SEGUNDO RELATÓRIO PARCIAL: DEZEMBRO DE 2001 A MAIO DE 2002

Maio de 2002

Projeto: Relatividade Geral e Censura Cósmica

Bolsista: Rafael Monteiro Fernandes

Orientador: Patricio Aníbal Letelier Sotomayor

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
IMECC - UNICAMP

1 Resumo do Plano Inicial e das Etapas Concluídas

Basicamente, o projeto *Relatividade Geral e Censura Cósmica* propunha que o bolsista estudasse, sob a supervisão e com o auxílio de seu orientador, a Teoria da Relatividade Geral e algumas de suas aplicações, em particular, aquelas referentes a buracos negros e à conjectura da censura cósmica, estudando alguns artigos recentes que mostrassem em que situações essa conjectura torna-se limitada.

De acordo com o que foi descrito no primeiro relatório parcial, no período de Julho de 2001 a Dezembro de 2001 o bolsista estudou os seguintes tópicos: Relatividade Especial, Tensores (Álgebra e Análise) e parte de Relatividade Geral (Fundamentos Físicos, Tensor Momento-Energia, Equação de Einstein e suas propiedades gerais). Os tópicos estudados no período compreendido entre Dezembro de 2001 e Maio de 2002 estão apresentados e explicados na seção seguinte.

2 Resumo e Detalhamento dos Estudos Desenvolvidos de Dezembro de 2001 a Maio de 2002

Neste relatório, apresento o trabalho desenvolvido pelo bolsista no período de Dezembro de 2001, quando o relatório parcial foi entregue, até o ínicio de Maio de 2002. A exemplo do último relatório, não apresentarei aqui um apanhado de fórmulas e teoremas, uma vez que estes podem ser encontrados em quaisquer livros de Relatividade Geral; pelo contrário, privilegiarei informações objetivas, detalhes relevates e impressões pessoais sobre o assunto que foi estudado. Basicamente, no período anteriormente citado, o bolsista estudou os capítulos 14, 15, 16, 17, 18 e 19 do livro [1] (referentes a dedução e propriedades da solução de Schwarzschild e ao estudo das singularidades e buracos negros), o capítulo 6 do livro [2] (referente à solução de Kerr), o 9 do livro [3] (referente à solução interior de Schwarzschild), uma parte do capítulo 11 de [4] (referente a complexos momento-energia) e está atualmente estudando alguns artigos recentes selecionados pelo seu orientador sobre contra-exemplos da censura cósmica [5], conforme explicado no projeto original.

No **capítulo 14** do livro [1] foi estudada a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein no vácuo. Sem dúvida, foi um tópico bastante interessante, pois foi apresentada pela primeira vez uma solução da tão anteriormente estudada equação de Einstein. Para chegarmos neste resultado, inicialmente estudamos as diferenças entre uma solução estacionária e uma solução estática; em seguida, vimos como podemos definir se uma solução em uma certa região do espaço-tempo pode ser entendida como estática ou estacionária considerando a existência e o comportamento de campos vetoriais de Killing tipo-tempo na região considerada. Vimos ainda a definição de solução esfericamente simétrica e como, a partir de argumentos físicos simples usando coordenadas esféricas podemos chegar a uma forma geral da métrica esfericamente simétrica, que depende apenas de dois parâmetros λ e ν. Em seguida, usando algumas relações convenientes deduzidas anteriormente para o tensor de Einstein, determinarmos estes dois paâmertros e assim obtivemos a forma da métrica esfericamente simétrica no vácuo: a solução de Schwarzschild, dada pela equação (1).

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

Estudamos então as características dessa solução: ela é estática, estacionária e assintoticamente plana; através dessas características verificamos o teorema de Birkhoff, que diz que uma solução exterior esfericamente simétrica é obrigatoriamente estática. Depois, Através do limite de campo fraco vimos que o termo m está relacionado com a massa M do corpo pontual e com a constante gravitacional G usada na Mecânica Newtoniana. Por fim, estudamos como essa solução fica em um outro sistema de coordenadas, chamado de isotrópico, que é conformal à métrica Euclidiana considerando t constante.

No **capítulo 15** estudamos alguns resultados obtidos a partir da métrica de Schwarzschild que podem ser verificados experimentalmente, comprovando assim a validade da Teoria da Relatividade Geral (ou pelo menos de alguns de seus aspectos). O primeiro tópico estudado foi o avanço do periélio do planeta Mercúrio; para chegarmos nesse resultado inicialmente revisamos a forma da órbita de Mercúrio prevista pela Mecânica Newtoniana, dada, basicamente, pela equação de Binet: uma elipse. Em seguida, usando o princípio variacional desenvolvido no capítulo 8 (equações de Euler-Lagrange) e também a métrica de Schwarzschild, obtivemos a versão relativística da equação de Binet, que fornece a órbita do planeta no espaço-tempo de Schwarzschild. Resolvemos essa equação através de um método perturbativo, considerando a equação de Binet e obtivemos a expressão do avanço do periélio do planeta. Assim, pudemos verificar a proximidade dos resultados teóricos previstos para Mercúrio (e alguns outros planetas) com os dados experimentais mais recentes.

O segundo resultado estudado foi o que prevê o desvio da luz ao passar perto de corpos que geram campos gravitacionais esfericamente simétricos. Utilizamos basicamente o mesmo método usado para calcular a perturbação na órbita de Mercúrio (princípio variacional e métrica de Schwarzschild) e obtivemos uma expressão para esse desvio. Aplicando-a no caso do Sol, pudemos verificar sua validade cosiderando os valores obtidos experimentalmente em eclipses solares totais, que não são todavia muito precisos; porém, aplicando esta teoria para alguns quasares conhecidos e confrontando-a com dados experimentais mais precisos obtidos de radiotelescópios, verificamos a sua validade.

O terceiro resultado estudado foi o do deslocamento gravitacional para o vermelho do espectro atômico perto de corpos maciços que geram fortes campos gravitaicionais (esfericamente simétricos) comparados ao da Terra. Para chegarmos a esse resultado, utilizamos basicamente alguns argumentos relativísticos e a métrica de Schwarzschild; comparamos os resultados previstos com os obtidos e verificamos novamente a validade da teoria.

Por fim, vimos alguns outros efeitos menos importantes (se comparados com os três anteriores) previstos pela Relatividade Geral e comprovados experimentalmente, como o atraso da luz e o experimento de Eötvös. Assim, terminamos a introdução à Relatividade Geral e partimos para os próximos 4 capítulos, nos quais estudamos a teoria referente aos buracos negros e singularidades.

No **capítulo 16** iniciamos o estudo de buracos negros. Primeiramente, vimos como podemos determinar, a partir do sinal dos elementos diagonais da métrica na região considerada, a natureza das coordenadas do sistema que está sendo utilizado: tempo, espaço ou nula. Depois, foi feita uma breve revisão no tópico referente a diagramas de espaço-tempo e as informações que deles podemos extrair. Em seguida, estudando a métrica de Schwarzschild, notamos a existência de singularidades, ou seja, pontos nos quais a métrica contravariante diverge (e portanto a métrica covariante se anula, já que ambas são diagonais), localizadas em $r = 2m$ e $r = 0$. Para definirmos se essas singularidades são removíveis ou essenciais, calculamos o escalar invariante de Riemann (que não varia com o sistema de coordenadas escolhido) e vimos que apenas a singularidade na origem é de fato essencial; o outro ponto é na verdade uma região de desvio infinito para o vermelho e também um horizonte de eventos, conforme vimos posteriormente.

Depois disso, usando a métrica de Schwarzschild e o mesmo princípio variacional dos capítulos anteriores, obtivemos as expressões das geodésicas radiais nulas convergentes e divergentes. Através delas, traçamos o diagrama de espaço-tempo referente a essa métrica e notamos a existência de duas regiões distintas: uma para $r > 2m$ e outra para $0 < r < 2m$; nesta última, qualquer partícula que nela esteja fatalmente cai na singularidade essencial, já que aí existe uma "inversão de natureza"entre a coordenada temporal e a espacial.

Em seguida, fazendo algumas contas simples, observamos um resultado contraditório: ao mesmo tempo em que obtivemos que uma partícula em queda livre deveria atingir a singularidade num tempo próprio finito, obtivemos, usando o princípio variacional aliado à métrica de Schwarzschild, que para um observador externo ela jamais ultrapassaria $r = 2m$. Isso se deve ao fato de $r = 2m$ ser uma singularidade removível, que está associada ao sistema de coordenadas de Schwarzschild. Na verdade, $r = 2m$ funciona como um limite entre duas regiões incomunicáveis: é o chamado horizonte de eventos. Desse modo, o próximo passo foi encontrar um sistema de coordenadas capaz de remover essa singularidade; isso foi feito transformando-se as geodésicas radiais nulas convergentes em retas: obtivemos assim as coordenadas de Eddington-Finkelstein avançadas (no caso de termos linearizado as geodésicas divergentes, teríamos obtido as coordenadas retardadas). Nesse sistema, observamos as mesmas características referentes à métrica de Schwarzschild, com a vantagem de que podemos observar agora, no diagrama espaço-tempo, as partículas em queda livre atingirem a singularidade em um intervalo de tempo finito.

Por fim, vimos como argumentos clássicos podem "justificar"a existência de buracos negros; como um corpo extenso é puxado e encolhido ao entrar no horizonte de eventos; quais as evidências observacionais mais recentes relacionadas a buracos negros e quais os avanços teóricos mais recentes nessa área. Salientamos que em todo esse capítulo, considerou-se uma fonte pontual localizada na origem gerando a métrica de Schwarzschild; uma solução que leve em conta a extensão e a natureza da estrela que gera a singularidade (chamada solução interior de Schwarzschild) foi estudada mais adiante, conforme será explicado.

No **capítulo 17** estudamos basicamente dois conceitos apresentados: extensão maximal e compatificação conforme. Este capítulo é mais curto que os outros, porém seu estudo foi mais difícil e trabalhoso, devido à complexidade dos temas abordados. Primeiramente, vimos que um espaço de variedades com uma determinada métrica é chamado de maximal se toda geodésica emanando de um ponto qualquer ou pode ser estendida a infinitos valores do parâmetro afim em ambas as direções ou termina em uma singularidade essencial; caso a primeira condição seja satisfeita, então denominamos o espaço de geodesicamente completo (por exemplo, o espaço-tempo de Minkowski é completo, enquanto o de Schwarzschild não é). Em seguida, vimos uma maneira de estender maximalmente o espaço-tempo de Schwarzschild, através da introdução das coordenadas de Kruskal, resultantes de convenientes mudanças de coordenadas. Vimos como fica o diagrama de espaço-tempo nesse sistema e suas consequências mais diretas, como a ponte de Einstein-Rosen.

Depois, estudamos o processo de compatificação conforme de um espaço-tempo e os diagramas de Penrose. Basicamente, este processo consiste em criar uma métrica não-física conformalmente relacionada à métrica considerada e que "leve"os infinitos desta última para pontos da primeira, permitindo-se assim o estudo da estrutura causal do infinito. Geralmente, para se fazer isso, usam-se transformações convenientes que envolvam funções do tipo $tan^{-1}x$. Aplicamos esse processo ao espaço-tempo de Minkowski, compactando-o a uma região finita projetada na superfície de um cilindro, cujas bordas revelam a estrutura do infinito nesse espaço-tempo. Traçamos então o diagrama de Penrose referente a essa compatificação, ou seja, traçamos o diagrama espaço-tempo da métrica conformal. Assim, pudemos observar vários aspectos do infinito antes despercebidos. Por fim, foi apresentado o diagrama de Penrose da soluçãode Kruskal e alguns de seus aspectos mais superficiais, já que se trata de um diagrama bem mais complexo que o anterior de Minkowski.

O **capítulo 18** também é curto, como o anterior, porém não tão complicado quanto aquele; ele trata brevente dos aspectos gerais do campo gravitacional gerado por uma carga massiva e pontual. Inicialmente, encontramos o elemento de linha desse espaço-tempo, denominada solução de Reissner-Nordstrøm e apresentada na equação (2), aplicando-se a forma geral da métrica esfericamente simétrica a alguns resultados obtidos para o tensor de Maxwell para um campo eletrostático puramente radial, impondo ainda que a solução fosse estática e assintoticamente plana.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \quad (2)$$

Aplicando o limite para campo fraco, notamos que m está relacionado com a massa do corpo (já que para $\epsilon = 0$ reobtemos a solução de schwarzschild) e ϵ com a carga dele. Em seguida, verificamos a existência de duas singularidades removíveis, $r_{\pm} = m \pm (m^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$e de uma intrínsica, na origem. Para removermos estas singularidades, fizemos o mesmo processo que anteriormente: linearizamos as geodésicas radiais nulas convergentes, obtendo as coordenadas de Eddington-Finkelstein avançadas. Assim, pudemos estudar o comportamento de uma partícula neutra no espaço-tempo de Reissner-Nordstrøm, através da quadrivelocidade e do princípio variacional: observamos que ela nunca atinge a origem e se sua velocidade for menor que a da luz, ela pode ficar com seu movimento preso entre dois pontos r_1 e r_2 próximos aos de infinito deslocamento para o vermelho, r_+ e r_-. Por fim, estendemos maximalmente o espaço de variedades representado por (2) de uma maneira parecida com a realizada para obter a solução de Kruskal (considerando o caso $\epsilon^2 < m^2$), e traçamos o diagrama de Penrose correspondente, verificando suas características mais simples, como a existência de uma singularidade intrínsica tipo-tempo, que pode portanto ser evitada.

No **capítulo 19**, o último estudado deste livro, foi abordado o tópico referente a buracos negros que giram. Para isso, foi feito inicialmente um estudo da solução de Kerr e de suas propriedades; essa solução foi apresentada como resultado de uma transformação complexa conveniente de coordenadas envolvendo a métrica de Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein escrita em termos de uma tétrada nula. Vimos essa solução escrita em três formas diferentes, a seguir apresentadas; em todas elas, observamos a presença de uma constante a, cujo significado explicaremos adiante.

A forma de Eddington-Finkelstein avançada é dada por (3):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) d\nu^2 - 2d\nu dr + \frac{2mr}{\rho^2}\left(2asin^2\theta\right) d\nu d\overline{\phi} + 2asin^2\theta dr d\overline{\phi} \\ &\quad -\rho^2 d\theta^2 - \left((r^2+a^2)sin^2\theta + \frac{2mr}{\rho^2}(a^2 sin^4\theta)\right) d\overline{\phi}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

A forma de Boyer-Lindquist é dada por (4):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - asin^2\theta d\phi\right)^2 - \frac{sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right]^2 \\ &\quad -\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \tag{4}$$

A forma de Kerr propriamente dita é representada por (5):

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\overline{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &\quad -\frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2}\left(d\overline{t} + \frac{r}{a^2+r^2}(xdx + ydy)\right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{a^2+r^2}(ydx - xdy) + \frac{z}{r}dz\right)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Em seguida, estudamos as propriedades básicas dessa solução: vimos que ela é estacionária; que ela tem um eixo de simetria (já que a solução é invariante com a inversão simultânea de t e ϕ); que é assintoticamente plana e que ela pode ser considerada gerada por uma fonte pontual que gira com velocidade angular proporcional ao parâmetro a. Depois, estudamos as singularidades dessa solução; primeiramente, observamos, usando o escalar de Riemann, a existência de uma única singularidade esencial em $\rho = 0$, ou seja, em um anel de raio a centrado na origem e localizado no plano $z = 0$. Depois, estudando sob quais condições o elemento g^{00} da métrica se anula, encontramos duas superfícies de infinito deslocamento para o vermelho, $r_{S_\pm} = m \pm (m^2 - a^2 cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$ e consequentemente dois horizontes de eventos, que no caso de giro pequeno comparado com a massa ($a^2 < m^2$) são dados por $r_\pm = m \pm (m^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, dividindo a solução em três regioões regulares. Para traçarmos o diagrama espaço-tempo dessa solução, não pudemos usar geodésicas nulas radiais, pois a solução não apresenta simetria esférica; assim, usamos, através do princípio variacional, geodésicas nulas principais. Depois, para eliminar singularidades removíveis desse diagrama, fizemos uma transformação da solução de Kerr para a solução de Eddington-Finkelstein avançada, cujo diagrama mostrou várias semelhanças com o diagrama da solução de Riessner-Nordstrøm.

Logo após, vimos que, na superfície de infinito deslocamento para o vermelho S_+, qualquer partícula que orbite a fonte com o sentido de rotação contrário à desta deve fazê-lo na velocidade da luz para parecer estacionária a um observador estacionário no infinito; assim, justificou-se a denominação de superfície do limite estacionário que é dada a S_+. Depois, estudamos as características mais simples dos diagramas de Penrose para as extensões maximais da solução de Kerr nos casos $a^2 < m^2$ e $a^2 > m^2$; através deste último, tomamos pela primeira vez contato com a conjectura da censura cósmica, segundo a qual não devem existir singularidades nulas, pois poderia haver problemas de causalidade, pelo menos à primeira vista.

Em seguida, foi nos apresentada brevemente a solução de Kerr-Newman, que representa a métrica na região de um buraco negro carregado que gira. Vimos que ela tem muitas características semelhantes à solução de Kerr e depende apenas de 3 parâmetros: m, ϵ e a, relacionados respectivamente à massa, carga e spin do buraco negro; à luz dessas propriedades, vimos o teorema proposto por Wheeler de que buracos negros não têm cabelo, ou seja, não apresentam nenhuma assimetria nem guardam nenhuma informação a respeito dos objetos por ele atraídos e colapsados. Por fim, vimos muito simplificadamente os teoremas de singularidades demonstrados por Hawking e Penrose e o efeito Hawking, segundo o qual os buracos negros emitem radiação devido à absorção de antipartículas virtuais relacionadas a flutuações quânticas nas proximidades do horizonte de eventos.

Este último tópico terminou o estudo referente ao livro [1]. O que foi feito após isso foi estudar alguns tópicos mais profundos não abordados neste livro, mas importantes para um melhor entendimento da conjectura da censura cósmica. Apresento esses tópicos bem como as referências utilizadas de base pelo bolsista para o estudo deles a seguir, de maneira resumida e objetiva.

Através do **capítulo 6 do livro** [2] estudamos uma maneira mais formal para se obter a solução de Kerr. Na verdade, o estudo se baseou mais em acompanhar os resultados e os caminhos propostos pelo texto do que repetí-los propriamente dito, haja vista as elevadas complexidade e extensão do mesmo; desse modo, procurou-se passar ao bolsista uma noção melhor do que é a métrica de Kerr e as dificuldades analíticas em se obtê-la. Basicamente, o texto sai da forma geral das métricas estacionárias e axialmente simétricas, deduzida no capítulo 2 do mesmo livro, para através de uma série de artifícios matemáticos e resultados anteriores, determinar expressões particulares dos parâmetros dessa forma geral, chegando assim à solução de Kerr.

De modo bastante simplificado e em linhas gerais, descrevo a seguir os procedimentos utilizados pelo texto para chegar à solução de Kerr: primeiramente, são utilizados resultados gerais sobre o tensor de Riemann escrito em termos da métrica e aplicados na equação de Einstein para o vácuo, a fim de se obterem equações diferenciais que relacionem os parâmetros desconhecidos; em seguida, são feitas várias mudanças convenientes de variáveis para simplificar as equações resultantes e chegar a resultados úteis, como a conjugação de métricas e a transformação de Papapetrou. Depois disso, apresenta-se a liberdade de gauge e, fazendo-se convenientemente uso dela e de uma série de outras mudanças de variáveis, chega-se novamente a formas ainda mais simplificadas das equações anteriores. São apresentadas algumas propriedades importantes dessas novas equações e algumas formas convenientes delas, que respeitem as condições de métrica assintoticamente plana e de campo fraco; a seguir, através de mudanças de variíveis e coordenadas complexas, chega-se à equação de Ernst, que "traz embutida"todas as equações anteriores. A solução de Kerr é então apresentada como uma solução particular simples da equação de Ernst; fazendo-se toda a extensa volta das mudanças de variáveis e de coordenadas realizadas anteriormente, obtém-se uma das formas mais comuns da métrica de Kerr. Por fim, o final deste capítulo apresenta uma discussão mais aprofundada das características da métrica de Kerr, confirmando aquelas já apresentadas no capítulo 19 do livro [1] de maneira menos formal.

O próximo tópico estudado foi a solução interior de Scwarzschild, que fornece um modelo simples para descrever o interior de estrelas; isso foi feito tomando-se como base o **capítulo 9 do livro** [**3**]. Primeiramente, revisamos as propriedades do tensor momento-energia que aparece nas equações de Einstein e tinha sido estudado no capítulo 11 do livro [1], conforme descrito no último relatório. Revimos sua forma considerando-se um conjunto não coerente de partículas ou um fluido ideal; revimos também o fato de a divergência nula do tensor momento-energia estar intimamente ligado com a conservação do momento linear e da energia. Deduzimos novamente o valor da constante de proporcionalidade entre o tensor de Einstein e o tensor momento-energia, só que desta vez usando outros artifícios, que não descreverei aqui.

Então, após essa útil revisão, fomos estudar como deveria ser a solução esfericamente simétrica independente do tempo dentro de uma esfera constituída de um fluido ideal: esta é a chamada solução interior de Scwarzschild. Para fazer isso, inicialmente tomamos a forma geral das soluções esfericamente simétricas deduzida anteriormente e a aplicamos à equação de Einstein para o espaço não vazio, considerando-se o tensor momento-energia de um fluido ideal, cuja forma havíamos acabado de estudar. Em seguida, fizemos a hipótese de o fluido estar em repouso e de sua densidade ρ_0 e pressão p serem funções apenas da coordenada radial r, de modo a simplificarmos as equações resultantes; logo depois, usamos algumas relações convenientes referentes aos tensores de Riemann, Einstein e Ricci para novamente obtermos expressões ainda mais simples. Então, fizemos mais uma hipótese acerca da natureza do fluido, supondo-o incompressível, ou seja, com $\rho_0(r) = \rho_0 = const.$; assim, impondo ainda regularidade da solução na origem, pudemos resolver as equações diferenciais a que havíamos chegado e obter uma expressão para a solução interior de Schwarzschild que depende apenas de duas constantes de integração, relacionadas às condições de contorno do fluido. Impusemos essas condições usando um modelo simplificado, porém útil, de estrelas: primeiro, a pressão na superfície externa $r = r_0$ da estrela deve ser nula, para ser contínua com a pressão externa à estrela; segundo, nessa superfície externa a solução interior deve coincidir com a exterior, a fim de garantirmos continuidade da métrica. Assim, obtivemos os valores das duas constantes arbitrárias e a solução interior de Schwarzschild, válida para $r \leq r_0$, dada por (6).

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\overline{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{\overline{R}^2}}\right)^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-r^2/\overline{R}^2} - r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \quad (6)$$

Nessa expressão, temos que $\overline{R}^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0}$ é uma constante. Por fim, vimos que para essa solução ser regular, a massa M da estrela não pode assumir qualquer valor, mas deve estar restrita à condição $M < \frac{c^2 r_0}{2G}$; além disso, esta massa total não é simplesmente o valor do volume da esfera multiplicado por ρ_0, já que tem que se considerar a curvatura do espço-tempo, que faz com que o fato de $\rho_0 = const.$ não possa ser interpretado como a esfera tendo densidade constante.

O último tópico estudado foi o referente ao complexo momento-energia de Landau-Lifshitz, que teve como base a **seção 11-9 do livro** [4]. Inicialmente, vimos que na presença de um campo gravitacional, o fato de a divergência do tensor momento-energia se anular não implica em uma lei de conservação clara, ao contrário do caso da Relatividade Especial anteriormente estudado, no qual esse fato implicava em equações de conservação do momento e da energia. Para poder chegar à uma lei de conservação realizamos o seguinte procedimento: introduzimos um sistema de coordenadas especial tal que em um certo ponto dele todas as derivadas primeiras da métrica se anulam; em seguida, observamos que isso implica que o tensor momento-energia obedece a uma lei de conservação e pode então ser escrito como o divergente de um tensor antissimétrico de ordem 3. Depois de chegarmos a algumas expressões convenientes, voltamos a um sistema de coordenadas qualquer e somamos ao tensor momento-energia um pseudotensor tal que essa soma satisfizesse a condição de poder ser escrita como divergente de um tensor de ordem 3 antissemétrico. Determinamos a forma desse pseudotensor através das expressões anteriormente encontradas e assim encontramos a expressão da soma, que é chamada de complexo momento-energia. Vimos que este complexo sim satisfaz a uma clara lei de conservação, que está ligada à conservação da energia e do momento relativos à matéria e relativos ao campo gravitacional presente. Observamos ainda que o fato de o tensor momento-energia e de o pseudotensor serem simétricos implica na conservação do momento angular usualmente definido. Por fim, verificamos, através de um exemplo simples, que não há sentido em definir energia gravitacional localizada, pois ao contrário do tensor momento-energia, se o pseudotensor se anula em um sistema de coordenadas particular ele não necessariamente se anula em todos os outros sistemas de coordenadas.

O que está sendo estudado atualmente pelo bolsista é o artigo [5], que traz uma discussão, usando complexos momento-energia, da validade da conjectura da censura cósmica.

3 Plano de Trabalho e Cronograma

De acordo com o que foi exposto na seção anterior, concluímos que o bolsista está em dia com seu cronograma, já que faltando dois meses para o término da bolsa falta-lhe apenas o estudo dos artigos [5] e [6], que apresentam contra-exemplos da conjectura da censura cósmica.

Neste contexto, o bolsista e seu orientador solicitam a renovação do projeto por mais seis meses, período ao final do qual o bolsista completará sua Graduação, para que o aluno possa estudar, de maneira ainda mais profunda, a conjectura da censura cósmica e, em especial, as limitações que ela apresenta, abordando alguns dos contra-exemplos apresentados pelas referências [7], [8], [9], [10] e eventuais outras que se mostrarem convenientes.

Referências

[1] R. D'Inverno, Introducing Einstein's Relativity

[2] S. Chandrasekhar, The Mathematical theory of Black Holes

[3] R. Adler, Introduction to General Relativity

[4] L. Landau and E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields

[5] K. S. Virbhadra, Naked singularities and Seifert's conjecture, Physical Review D 60, 1999

[6] T. P. Singh, Gravitational collapse, black holes and naked singularities, Journal of Astrophysics and Astronomy, dezembro de 1999

[7] R. Wald, Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, gr-qc/9710068

[8] P. Yodzis, H. Seifert and H. Hagen, Commun. Math. Phys. 34, 135 (1973); B. Steinmuller, A. King and J. Lasota, Phys. Lett. 51A, 191 (1975); D. Christdoulou, Commun. Math. Phys. 93, 171 (1984); A. Ori and T. Piran, Phys. Rev. D 42, 1068 (1990); S.L. Shapiro and S. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 66, 994 (1991); J.P. Lemos, *ibid.* 68, 1447 (1992); M. Choptuik, *ibid.* 70, 9 (1993); D. Christdoulou, Ann. Math. 140, 607 (1994); E. Malec, J. Math. Phys. 38, 3650 (1997)

[9] P. Joshi, Gravitational Collapse, gr-cq/9702036

[10] S.S. Deshingkar, I.H. Dwivedi and P. Joshi, Phys. Rev. D 59, 044018 (1990)