráfico da razão entre massa e espessura versus área da arruela. Apresentamos esses gráficos abaixo.

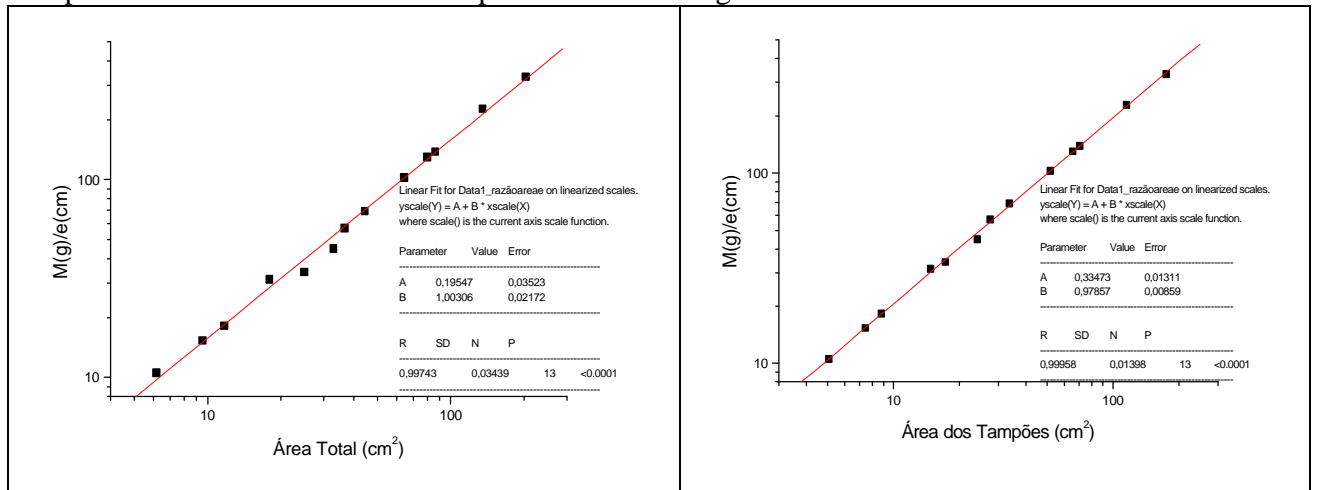


Figura 16: Relação entre a Razão entre a Massa e espessura versus a área das arruelas

Os gráficos da figura 16 mostram que abstraindo a espessura das arruelas de forma que todas tenham as mesmas “condições iniciais” para análise, o comportamento do gráfico massa versus área escala com expoente 1 como esperado. Isso leva a concluirmos que o conjunto de arruelas apresenta um conjunto de dimensão euclidiana.

## 8. Conclusão

Se a mente dos homens registra como curvas notáveis as discontinuidades do mundo ao redor, então apenas o descontínuo torna a realidade notável. Em termos espaciais, isto explica a importância do contorno, que singulariza os pontos de contraste das formas. Em termos temporais destaca a quebra da expectativa, ou seja, quanto mais informações, menos duvidoso o traçado.

Os fractais investigados por Mandelbrot, permitem não apenas copiar formas da natureza, mas concebê-las como poderiam ser. Seu princípio é a aplicação de sucessivas fórmulas, grande número de vezes, a figuras geométricas elementares. A fundamentação teórica provém de matemáticos do século XIX, como Cantor, Hausdorff e Koch: eles sustentavam que entre uma e outra dimensão – a euclidiana linear, plana e cúbica, e mais a quarta dimensão, que Einstein define, em nossa experiência do mundo, como o tempo – há matrizes que estabelecem um contínuo capaz de tornar-se discreto através de expressões fracionárias.

Mostramos através de uma simples experiência que para reproduzir e analisar objetos fractais não é preciso grandes teorias matemáticas. Um simples papel amassado é um objeto fractal, porque sua forma não consegue preencher por completo um espaço de dimensão três. Será, então, todos objetos Fractais?

As arruelas analisadas mostram um sistema que mantém a mesma forma em escalas diferentes. Esse sistema parecia apresentar uma característica fractal. Porém, uma melhor análise dos dados permitiu concluir que esse conjunto é perfeitamente euclidiano. Isso leva refletirmos melhor quando encararmos problemas parecidos.

O contorno, a forma ou a geometria do conjunto apenas dá parâmetros para formalizar os cálculos da dimensão. A forma de objetos real não diz diretamente o comportamento da distribuição de massa nos sistemas. Para isso existe a ciência, “para mostrar que não somos as medidas de todas as coisas, que há maravilhas não imaginadas e que o universo não é obrigado a se adaptar ao que consideramos confortável ou plausível”.

## 9. Referências

- [1] “The Fractal Geometry of Nature” B.B. Mandelbrot, W. H. Freeman and Company – New York – 1983.
- [2] “Fractais, nas Ciências Exatas, Biológicas e Tecnologia” G. Marcelo, N. Romildo e C. Sérgio – Notas de Curso – Recife julho de 1993.
- [3] “Fractals and Chaos, An Illustrated Course”, Paul S. Addison – I.P.
- [4] “Fractal Concepts in Surface Growth”, A. -L. Barabási and H. E. Stanley – Cambridge University Press, 1995.
- [5] “Fractals, scaling and growth far from equilibrium”, Meakin, P. Cambridge University Press, 1998.

## Apêndice 1

Programa da disciplina “INTROD. MEDIDAS. EM FÍSICA (FAP152)”, IF-Usp.

Medidas de diversas grandezas (comprimento, tempo, massa, temperatura), a partir de situações do cotidiano, utilizando-se instrumentos de diversas precisões (métodos diretos): cuidados experimentais, erro experimental instrumental, cálculos de média e desvio da média, comparação com resultados esperados. Métodos indiretos de medida (densidade superficial de massa, velocidade, grandes e pequenos comprimentos). Noções de propagação de erros experimentais. Influência do experimentador no resultado de um experimento: medida de tempo de reação humana. Introdução à análise gráfica linear e logarítmica de fenômenos independentes do tempo, derivação numérica.

([www.if.usp.br](http://www.if.usp.br))

## Apêndice 2

Programa da disciplina “Física Experimental I (F 129)”, IFGW- Unicamp.

Experiências de laboratório sobre: cinemática do ponto, Leis de Newton, estática e dinâmica da partícula, trabalho e energia, conservação da energia, momento linear e sua conservação, colisões, momento angular da partícula e de sistemas de partículas e rotação de corpos rígidos.

(<http://www.unicamp.br/prg/dac/catalogo2002/index.html>)

## Apêndice 3

Programa da disciplina “Introdução à Física Experimental (FIS054)”, IF-UFGM.

EMENTA: Utilização de aparelhos de medida. Obtenção, tratamento e análise de dados obtidos em experimentos de Física. Apresentação de resultados.

### OBJETIVO

Esta disciplina tem como objetivo central introduzir o estudante em técnicas de obtenção, tratamento e análise de dados obtidos em experimentos de Física bem como a apresentação dos resultados obtidos. Os experimentos poderão abranger todos os conteúdos de Física Básica como mecânica, termo e hidrodinâmica, eletromagnetismo, óptica e ondas, respeitando obviamente o nível introdutório da disciplina. O estudante se envolverá em processos modernos de obtenção e tratamento de dados que incluem sensores interfaceados com computadores e programas de ajuste de curvas.

### PROGRAMA

Faz parte dos princípios gerais dos novos laboratórios de Física Básica do Departamento de Física, uma proposta flexível de programa de disciplina. No geral, respeitando-se a ementa, serão oferecidos vários experimentos aos alunos, dentre os quais eles poderão montar, com certo grau de liberdade, o conteúdo programático de seu curso. A oferta de experimentos

poderá variar de um semestre para outro. Neste processo inicial de implantação da disciplina não serão oferecidos experimentos opcionais, sendo o programa do curso composto pelos 12 experimentos listados a seguir.

#### EXPERIMENTOS PROPOSTOS

1. Medidas e erros
2. Deformação elástica de molas
3. Deformação de Flexão I
4. Deformação de Flexão II
5. Deformação elástica de gominhas de borracha
6. Fractais
7. Medida da aceleração da gravidade usando um pêndulo simples
8. Elemento resistivo linear
9. Uso do Osciloscópio
10. Determinação da velocidade do som em metais
11. Determinação da temperatura crítica de uma cerâmica supercondutora de alta temperatura
12. Coeficiente de Restituição

[\(http://www.fisica.ufmg.br/graduac/\)](http://www.fisica.ufmg.br/graduac/)