

# Aplicações de alguns Princípios de Hidrodinâmica e Fluidodinâmica

Aluno: Carlos Roberto Senise Junior, RA: 991499

Orientador: Mauro M. G. de Carvalho  
IFGW

## Resumo

Este projeto visa o estudo e aplicação de alguns princípios básicos, mas muito importantes em Hidrodinâmica e Fluidodinâmica, como o Princípio da Continuidade e o Princípio de Bernoulli, através de dois experimentos.

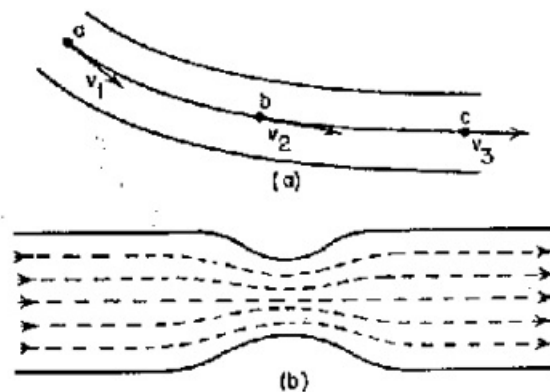
## 1. Introdução

Antes de descrever como demonstraremos estes princípios através dos experimentos, desenvolveremos uma parte teórica, onde daremos uma base matemática demonstrando assim que podemos descrever os experimentos quantitativamente. Isto é, faremos uma introdução teórica, onde demonstraremos os princípios da continuidade e de Bernoulli.

Depois disto, faremos uma descrição dos experimentos a serem realizados, demonstrando assim, experimentalmente, que as análises matemáticas feitas, são válidas.

## 2. Teoria

Para os nossos propósitos, consideramos apenas fluxos estacionários. Mas o que são fluxos estacionários? Consideremos um fluido correndo num cano, como mostra a figura 1:



**Figura 1: Fluxo estacionário e suas linhas de corrente.**

Num ponto  $a$ , uma partícula do fluido tem uma certa velocidade  $v_1$ , no ponto  $b$  sua velocidade é  $v_2$ , e em  $c$  sua velocidade é  $v_3$ . Se à medida que o tempo passa, a velocidade de qualquer partícula do fluido que estiver em  $a$  for ainda  $v_1$ , aquela em  $b$   $v_2$ , e aquela em  $c$   $v_3$ , então o movimento se diz estacionário. O caminho seguido por uma partícula do fluido em movimento estacionário à medida que ele atravessa o cano é chamado de linha de corrente.

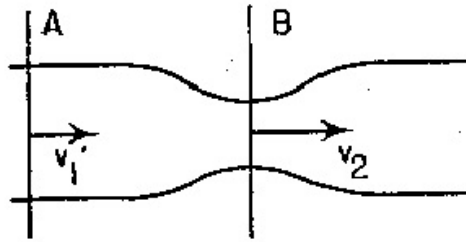
Na figura 1(a), desenhamos apenas uma das muitas linhas de corrente possíveis. Este é o caminho  $abc$ . Na figura 1(b), desenhamos algumas linhas de corrente num líquido que passa por um tubo com uma constricção. Observa-se que as linhas de corrente aproximam-se na constricção. Linhas de corrente são caracterizadas pela propriedade de que a tangente em cada um de seus pontos dá a direção em que o fluido escoar.

Além disso, as partículas do fluido não podem passar de uma linha de corrente para outra. Como é sugerido na figura 1, nas regiões onde as linhas de corrente se aproximam, a velocidade do fluxo aumenta.

Um grupo de linhas de corrente similares é chamado um tubo de corrente. No estado estacionário de fluxo de líquidos em tubos, consideramos o líquido como passando por um tubo de corrente limitado pelo próprio tubo. Assumimos que todas as partículas que passam por um tubo de corrente tem a mesma velocidade quando passam por uma dada seção perpendicular à direção do fluxo, isto é, que não exista atrito entre as paredes do tubo e o líquido.

## 2.1 O Princípio da Continuidade

Um princípio muito útil de Hidrodinâmica é revelado considerando o fluxo estacionário de um líquido num cano (ou tubo de corrente) de secção reta variável (figura 2). A velocidade de um líquido quando ele passa pelo plano A é  $v_1$  e quando



passa pelo plano B é  $v_2$ , a área da seção A é  $a_1$  e a de B é  $a_2$ .

**Figura 2 : O Princípio da Continuidade**

Uma vez que assumimos que o líquido é incompressível, não pode haver acumulação de massa entre A e B. Assim sendo, a massa de líquido que passa por A deve ser a mesma que passa por B no mesmo intervalo de tempo, desde que não haja "fontes" ou "furos" entre A e B. Se  $\rho$  é a densidade do líquido e  $t$  o tempo, então:

$$v_1 a_1 \rho t = v_2 a_2 \rho t \quad (1)$$

A equação (1) expressa o Princípio da Continuidade. Se dividirmos a equação (1) por  $\rho t$ , teremos:

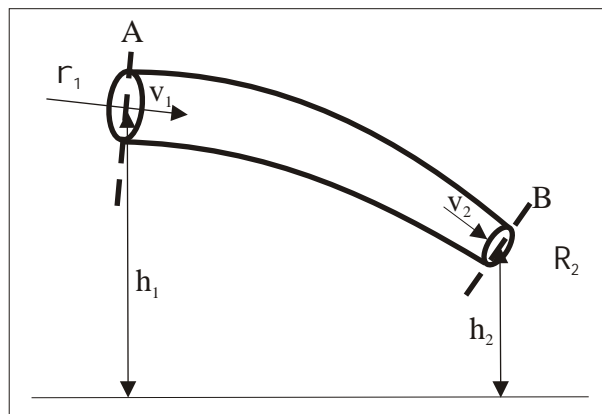
$$v_1 a_1 = v_2 a_2 \quad (2)$$

Assim, da equação (2), vemos que em B, onde  $a_2$  é menor do que  $a_1$ , a velocidade do líquido  $v_2$  é maior do que  $v_1$ .

Podemos ainda obter outro resultado interessante aplicando a segunda lei do movimento ao fluxo do líquido entre A e B. Uma partícula do líquido em A com velocidade  $v_1$  tem sua velocidade aumentada em B para  $v_2$ . Portanto, o líquido foi acelerado indo de A para B. A aceleração surge por causa de uma diferença de pressão atuando na partícula de líquido fluindo de A a B. A pressão mais alta obviamente deve ser a de A. Concluímos, portanto, que no estado estacionário a pressão é maior onde a velocidade é menor.

## 2.2 O Princípio de Bernoulli

Aplicaremos agora o princípio da conservação da energia ao fluxo de um líquido perfeitamente incompressível, de densidade  $\rho$ , num tubo de corrente entre os dois planos A e B (figura 3).



**Figura 3: Considerações energéticas num tubo de corrente**

Seja  $p_1$  a pressão,  $a_1$  a área da secção reta e  $v_1$  a velocidade das partículas do líquido em A, enquanto que  $p_2$ ,  $a_2$  e  $v_2$  são

os valores correspondentes em B. Podemos descrever o movimento como a entrada de  $Dm$  gramas de líquido através de A e a saída simultânea de  $Dm$  gramas através de B. As forças atuando na massa durante este movimento são as forças da gravidade e as forças  $p_1 a_1$  e  $p_2 a_2$  em cada extremidade do tubo de corrente. O trabalho feito pelo campo gravitacional é simplesmente a diferença em energia potencial da massa, isto é,

$$\text{Trabalho feito pela gravidade} = Dm g (h_1 - h_2) \quad (3)$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são as diferenças em altura do tubo, a partir de um plano de referência adequado.

O trabalho feito pelas forças  $p_1 a_1$  e  $p_2 a_2$  durante o tempo  $Dt$  é igual a:

$$p_1 a_1 v_1 Dt - p_2 a_2 v_2 Dt \quad (4)$$

Onde  $a_1 v_1 Dt$  é o volume da massa  $Dm$ . O efeito total do trabalho é variar a energia cinética das partículas. Podemos escrever essa variação em energia cinética como:

$$\text{Variação da energia cinética} = (1/2)Dm (v_2^2 - v_1^2) \quad (5)$$

Pelo princípio da energia então, temos:

$$Dm g (h_1 - h_2) + p_1 a_1 v_1 Dt - p_2 a_2 v_2 Dt = (1/2)Dm (v_2^2 - v_1^2) \quad (6)$$

Mas,  $a_1 v_1 Dt = a_2 v_2 Dt = (Dm / r)$ , onde  $r$  é a densidade, então, podemos reescrever a equação (6) da seguinte forma, depois de rearranjar os termos:

$$p_1 + rgh_1 + (1/2)rv_1^2 = p_2 + rgh_2 + (1/2)rv_2^2$$

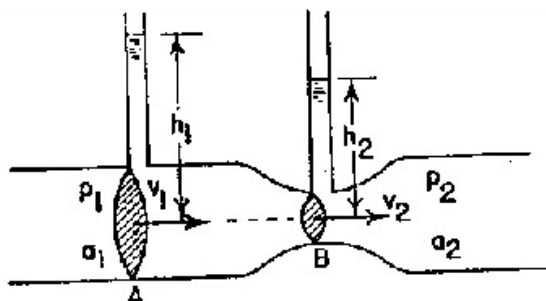
Esta equação é conhecida como o Princípio de Bernoulli ( Daniel Bernoulli, 1700 1782).

### 3. Aplicações

Para ilustrar a validade destes princípios, faremos a montagem de dois experimentos, que são os experimentos 1 e 2.

#### 3.1 Experimento 1

O primeiro experimento consiste na montagem de um Tubo de Venturi, onde mostraremos as variações de pressão num líquido perfeito numa constrição, que é mostrada abaixo na figura (4):



**Figura 4: Redução de pressão na constrição de um tubo**

Em A, a pressão é  $p_1$ , a velocidade é  $v_1$  e a área é  $a_1$ , em B, estas quantidades são  $p_2$ ,  $v_2$  e  $a_2$ . Seja  $a_2$  menor do que  $a_1$ . Aplicando o Princípio de Bernoulli, obtemos:

$$(p_1/r) + (v_1^2/2) = (p_2/r) + (v_2^2/2) \quad (7)$$

Além disso, pela equação da continuidade para um líquido incompressível:

$$a_1 v_1 = a_2 v_2 \quad (8)$$

Resolvendo estas duas equações para -, obtemos:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left\{ \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 - 1 \right\} \quad (9)$$

Como  $a_1 > a_2$ , então  $v_2 > v_1$  e, pela equação (7),  $p_1 > p_2$ . Isto mostra que numa constrição a velocidade é aumentada e a pressão diminuída.

Fizemos a montagem do tubo de Venturi, para que através dele possamos estudar a variação de pressão nos tubos, devido à constrição no tubo horizontal, como mostra a figura 5:

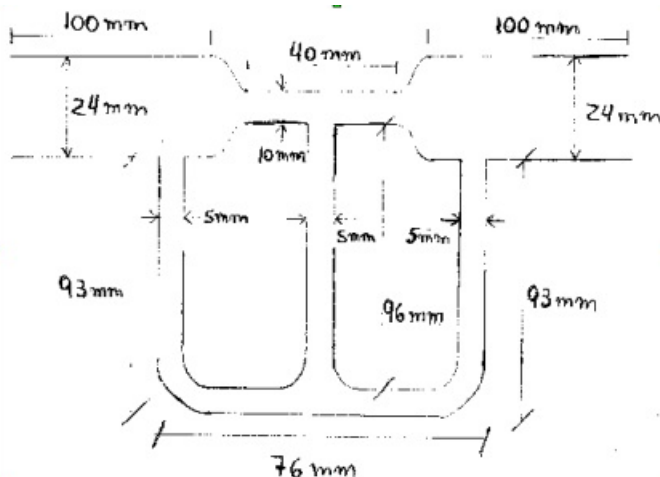


Figura 5: Esquema do Tubo de Venturi

A montagem foi toda feita com vidro, na vidraria do Instituto de Física Gleb Wataghin IFGW.

Adicionaremos uma quantidade pequena de líquido ao aparato, fazendo assim com que haja colunas de líquido nos tubos verticais. O líquido a ser utilizado será água, na qual adicionaremos corante, para uma melhor visualização dos fenômenos.

Quando fazemos com que um fluxo de ar passe pelo tubo horizontal, devido ao fato de que a seção na constrição é menor do que a do tubo, pela equação da continuidade temos que a velocidade do ar na constrição será maior do que a velocidade do ar no tubo. Portanto, como em regiões onde a velocidade é maior a pressão hidrostática é menor, faremos assim com que a altura das colunas de líquido variem, devido à diferença de pressão entre os tubos.

### 3.2 Experimento 2

No experimento 2, mostraremos experimentalmente o seguinte enunciado qualitativo muito geral para todos os fluidos (líquidos e gases) em fluxo estacionário:

**Em regiões onde a velocidade é aumentada a pressão hidrostática do fluido é menor do que nas regiões vizinhas.**

Para isto, "penduraremos" uma esfera de isopor, através de uma linha, à um pequeno motor de pilha, que fará com que a esfera gire em torno de si mesma. Depois, com um pequeno ventilador, jogaremos um fluxo de ar em um dos lados da esfera. A combinação do fluxo de ar devido ao ventilador e aquele devido à rotação da esfera resultará em velocidades diferentes para o ar que passa pela esfera em lados opostos dela. A esfera se desvia para a região de pressão mais baixa, isto é, curva naquela direção em que sua "face" está se movendo. Isto é mostrado na figura 6:

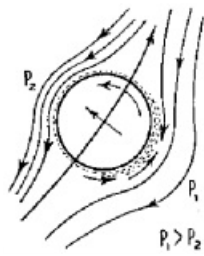


Figura 6: A curvatura de uma esfera girante

No lado  $p_2$  a velocidade do ar é aproximadamente a soma daquela devida ao ventilador e daquela devida ao ar que é arrastado pela esfera em sua rotação, enquanto que no lado  $p_1$  estas duas velocidades estão em oposição. Existe, então, uma velocidade de ar maior no lado  $p_2$  do que no lado  $p_1$ , resultando numa pressão do ar  $p_2$  menor do que  $p_1$ , e portanto uma força lateral na direção do lado  $p_2$ .

Uma outra forma interessante de mostrar estes efeitos é pendurar duas esferas de isopor lado a lado. Estas esferas apresentam uma "atração" aparente quando um jato de ar é lançado entre elas. Entre as duas esferas a velocidade do ar é muito grande e a pressão é reduzida, decorrendo daí uma força lateral que tende a juntar as duas bolas.

Para este experimento, encaixamos um pequeno motor de um helicoptero de brinquedo em uma fórmica através de uma peça feita na oficina mecânica do departamento de Física Aplicada do IFGW. O esquema do encaixe do motor, com a peça, é mostrado na figura 7:

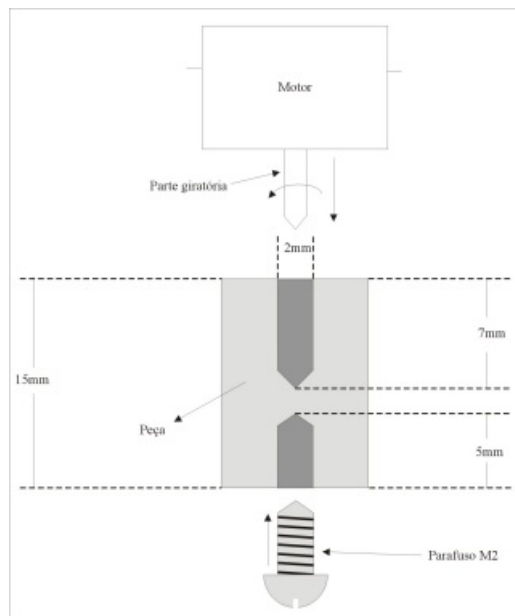


Figura 7: Esquema do encaixe motor-peça

Depois encaixamos uma linha de nylon ao parafuso e depois passamos a linha através da esfera de isopor. Assim sendo, ao ligarmos o motor faremos com que a esfera gire. A montagem experimental final é mostrada na figura 8:

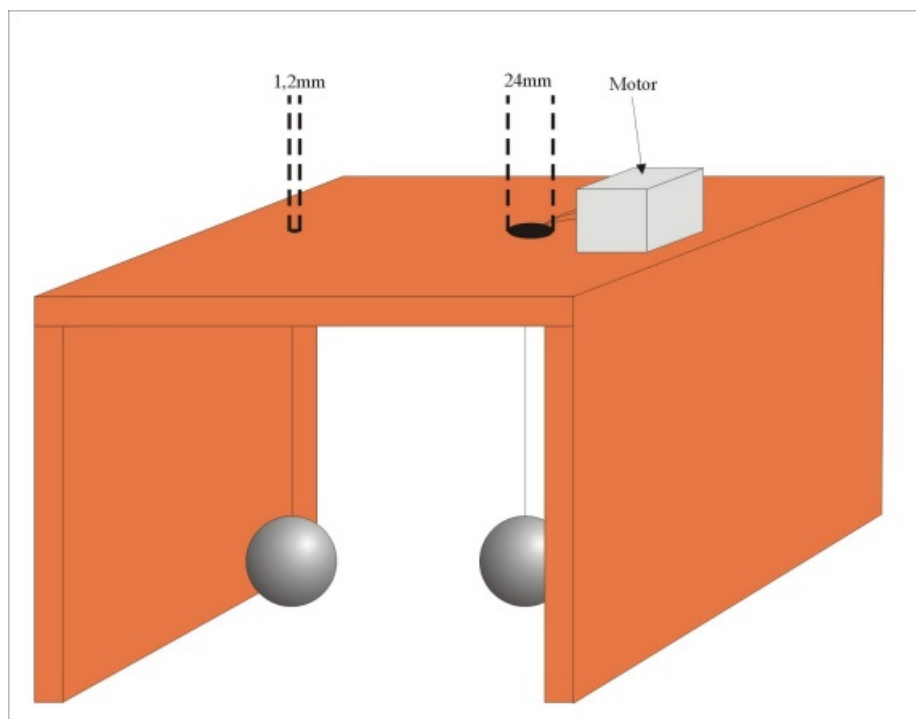


Figura 8: Montagem experimental final

#### 4. Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao técnico da oficina mecânica do departamento de física aplicada Pedro Cirilo e aos meus colegas de curso em geral, especialmente a Marcelo de Lima Lopes, Vinicius Isola e Emiliano Augusto Chagas pela ajuda em áreas onde não caminharia sozinho...

#### 5. Bibliografia

1. Fundamentos de Física 2, Halliday, Resnick, Walker, ed.
2. Curso de Física Mecânica, Ferenca Jr., Lemon, Stephenson, Ed. Edgard Blucher.
3. Apostila para as disciplinas de laboratório básico, René Brenzikofer