

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Física Glab Wataghin

Instrumentação para Ensino

Interferômetro de Michelson e Efeito Doppler

Renata Montenegro Pereira RA: 982004  
Orientador: Jaime Frejlich

## **Interferômetro de Michelson e Efeito Doppler**

### **Resumo**

Esse projeto visa estudar vibrações mecânicas com o auxílio do interferômetro de Michelson, através da velocimetria Laser Doppler. A vibração da membrana de um alto-falante comercial é usada como fonte de sinal Doppler. Trata-se de um experimento multidisciplinar que servirá para integrar noções de mecânica, ótica e eletrônica; perfeitamente apropriado para laboratórios de ensino.

### **Introdução**

Em 1842 o efeito Doppler foi proposto por Johan Christian Doppler mesmo que não demonstrado satisfatoriamente. Três anos mais tarde, Buys Ballot “usando uma locomotiva com músicos” comprovou a hipótese. Esse fenômeno trata das alterações de frequência devido ao movimento relativo entre a fonte do som e o receptor.

Esse efeito hoje é bem conhecido, e tem sido amplamente utilizado para medições de velocidades. Existem inúmeras aplicações utilizando esse fenômeno. Uma aplicação encontrada no nosso cotidiano, seria a de policiais, na beira da estrada, usando uma unidade de radar. Essa unidade envia um feixe de microondas de uma certa frequência na direção de um carro que se aproxima. Essas microondas são refletidas ao se chocarem com o carro e voltam à unidade de radar com uma frequência diferente – devido ao efeito Doppler. A unidade de radar traduz essa variação de frequência para a velocidade do carro em relação ao policial.

É importante ressaltar que o efeito Doppler para ondas eletromagnéticas, por exemplo a luz, é fundamentalmente diferente que para ondas sonoras. Ondas sonoras são sempre relativas ao meio (ex. o ar) mas a luz não, porque ela pode se propagar inclusive quando não existe o meio (vácuo). Para ondas sonoras a fonte em movimento ou o detector em movimento se referem ao movimento com relação ao meio, para as ondas luminosas, entretanto, só podemos nos referir à velocidade relativa entre a fonte e o detector.

Nesse projeto mostramos um método para medir o efeito Doppler usando um Interferômetro de Michelson, chamado velocimetria por laser Doppler. Em um braço do interferômetro é colocada uma superfície vibratória, no caso um alto-falante. A oscilação do alto-falante (movimento com relação ao detector) produz uma variação na frequência do laser devido ao efeito Doppler. O sinal Doppler é convertido num sinal elétrico pelo

detector e assim pode ser visualizado no osciloscópio. A partir desse sinal podemos encontrar a amplitude, a velocidade do alto-falante e constatar a linearidade entre a amplitude e a velocidade do alto-falante quando este opera na região elástica.

## Teoria

### *Ondas, Interferência e Batimentos*

Para entendermos o funcionamento do interferômetro é importante que tenhamos definidos alguns conceitos. Onda é um conceito antigo e já bem formado, então, a figura 1 mostra a posição de uma onda em  $t=0$  e em  $t=\Delta t$ . Durante o intervalo  $\Delta t$  toda a curva se desloca para a direita de uma distância  $\Delta x$ . Definimos comprimento de onda  $\lambda$  como a distância em relação ao eixo  $x$  após a qual a forma da onda começa a se repetir; velocidade  $v$  como o deslocamento  $\Delta x$  num intervalo de tempo  $\Delta t$  e amplitude  $A$  como a magnitude do deslocamento máximo da onda no eixo  $y$ .

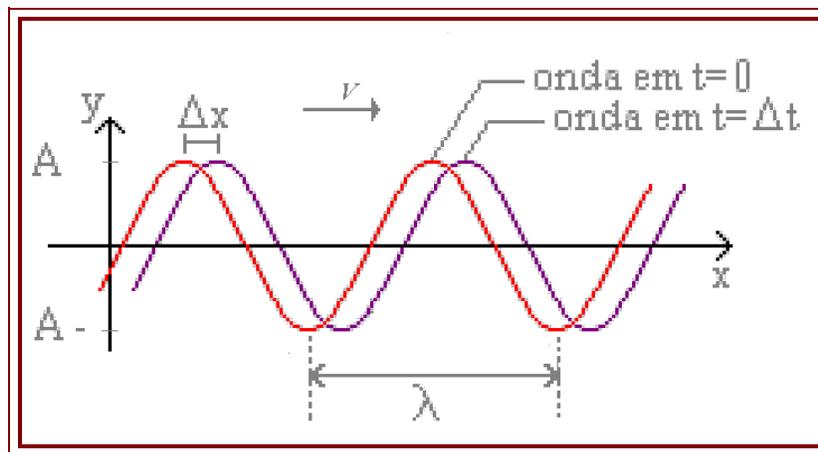


Figura 1: Exemplo de uma onda se propagando num intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Outra importante característica de uma onda é a sua frequência  $f$ , que definimos como sendo a repetição da oscilação, em qualquer elemento da corda, devido à passagem da onda. Uma vez que esse movimento se repete em intervalos regulares, podemos escrever para o deslocamento  $y$  na posição  $x$  e no instante  $t$  como: 1

$$\vec{y}(\vec{x}, t) = \vec{A} \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (1)$$

onde  $k$  é o número de onda angular ( $k=2\pi/\lambda$ ) e  $\omega$  é a frequência angular ( $\omega=2\pi f$ ).

Suponhamos duas ondas senoidais uma em sentido contrário a outra. Chamamos de *Interferência* o fenômeno que ocorre quando essas duas ondas ocupam o mesmo lugar no

espaço. O princípio da superposição nos diz que o deslocamento da onda resultante é a soma algébrica das ondas sofrendo interferência. Ressaltamos que esse princípio só é válido, num material, para ondas com amplitudes que não forem muito grandes, mas no vácuo é sempre válido.

Chamamos batimento, a interferência no tempo de duas ou mais ondas com a mesma direção, amplitude e frequências próximas.

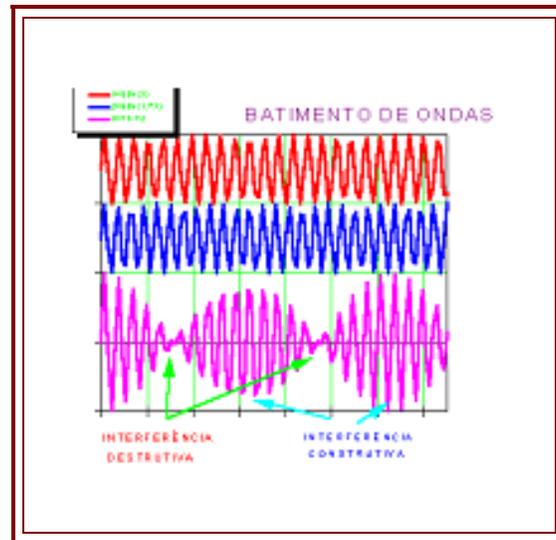


Figura 2: As duas figuras de cima são ondas viajando na mesma região do espaço e a última é o deslocamento resultante. NOTA: figura retirada da referência eletrônica: <http://www.cdcc.sc.usp.br/ondulotoria/batim.html>

### *Efeito Doppler*

Como já dissemos, Doppler foi o primeiro a observar a variação de frequência devido ao movimento relativo entre a fonte de onda e o observador. Se colocarmos um laser incidindo com um alto-falante haverá uma variação de frequência da luz refletida nele, que é dependente da velocidade desse movimento.

Uma vez que a luz sempre tem o mesmo valor para todas as direções em todos os referenciais inerciais, ou seja, a luz independe do meio para se propagar, assim, só podemos considerar a velocidade relativa entre a fonte e o observador. Podemos deduzir a equação que relaciona as duas frequências usando a teoria de relatividade de Einstein.

Suponhamos uma fonte  $S$  emitindo uma onda luminosa de frequência  $f$  e um aparato  $A$  com velocidade relativa de aproximação  $v$  constante. Suponhamos que  $S$  está se

aproximando de  $A$ . A figura 3 abaixo mostra o “ponto de vista” em relação ao aparato  $A$ . As frentes de onda estão espaçadas por um tempo  $T_A$  (porque estamos no referencial de  $A$ ).

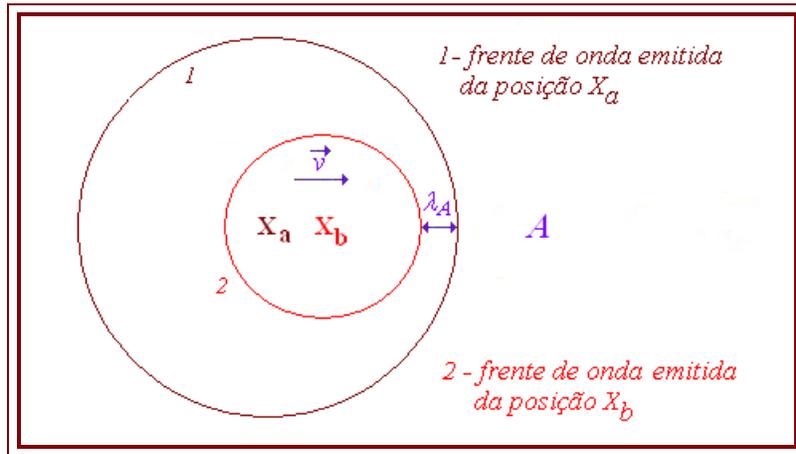


Figura 3: Representação do ponto de vista do aparato  $A$ , onde  $\lambda_A$  é o comprimento de onda para o referencial de  $A$ .

Se a fonte  $S$  estivesse em repouso, teríamos que a distância entre as duas frentes de onda seria  $c.T_A$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Mas uma vez que  $S$  se move, temos que essa distância será:

$$\lambda_A = (c - v).T_A \quad (2)$$

A expressão da dilatação do tempo nos dá que:

$$T_A = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

O segundo postulodo diz que a velocidade da luz  $c$  em qualquer referencial inercial é constante. Aplicando isso à teoria ondulatória obtemos:

$$c = \lambda_A f_A \quad (4)$$

Aplicando a equação F e E na equação D, e lembrando que a frequência é o inverso do período, obtemos:

$$\omega_A = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (5)$$

Caso eles estejam se afastando, basta trocar  $v$  por  $-v$ . Expandindo em séries de Taylor e desprezando os termos de ordem superior, uma vez que  $v$  é muito menor do que, teremos:

$$\omega_A = \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \quad (6)$$

### *Interferômetro de Michelson*

Para medidas óticas geralmente eram usados sistemas de lentes (ou espelhos) ou prismas (ou divisores de feixe). A diferença entre esses sistemas e o interferômetro é que no primeiro, todos os raios da fonte que passam pelas lentes se unem no plano focal para formar uma imagem, enquanto no interferômetro há apenas dois feixes de interferência. Isso faz com que o interferômetro tenha uma grande vantagem para medições precisas.

O primeiro modelo de interferômetro foi projetado e construído em 1881, a figura 4 é um modelo baseado nesse interferômetro. A luz da fonte  $S$  incide sob a superfície do divisor de feixe  $M$ , que a separa em dois feixes de luz coerente, metade refletida e metade transmitida respectivamente para o espelho móvel  $A$  e para o espelho  $B$ . Esses dois feixes retornam ao divisor de feixe  $M$ , donde prosseguem na direção do observador, onde a resultante são franjas de interferência.

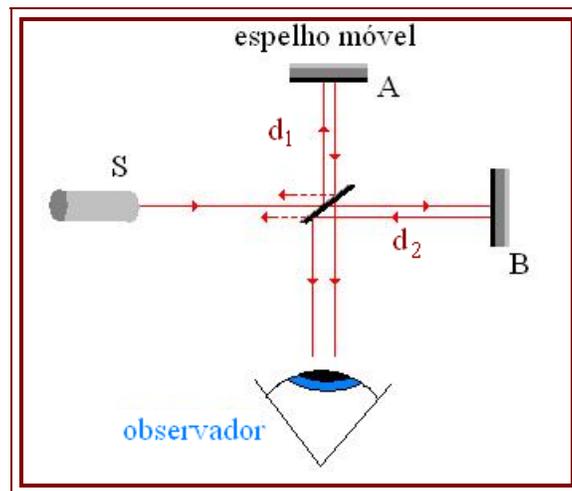


Figura 4: Modelo simples de um interferômetro.

Quando os espelhos estiverem a distâncias iguais ( $d_1=d_2$ ) e perpendiculares, o campo de interferência será uniforme; quando as distâncias forem diferentes teremos círculos concêntricos de interferência (um círculo escuro e outro claro que representam interferência destrutiva e construtiva respectivamente), se os espelhos não estiverem perpendiculares, teremos linhas de interferência.

Se mudarmos o espelho de posição a uma distância  $\lambda/2$ , a distância dos trajetos variará de  $\lambda$  e a figura de interferência sofrerá um deslocamento de uma franja (como se cada listra clara se deslocasse para a posição da listra clara adjacente).

Podemos encontrar facilmente o número de franjas de interferência  $n$  que passam pelo detector quando deslocamos o espelho  $A$  de uma distância  $\Delta d$ . Sabemos que para que haja interferência construtiva entre os raios que chegam ao observador, é preciso que a diferença de percursos,  $2\Delta d$ , seja igual a zero ou a um número inteiro de comprimentos de onda:

$$2.\Delta d = n.\lambda \quad \therefore \quad n = \frac{2.\Delta d}{\lambda} \quad (7)$$

Se agora, em vez do espelho móvel, tivermos uma superfície vibratória com movimento oscilatório, por exemplo um alto-falante; veremos uma mudança contínua nas franjas de interferência. A olho nu não temos a possibilidade de usar essa informação. Assim, ao invés de uma tela, coloquemos um detector. O que vai acontecer é que as franjas de interferência serão montadas no plano do detector, que converterá essa imagem num sinal no osciloscópio.

Também podemos determinar o número de franjas através do efeito Doppler. A frequência angular  $w$  da luz incidente, ao se refletir no alto-falante com velocidade  $u$ , se altera para o valor  $w'$ . A Intensidade da onda resultante é:

$$I = \langle |\vec{e}|^2 \rangle = \langle |\vec{e}_1(\vec{r}, t) + \vec{e}_2(\vec{r}, t)|^2 \rangle \quad (8)$$

onde o símbolo  $\langle \rangle$  representa a média temporal, e  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são ondas dadas por:

$$\vec{e}_j = \vec{E}_j \cdot \cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - w_j t), j=1,2 \quad (9)$$

Assim, encontramos:

$$I = \langle |\vec{e}_1(\vec{r}, t)|^2 + |\vec{e}_2(\vec{r}, t)|^2 + 2.\vec{e}_1(\vec{r}, t).\vec{e}_2(\vec{r}, t) \rangle \quad (10)$$

Pode ser visto facilmente que,

$$I_j = \langle |\vec{e}_j(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} |E_j|^2, j=1,2 \text{ e}$$

$$2.\langle \vec{e}_1(\vec{r}, t).\vec{e}_2(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \left[ \cos\left(\Phi_1 + \Phi_2 - \frac{w_1 + w_2}{t}\right) + \cos\left(\Phi_1 - \Phi_2 - \frac{w_1 - w_2}{t}\right) \right] \right\rangle \quad (11)$$

onde  $\Phi_j = \vec{k}_j \cdot \vec{r}$ ,  $j=1,2$ .

Mas como o detector tem resposta maior que  $w_1 - w_2$  e muito menor que  $w_1 + w_2$ , então o termo de  $w_1 + w_2$  não será detectado, dando um sinal nulo. De forma que substituindo (11) em (10) encontramos:

$$I = I_1 + I_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\Phi_1 - \Phi_2 - \Delta w \cdot t], \quad \Delta w = w_1 - w_2 \quad (12)$$

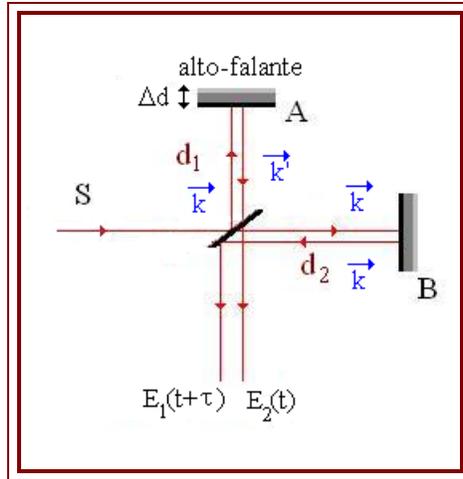


Figura 5: Modelo do interferômetro mostrando os vetores k.

Podemos agora calcular  $\Phi_j$  e a diferença de freqüência angular será dada pela relação (6), então:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = k \cdot d_1 + k' \cdot d_1 - 2 \cdot k \cdot d_2, \quad k' = k \left( 1 - 2 \cdot \frac{u}{c} \right) \text{ e } \Delta w = -2 \cdot w \cdot \frac{u}{c} \quad (13)$$

Assim, o argumento do co-seno  $\varphi$  será dado então por:

$$\varphi = k \cdot d_1 + k' \cdot d_1 - 2 \cdot k \cdot d_2 + 2 \cdot w \cdot \frac{u}{c} \quad (14)$$

Esse resultado é muito importante porque a intensidade  $I$  vai variar de acordo com a diferença de fase  $\varphi$ , então, necessariamente, essa fase contém informações a respeito dos máximos (e mínimos) de intensidade. O máximo acontece quando o  $\cos(\varphi) = 1$ , ou seja, quando  $\varphi = 2n\pi$ , ( $n=0,1,2,\dots$ ). Temos que levar em consideração a sua variação durante o movimento do alto-falante  $A$ , assim:

$$n = \frac{\int \partial \varphi}{2\pi} \quad (15)$$

Lembrando que temos duas variáveis independentes  $u$  e  $t$ , e que  $u/c \ll 1$  e  $d_1/c \ll t$ , podemos deduzir facilmente que:

$$\partial\varphi = 2k.u.\partial t + 2k.t.\partial(u) \quad (16)$$

Substituindo a equação (16) na (15), teremos uma integral em  $t$ , variando de  $t=0$  a  $t$ , e outra em  $u$  mas supondo que no início e fim do movimento temos  $u=0$ , então:

$$n = \frac{\int 2ku\partial t}{2\pi} = \frac{2kut}{2\pi} = \frac{2.\Delta d}{\lambda} \quad (17)$$

Que coincide com o resultado da equação (7), mostrando-nos que os dois processos são equivalentes. Importante lembrar que esse deslocamento  $\Delta d$  da membrana é a amplitude  $A$  do movimento do alto-falante.

Como já dito, a nossa superfície vibratória será um alto-falante alimentado com um sinal elétrico senoidal e o espelho  $B$  será móvel para que se possam fazer variações finas. No osciloscópio conecta-se o sinal que está alimentando o alto-falante e a resposta do detector. Teremos uma resposta parecida com a figura abaixo.

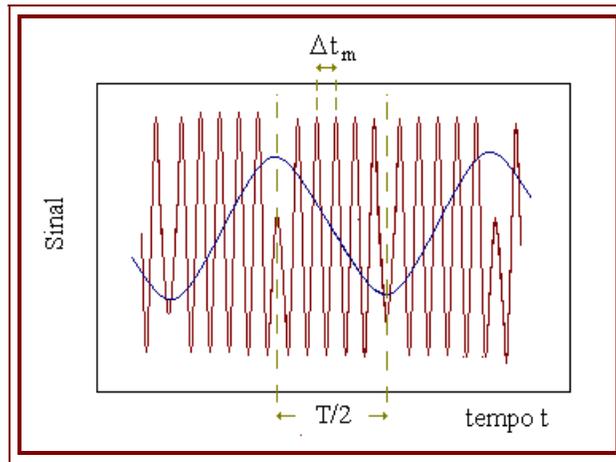


Figura 6: Exemplo de um sinal Doppler (curva vermelha) produzido por uma alimentação senoidal (curva azul) no alto-falante. Onde  $\Delta t_m$  é o período mínimo do sinal Doppler e  $T/2$  é metade do período do sinal Doppler.

Com essa informação podemos calcular a *amplitude da vibração* e a *velocidade máxima*. Sabemos que a fase  $\varphi(t)$  pode ser encontrada através da equação (17), e que a cada  $2\pi$  ela permanece constante e lembrando que o meio período corresponde a duas vezes a amplitude; podemos estimar a amplitude como:

$$\varphi \equiv \frac{4\pi.2.A(t)}{\lambda} = 2\pi.n \therefore A(t) = n.\frac{\lambda}{4} \quad (18)$$

onde  $n$  é o número de ciclos correspondente a meio período. Uma vez que a *velocidade máxima* corresponde a variação de distância ( $\lambda/2$ ) dividido pelo período mínimo do sinal Doppler ( $\Delta t_m$ ) nesse espaço, temos então:

$$u_M = \frac{\lambda}{2\Delta t_m} \quad (19)$$

Se variarmos a voltagem aplicada no alto-falante, para cada valor da voltagem, haverá uma variação no número de ciclos por meio período, o que nos dá uma amplitude diferente. Suponhamos que o nosso alto-falante oscile harmonicamente, assim, o movimento da membrana será descrito por:

$$x = A \cos(2\pi ft) \quad (20)$$

onde  $A$  é a amplitude do movimento,  $f$  é a frequência aplicada e  $t$  o tempo. Uma vez que a velocidade é a derivada da posição pelo tempo:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -2\pi f A \sin(2\pi ft)$$

$$u = -u_M \sin(2\pi ft) \quad \text{onde} \quad u_M = 2\pi f A \quad (21)$$

A equação (21) nos diz que a velocidade máxima é proporcional à amplitude, dessa forma se traçarmos um gráfico de  $u_m$  por  $A$  obteremos uma reta.

#### *Medição automática da velocidade:*

Trata-se de um circuito eletrônico, chamado RMS, capaz de medir a velocidade média. Ele consiste num circuito integrado com um gerador de pulsos e um capacitor com um resistor de descarga. Cada vez que o sinal Doppler cruza o zero, um pulso de voltagem com tamanho e duração fixo é produzido e dirigido ao capacitor. O equilíbrio entre os processos de carga e descarga determina o valor da tensão num estado constante no capacitor, dada pela equação:

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{R} = qv_D \quad (22)$$

onde  $V$  é a voltagem no capacitor,  $C$  é a capacitância,  $R$  é a resistência,  $q$  é a quantidade de carga de cada pulso do capacitor e  $v_D$  é o sinal Doppler. A saída que é medida pelo aparelho é encontrada fazendo a média temporal da equação acima:

$$\left\langle C \frac{\partial V}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{V}{R} \right\rangle = q \left\langle \frac{2|u(t)|}{\lambda} \right\rangle \quad (23)$$

onde  $f_D$  foi encontrada pela equação (19) e o símbolo  $\langle \rangle$  significa a média temporal. O módulo da velocidade é considerado porque o aparelho não é sensível a direção da velocidade, só depende do seu valor absoluto. As condições de equilíbrio reduzem a equação (23) para:

$$\langle V \rangle = \frac{2qR}{\lambda} \langle |u(t)| \rangle \therefore \langle V \rangle = \frac{2qR}{\lambda} u_M \langle \text{sen}(wt) \rangle \text{ com } \left\langle \frac{\partial V}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad (24)$$

e  $u_M$  dado pela equação (21). Pelo desenvolvimento da série de Fourier sabemos que  $\langle \text{sen}(wt) \rangle$  é  $2/\pi$ , substituindo, temos:

$$\langle V \rangle = \frac{4qR}{\pi\lambda} u_M \quad (25)$$

## Parte Experimental

Foi construído um interferômetro de Michelson e em um dos seus braços foi posto um alto-falante alimentado com um sinal senoidal.

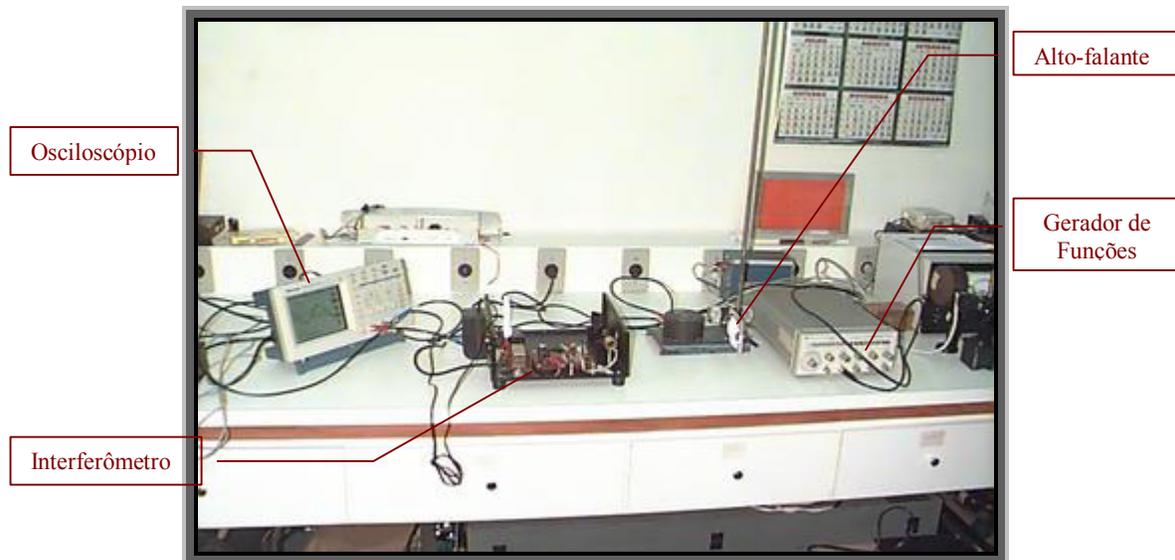


Figura 7: Foto da bancada experimental.

Materiais usados:

- 1) Para a construção do interferômetro:
  - Laser semiconductor;

- Espelho plano;
  - Divisor de feixe, 50% de transmitância;
  - Detector;
  - Anteparo pintado com tinta retro-refletiva;
  - Circuito controlador de potência e
  - Transformador.
- 2) Para montagem experimental:
- Osciloscópio;
  - Alto-falante pintado com tinta retro-refletida e
  - Gerador de Funções;
  - Multímetro;
  - Fonte para o RMS e
  - RMS.

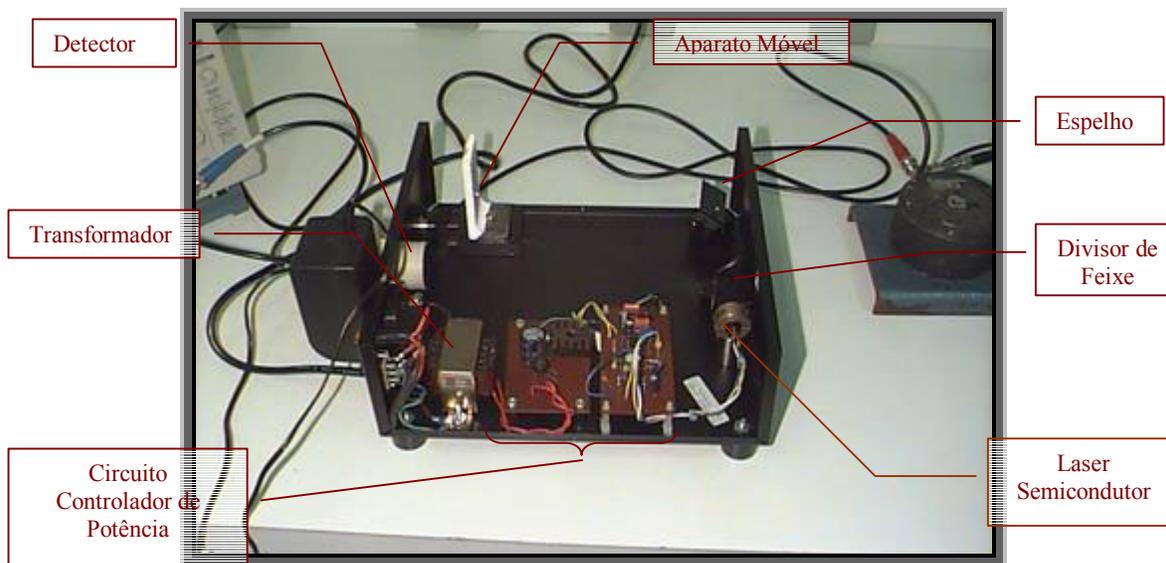


Figura 8: Foto do Interferômetro de Michelson

O laser deve ser alinhado com o divisor de feixe de forma que o feixe de luz incida exatamente no detector para que o feixe retorne pelo mesmo caminho. O alto-falante é ajustado de forma que as distâncias entre ele e o espelho com relação ao divisor de feixe devem ser próximas, dessa forma as frentes de onda serão aproximadamente iguais. Para fazer correções mais finas, o anteparo está sob um suporte que permite pequenos ajustes.

Devemos ressaltar que o foco do laser deve estar sobre o anteparo. Para modificar o foco do laser, nós podemos rodar a lente no sentido horário ou anti-horário para afastar ou aproximar o ponto focal.

Com essa montagem, observamos no osciloscópio gráficos similares ao da figura 6. Variando a amplitude do sinal senoidal, podemos obter várias velocidades máximas e amplitudes de movimento para uma mesma freqüência. Com esses dados podemos traçar um gráfico da velocidade máxima pela amplitude.

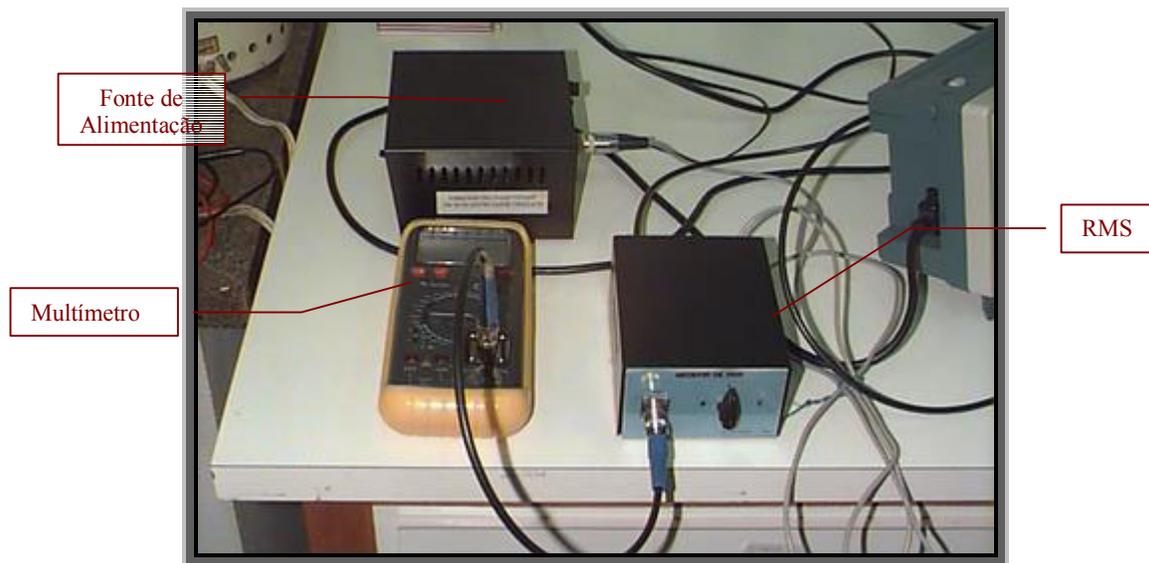


Figura 9: Foto do aparelho de RMS.

O Multímetro medirá o valor da tensão média para cada velocidade média, podemos então desenhar esses valores.

### Resultados e Análises de Dados:

Tabela 1: Tabela com o número de ciclos por meio período Doppler ( $n$ ), o valor de tensão medido pelo RMS, o menor período Doppler ( $\Delta t_m$ ) e meio período Doppler ( $\Delta t_M$ ), para a freqüência de  $f = 1,2$  kHz.

<i>Ciclos</i>	<i>RMS (volts)</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math></i>	<i><math>\Delta t_M (10^{-6}s)</math></i>
3,1 ± 0,5	0,17 ± 0,01	94 ± 1	390 ± 1
3,4 ± 0,5	0,20 ± 0,01	84 ± 1	396 ± 1
5,4 ± 0,5	0,28 ± 0,01	54 ± 1	406 ± 1
6,0 ± 0,5	0,33 ± 0,01	46 ± 1	394 ± 1
6,9 ± 0,5	0,36 ± 0,01	40 ± 1	394 ± 1
7,5 ± 0,5	0,42 ± 0,01	36 ± 1	396 ± 1
8,2 ± 0,5	0,47 ± 0,01	30 ± 1	402 ± 1
9,2 ± 0,5	0,53 ± 0,01	28 ± 1	402 ± 1
10,0 ± 0,5	0,57 ± 0,01	26 ± 1	402 ± 1
11,4 ± 0,5	0,64 ± 0,01	22 ± 1	404 ± 1
12,0 ± 0,5	0,69 ± 0,01	20 ± 1	404 ± 1
14,0 ± 0,5	0,79 ± 0,01	18 ± 1	400 ± 1

Tabela 2: Tabela com o número de ciclos por meio período Doppler (n), o valor de tensão medido pelo RMS, o menor período Doppler ( $\Delta t_m$ ) e meio período Doppler ( $\Delta t_M$ ), para a frequência de  $f = 1,6$  kHz.

<i>Ciclos</i>	<i>RMS (volts)</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math></i>	<i><math>\Delta t_M (10^{-6}s)</math></i>
3,5 ± 0,5	0,17 ± 0,01	94 ± 1	360 ± 1
4,0 ± 0,5	0,20 ± 0,01	70 ± 1	352 ± 1
4,5 ± 0,5	0,28 ± 0,01	60 ± 1	340 ± 1
5,3 ± 0,5	0,33 ± 0,01	52 ± 1	344 ± 1
5,7 ± 0,5	0,36 ± 0,01	50 ± 1	342 ± 1
6,3 ± 0,5	0,42 ± 0,01	38 ± 1	340 ± 1
7,0 ± 0,5	0,47 ± 0,01	34 ± 1	346 ± 1
8,0 ± 0,5	0,53 ± 0,01	30 ± 1	336 ± 1
8,6 ± 0,5	0,57 ± 0,01	28 ± 1	342 ± 1
9,7 ± 0,5	0,64 ± 0,01	24 ± 1	342 ± 1
10,3 ± 0,5	0,69 ± 0,01	22 ± 1	342 ± 1
11,8 ± 0,5	0,79 ± 0,01	20 ± 1	344 ± 1

Tabela 3: Tabela com o número de ciclos por meio período Doppler (n), o valor de tensão medido pelo RMS, o menor período Doppler ( $\Delta t_m$ ) e meio período Doppler ( $\Delta t_M$ ), para a frequência de  $f = 1,8$  kHz.

<i>Ciclos</i>	<i>RMS (volts)</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math></i>	<i><math>\Delta t_M (10^{-6}s)</math></i>
2,5 ± 0,5	0,17 ± 0,01	92 ± 1	310 ± 1
3,3 ± 0,5	0,20 ± 0,01	82 ± 1	304 ± 1
4,0 ± 0,5	0,28 ± 0,01	56 ± 1	304 ± 1
4,8 ± 0,5	0,33 ± 0,01	46 ± 1	308 ± 1
5,0 ± 0,5	0,36 ± 0,01	44 ± 1	312 ± 1
5,6 ± 0,5	0,42 ± 0,01	38 ± 1	306 ± 1
6,7 ± 0,5	0,47 ± 0,01	34 ± 1	310 ± 1
7,6 ± 0,5	0,53 ± 0,01	28 ± 1	312 ± 1
7,0 ± 0,5	0,57 ± 0,01	26 ± 1	314 ± 1
9,0 ± 0,5	0,64 ± 0,01	24 ± 1	310 ± 1
9,3 ± 0,5	0,69 ± 0,01	22 ± 1	306 ± 1
10,8 ± 0,5	0,79 ± 0,01	20 ± 1	306 ± 1

Tabela 4: Tabela com o valor de voltagem pelo menor período Doppler ( $\Delta t_m$ ) para a frequência de  $f=3,04; 3,29$  e  $5,40$  kHz.

<i>RMS (Volts)</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math> <math>f=3,04</math> kHz.</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math> <math>f=4,29</math>kHz.</i>	<i><math>\Delta t_m (10^{-6}s)</math> <math>f=5,40</math> kHz.</i>
0,17 ± 0,01	112 ± 1	92 ± 1	-
0,20 ± 0,01	88 ± 1	88 ± 1	90 ± 1
0,28 ± 0,01	56 ± 1	58 ± 1	60 ± 1
0,33 ± 0,01	52 ± 1	50 ± 1	51 ± 1
0,36 ± 0,01	44 ± 1	47 ± 1	48 ± 1
0,42 ± 0,01	38 ± 1	40 ± 1	39 ± 1
0,47 ± 0,01	36 ± 1	34 ± 1	35 ± 1
0,53 ± 0,01	30 ± 1	30 ± 1	31 ± 1
0,57 ± 0,01	28 ± 1	28 ± 1	29 ± 1
0,64 ± 0,01	24 ± 1	25 ± 1	25 ± 1
0,69 ± 0,01	22 ± 1	24 ± 1	21 ± 1
0,79 ± 0,01	-	23 ± 1	19 ± 1

Tabela 5: Tabela com o valor de amplitude A e velocidade máxima para as frequências  $f=1,2; 1,6; 1,8$  kHz.

<i><math>f=1,2</math> kHz</i>		<i><math>f=1,6</math> kHz</i>		<i><math>f=1,8</math> kHz</i>	
<i>A (<math>10^{-6}m</math>)</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math></i>	<i>A (<math>10^{-6}m</math>)</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math></i>	<i>A (<math>10^{-6}m</math>)</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math></i>
0,50 ± 0,03	3,46 ± 0,04	0,57 ± 0,03	3,46 ± 0,04	0,41 ± 0,03	3,53 ± 0,04
0,55 ± 0,03	3,87 ± 0,05	0,65 ± 0,03	4,64 ± 0,07	0,54 ± 0,03	3,96 ± 0,05
0,88 ± 0,03	6,0 ± 0,1	0,73 ± 0,03	5,42 ± 0,09	0,65 ± 0,03	5,8 ± 0,1
0,98 ± 0,03	7,1 ± 0,2	0,85 ± 0,03	6,3 ± 0,1	0,78 ± 0,03	7,1 ± 0,2
1,12 ± 0,03	8,1 ± 0,2	0,92 ± 0,03	6,5 ± 0,1	0,81 ± 0,03	7,4 ± 0,2
1,22 ± 0,03	9,0 ± 0,3	1,03 ± 0,03	8,6 ± 0,2	0,91 ± 0,03	8,6 ± 0,2
1,33 ± 0,03	10,8 ± 0,4	1,14 ± 0,03	9,6 ± 0,3	1,09 ± 0,03	9,6 ± 0,3
1,50 ± 0,03	11,6 ± 0,4	1,31 ± 0,03	10,8 ± 0,4	1,24 ± 0,03	11,6 ± 0,4
1,62 ± 0,03	12,5 ± 0,5	1,40 ± 0,03	11,6 ± 0,4	1,14 ± 0,03	12,5 ± 0,5
1,85 ± 0,03	14,8 ± 0,7	1,57 ± 0,03	13,5 ± 0,6	1,46 ± 0,03	13,5 ± 0,6
1,95 ± 0,03	16,3 ± 0,8	1,68 ± 0,03	14,8 ± 0,7	1,51 ± 0,03	14,8 ± 0,7
2,28 ± 0,03	18 ± 1	1,92 ± 0,03	16,3 ± 0,8	1,76 ± 0,03	16,3 ± 0,8

Tabela 6: Tabela com o valor do RMS para cada velocidade máxima para as frequências  $f=3,04; 4,29; 5,40$  kHz.

<i>RMS (Volts)</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math> <math>f=3,04</math> kHz.</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math> <math>f=4,29</math>kHz.</i>	<i><math>u_M(10^{-3}m/s)</math> <math>f=5,40</math> kHz.</i>
0,17 ± 0,01	2,90 ± 0,03	3,53 ± 0,04	-
0,20 ± 0,01	3,69 ± 0,04	3,69 ± 0,04	3,61 ± 0,04
0,28 ± 0,01	5,8 ± 0,1	5,6 ± 0,1	5,42 ± 0,09
0,33 ± 0,01	6,3 ± 0,1	6,5 ± 0,1	6,4 ± 0,1
0,36 ± 0,01	7,4 ± 0,2	6,9 ± 0,2	6,8 ± 0,1
0,42 ± 0,01	8,6 ± 0,2	8,1 ± 0,2	8,3 ± 0,2
0,47 ± 0,01	9,0 ± 0,3	9,6 ± 0,3	9,3 ± 0,3
0,53 ± 0,01	10,8 ± 0,4	10,8 ± 0,3	10,5 ± 0,3
0,57 ± 0,01	11,6 ± 0,4	11,6 ± 0,4	11,2 ± 0,4

$0,64 \pm 0,01$	$13,5 \pm 0,6$	$13,0 \pm 0,5$	$13,0 \pm 0,5$
$0,69 \pm 0,01$	$14,8 \pm 0,7$	$13,5 \pm 0,6$	$15,5 \pm 0,7$
$0,79 \pm 0,01$	-	$14,1 \pm 0,6$	$17,1 \pm 0,9$

A partir da *tabela 5* podemos traçar um gráfico da amplitude  $A$  pela velocidade máxima  $u_M$ . Pode-se verificar observando as *figuras 10 e 11*, que a amplitude é linear com relação a velocidade média. A partir da *tabela 6* e acrescentando as outras velocidades máximas encontradas, podemos traçar um gráfico da velocidade pelo RMS.

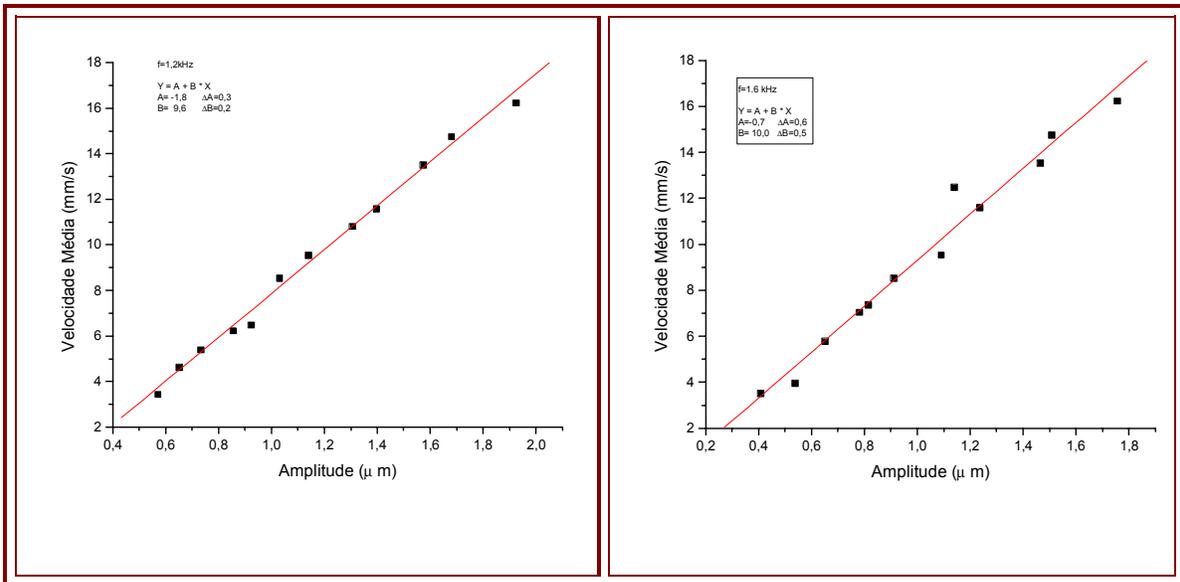


Figura 10: Gráficos da amplitude pela Velocidade Máxima para frequências  $f=1,2$  e  $1,6$  kHz.

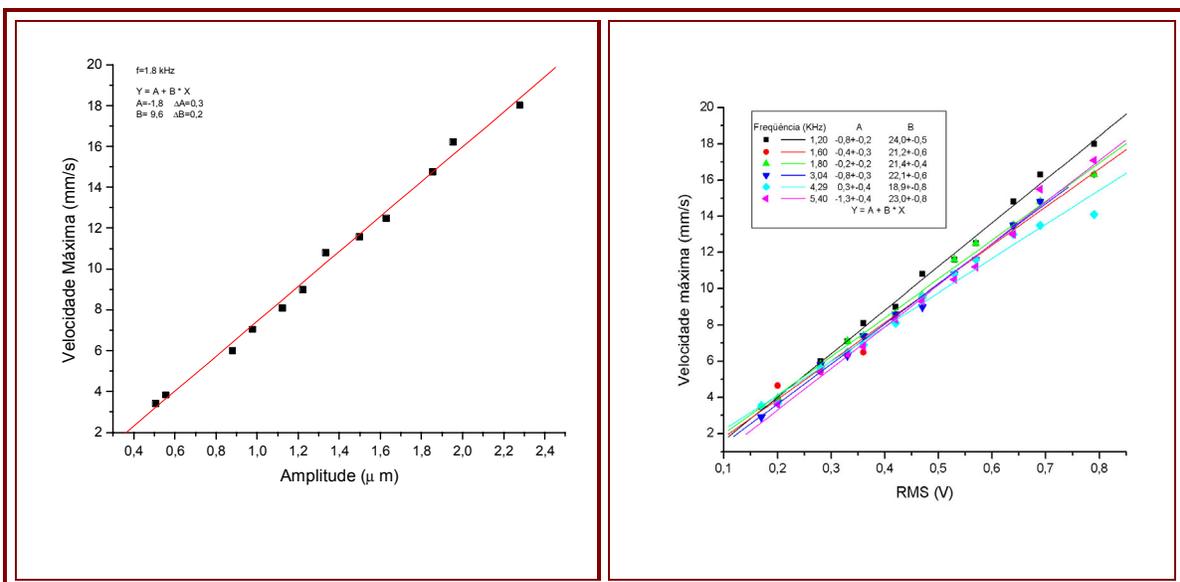


Figura 11: à esquerda - Gráficos da amplitude pela Velocidade Máxima para frequência  $f=1,8$  kHz, à direita - Gráfico do RMS pela Velocidade Máxima das frequências  $f=3,04$ ;  $4,29$ ;  $5,40$  kHz.

Percebemos que o gráfico do RMS pela velocidade média corresponde a uma reta, como previa a nossa teoria. Esse gráfico foi especificamente preparado com valores de frequência variados para que fosse possível reparar a influência dessa na inclinação da reta. É fácil perceber que essas flutuações não ocorrem devido a variação de frequência.

### **Conclusão:**

Esse experimento mostra uma forma de calcular o movimento harmônico unidimensional de uma membrana, de uma forma simples. Os resultados obtidos foram coerentes com a teoria tendo um erro aceitável.

A maior dificuldade está no ajuste da distância do interferômetro ao alto-falante. É fundamental esse ajuste para que as frentes de onda que interferem no plano do detector sejam aproximadamente iguais. A maior fonte de erro está no cálculo do número de ciclos do período Doppler, devido ao seu método de contagem, dando assim, grande flutuação nos dados.

### **Considerações Finais:**

A construção do interferômetro é simples e de baixo custo, sua maior dificuldade foi no ajuste do circuito controlador de potência e no alinhamento do laser. O experimento é muito interessante e contém elementos multidisciplinares que pedem um certo conhecimento prévio do aluno, especialmente na interferometria e na mecânica vibracional.

## Anexo 1 - Análise de Erros

### 1) Erro na medida de $\Delta t_m$ :

O erro no tempo ocorre devido a precisão do aparelho, no caso, o osciloscópio. Esse intervalo de tempo foi calculado usando uma das funções do aparelho. Foi considerado como casa de incerteza a última casa da medida.  $E\Delta t_m = 1s$ .

### 2) Erro na medida do número de ciclos $n$ :

Essa medida é muito imprecisa, depende essencialmente do julgo do medidor, assim seu erro tende a ser grande. Foi considerado como erro meio ciclo.  $En = 0,5$ .

### 3) Erro na medida do RMS:

O erro na voltagem ocorre devido a precisão do aparelho, no caso, o multímetro. Foi considerado como erro a última casa da medida.  $EV = 0,01V$ .

### 4) Velocidade Máxima:

$$u_M = \frac{\lambda}{2\Delta t_m} \Rightarrow \left| \frac{\partial u_M}{\partial \Delta t_m} \right| = \frac{\lambda}{2\Delta t_m^2} \Rightarrow Eu_M = \frac{\lambda}{2\Delta t_m^2} E\Delta t_m \quad (26)$$

### 5) Amplitude:

$$A(t) = n \cdot \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow EA = \frac{\lambda}{4} En \quad (27)$$

## Anexo 2 – Detalhes de Construção do Interferômetro

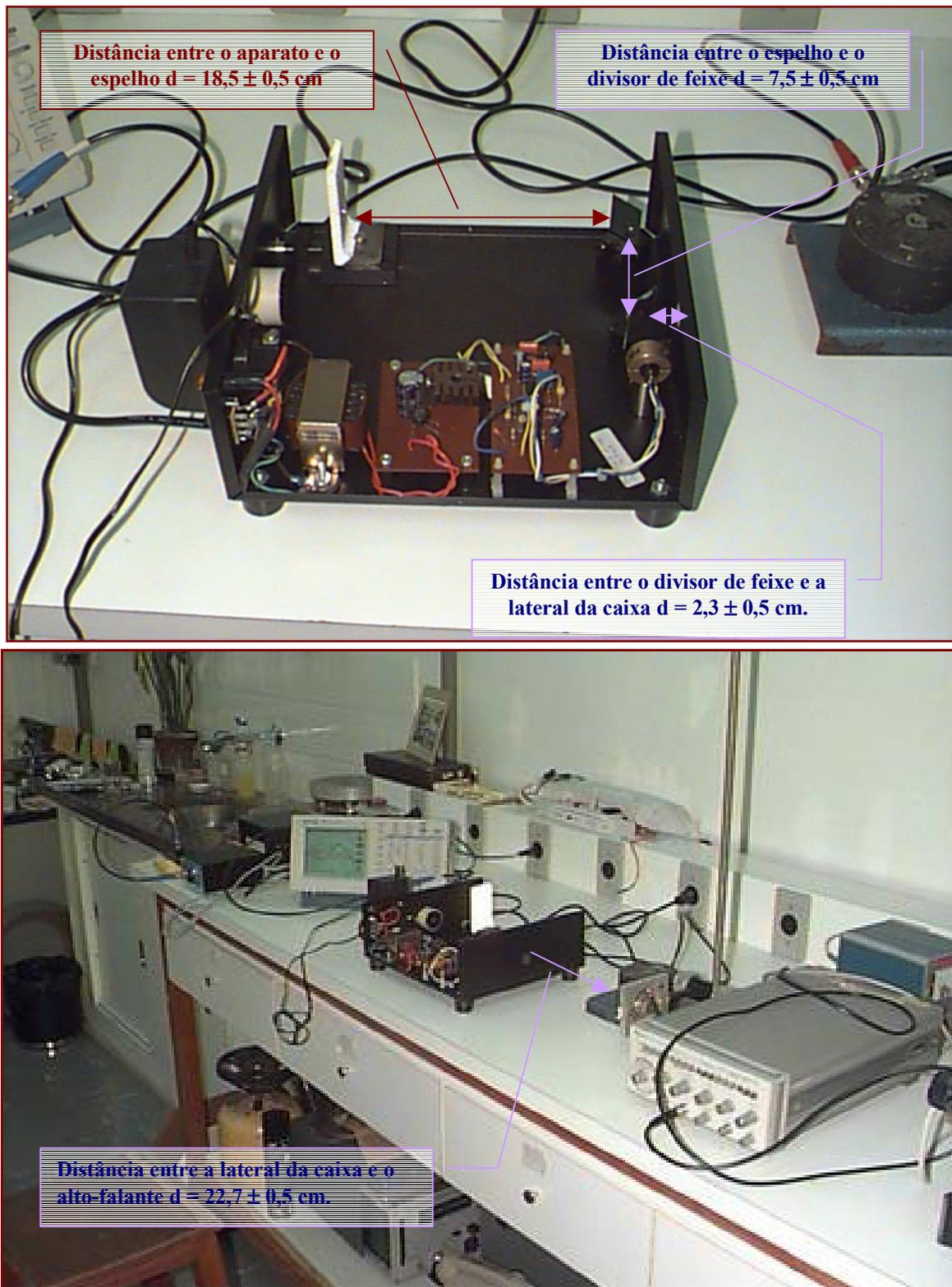


Figura 12: Foto da montagem experimental mostrando as distâncias entre os espelhos (primeira acima) e a distância entre o interferômetro e o alto-falante.

## **Bibliografia:**

BELANSKY, R. H., WANSER, K. H.. Laser Doppler velocimetry using a bulk optic Michelson interferometer: a student laboratory experiment. **American Journal of Physics**, v. 61, n. 11, p. 1014-1019, nov. 1993.

BEN-YOSEF, N., GINIO, A., WEITZ, A. Measurement and analysis of mechanical vibrations by means of optical heterodyning techniques. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, v.7, p.218-220, 1974.

FOWLES, Grant R. **Introduction to Modern Optics**. 2 ed. University of Utah; Dover Publication, Inc., New York

FREJLICH J., FRESCHI A. A., KAMSHILIN, A. A. Doppler velocimetry for photodetector frequency response measurement. **Optics Communications**, v. 90, n. 4,5,6, p. 193-196, jun. 1992.

FREJLICH, J. **Tópicos De Ótica: Interferência, Coerência e Holografia**. Universidade Estadual de Campinas; Setor de Publicações IFGW, Campinas, 2002

FREJLICH, J., RAPOSO, A., CASTELIN, C.. **Laser Doppler Velocimetry**. Abr. 2002.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. **Fundamentos de Física 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 4 ed. Trad. José Antônio e Souza. Livros Técnicos e Científicos; Rio de Janeiro; 1996. cap 18 p. 139-156.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. **Fundamentos de Física 4: Ótica e Física Moderna**. 4 ed. Trad. Ronaldo Sérgio de Biasi. Livros Técnicos e Científicos; Rio de Janeiro; 1995. cap 40 p. 61-77.

MICHELSON, A. A. **Studies in Optics**. Dover Publication, Inc., New York

NICHOLS, T. D., HARRISON, D. C., ALPERT S. S.. Simple laboratory demonstration of the Doppler shift of laser light. **American Journal of Physics**, v. 53, n. 7, p. 657-660, jul. 1985.

Bibliografia Eletrônica:

<http://www.cdcc.sc.usp.br/ondulatória/batim.html>