



## Estatística de Poisson

Aluno – Rafael Medeiros de Souza – 003289  
Orientador – Richard Landers

### INTRODUÇÃO

Neste estudo será explorada a estatística de eventos randômicos, por meio de medidas físicas e por simulações computacionais. Os eventos randômicos estudados serão os pulsos de um detetor de cintilação exposto a raios gama de uma fonte radioativa. As técnicas utilizadas neste estudo são importantes, pois previsões teóricas complexas muitas vezes só podem ser obtidas com o auxílio de computadores. Desta forma, uma comparação entre os dados experimentais e simulações computacionais tornam-se essenciais a análise da verossimilhança entre a teoria e os resultados experimentais. Fato que ressalta a importância das distribuições estatísticas nas ciências.

### Introdução teórica

Uma seqüência de eventos randômicos independentes são aqueles que a ocorrência de um evento não tem influência na ocorrência de outro. Temos como um exemplo o decaimento radioativo simples, que se dá pela emissão de fótons de 663 Kev por uma amostra de  $^{137}\text{Cs}$ . Como contrapartida, a fissão do núcleo em uma massa crítica de  $^{235}\text{U}$  são eventos correlacionados em uma *reação em cadeia*, na qual o resultado de cada evento, afeta o resultado dos eventos subsequentes.

Um processo randômico contínuo é dito ser um *estado fixo com taxa média*  $\mu$  se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{X}{T} \right) = \mu \quad (1)$$

Onde X é o número de eventos acumulados no tempo T. Como poderíamos concluir que um certo processo ocorre, de fato há uma taxa de contagens que é fixa no tempo? Na realidade a única maneira é realizar repetidas medidas do

número de contagens  $x_i$  em intervalos de tempo  $t_i$ , e determinar quando houver uma tendência nos valores sucessivos de  $x_i/t_i$ . Tendo em vista a inevitável flutuação existente nestas razões, a questão que surge é quando as flutuações observadas estão dentro de um limite razoável para uma taxa fixa. Claramente, é necessário conhecermos a distribuição de probabilidade do número de contagens em um intervalo fixo de tempo se o processo de fato tem uma taxa fixa. Esta distribuição é conhecida como a Distribuição de Poisson e é definida pela equação,

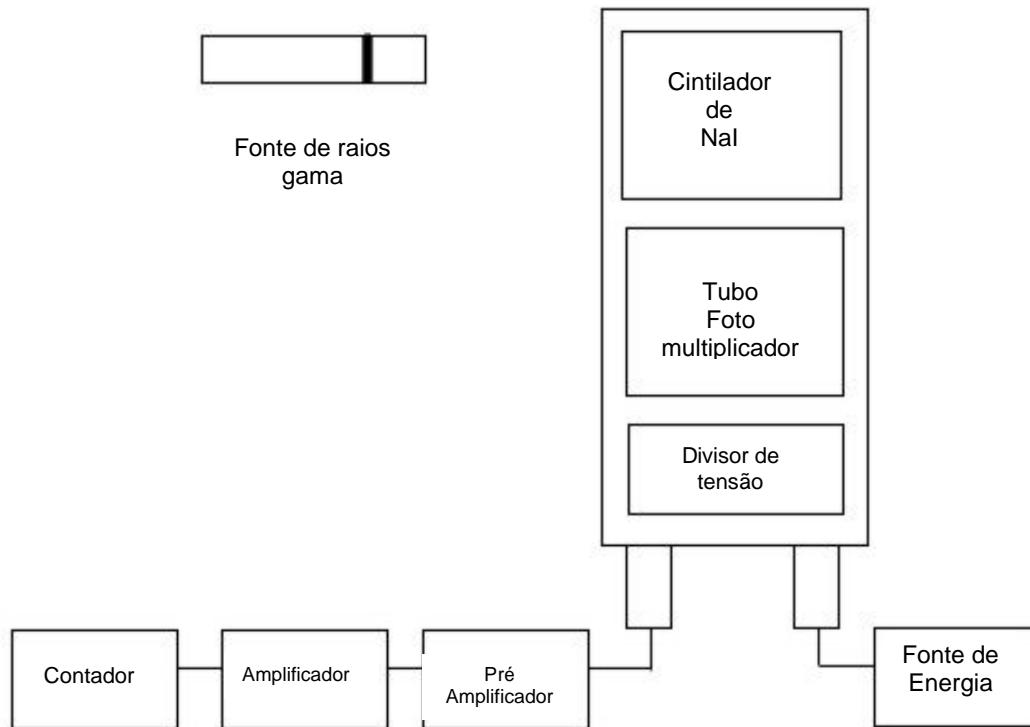
$$Pp(x; \mu) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad (2)$$

Que é a probabilidade de obtermos  $n$  contagens (sempre um inteiro) quando  $\mu$  (geralmente não um inteiro) é o número esperado. É simples de mostrar que o desvio padrão da Distribuição de Poisson simplesmente  $(\mu)^{1/2}$ , isto é, a raiz quadrada da média.

### **Experimento**

Na primeira parte deste experimento será utilizado um contador de cintilações exposto a raios gama de uma fonte radioativa, obtendo assim a distribuição de freqüências do número de contagens em iguais intervalos de tempo. Repetindo este processo o número de vezes necessárias para obtermos uma diferença razoável entre as taxas médias de contagem. A distribuição experimental e seu desvio padrão serão comparados com a distribuição teórica e seu desvio padrão.

Posteriormente será gerada uma distribuição de Poisson pelo método de simulação de Monte Carlo que também será comparada com os valores obtidos experimentalmente.



**Figura 1:** Arranjo experimental para a medição do numero de contagens de um processo randômico em um dado intervalo de tempo. Um osciloscópio é usado para monitorar o funcionamento do sistema.

Após a montagem do arranjo experimental descrito na figura 1. O detetor será exposto a raios gama de uma fonte de Cs137 ou Co60 (a definir). A voltagem aplicada à fotomultiplicadora deve ser de aproximadamente 1000 Volts. A saída da fotomultiplicadora é ligada a conexão de entrada do pré-amplificador. E Utilizando o osciloscópio obteremos a forma da onda da voltagem que sai deste. Observando o tempo de subida e descida do sinal assim como a amplitude do sinal e a polaridade.

A saída do pré-amplificador é então conectada a entrada do amplificador, que deve ser ajustada para ter um ganho moderado e para pulsos positivos. Ajustamos o multiplicador de freqüências para repetidamente adquirir por 5 segundos, mostrar o resultado e então começar novamente.

Feito isso, examinaremos a saída do amplificador no osciloscópio, para confirmarmos a performance da cadeia de medidas. Ajustamos o ganho do amplificador para produzir pulsos de aproximadamente 3V. devemos ajustar o osciloscópio de forma a termos um sinal que começa no lado esquerdo em aproximadamente 3V, vai ate um Maximo de aproximadamente 5V, torna-se negativo e finalmente vai a zero. Também ajustaremos o discriminador de contagens para 3 Volts, desta forma devemos ter uma correspondência de aproximadamente um pulso contado para um pulso mostrado.

A taxa de contagem pode ser controlada variando-se a distancia entre a fonte e o cintilador, variando-se o suporte de alta tensão na fotomultiplicadora e

variando-se o ganho no amplificador. Será montado um arranjo que gere três diferentes médias da taxa de contagens de aproximadamente 1, 10, 100  $\text{sec}^{-1}$ .

Para obtermos as simulações computacionais necessárias será utilizado o Matlab. Serão geradas 1000 distribuições para uma média,  $\mu = 1, 10, 100, 1000$ .

Em seguida, serão geradas 10 distribuições para cada uma das três contagens médias obtidas usando o cintilador. Obtendo os valores médios e desvios padrões para cada conjunto de 10 distribuições. Os dados obtidos experimentalmente serão comparados com uma Distribuição de Poisson fornecida pelo método de Monte Carlo. A media dos desvios padrão deve convergir (com algum erro estatístico) para a raiz quadrada da média que e inserida pelo gerador de Poisson.

### Equipamentos e Ferramentas Utilizadas

- *Spectroscopy Amplifier* 451;
- *Scintillation Preamplifier* 113;
- *Single Chanel Analyzer* 406a;
- Fonte de  $^{137}\text{Cs}$ ;
- MATLAB 6.1;
- Microcal Origin 7.0;
- Osciloscópio;

### Resultados e Conclusão

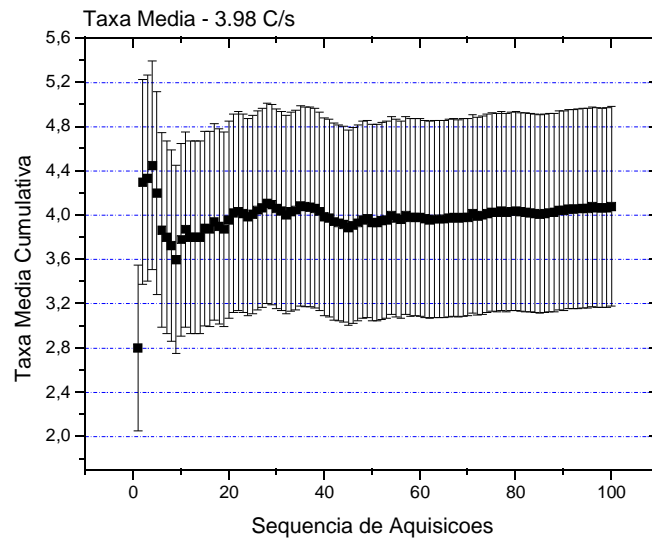
Para três taxas de contagens diferentes foram realizadas 100 aquisições de 5s. Deste modo podemos analisar de uma forma ampla o comportamento tanto do sistema de detecção como da estatística do processo (ver tabela 1).

	Taxa 1	Taxa 2	Taxa 3
<b>Média</b>	15,4	319,4	2061,55
<b>Média/s</b>	3,08	63,88	412,31
<b>DesvPad</b>	4,677476657	18,88241125	45,14161219
<b>DesvPad/s</b>	0,935495331	3,77648225	9,028322439

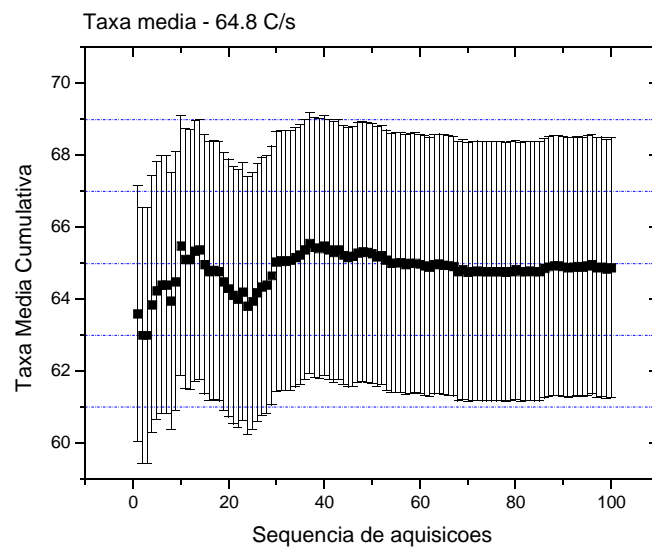
**Figura 2:** Tabela dos dados obtidos no experimento.

No laboratório em que o experimento foi realizado estão presentes outras fontes de radiação. Logo, temos que considerar a radiação de fundo. Contudo, ela se mostrou relevante somente nas contagens referentes a Taxa 1 (cerca de 20%).

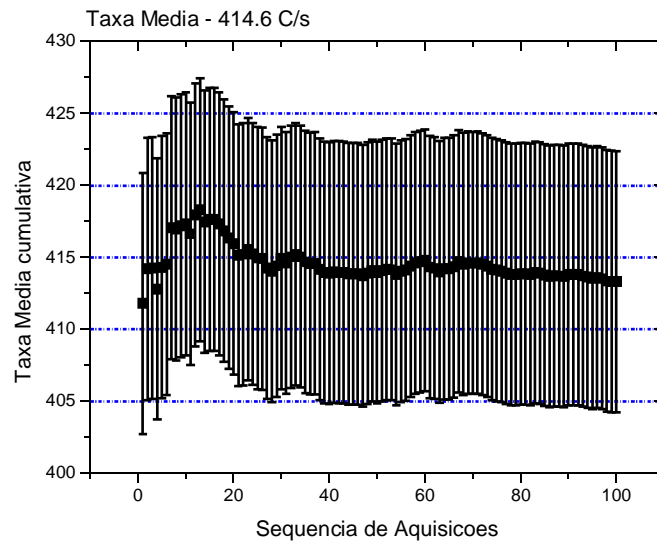
Para cada um dos três conjuntos de dados obtidos foi realizado o cálculo da taxa média cumulativa ( $r_c(j)$ ). E feito o gráfico desta grandeza em função da seqüência de números de aquisições ( $j = 1$  a 100).



**Figura 3:** Avaliação da consistência do processo para a taxa 1.



**Figura 4:** Avaliação da consistência do processo para a taxa 2.

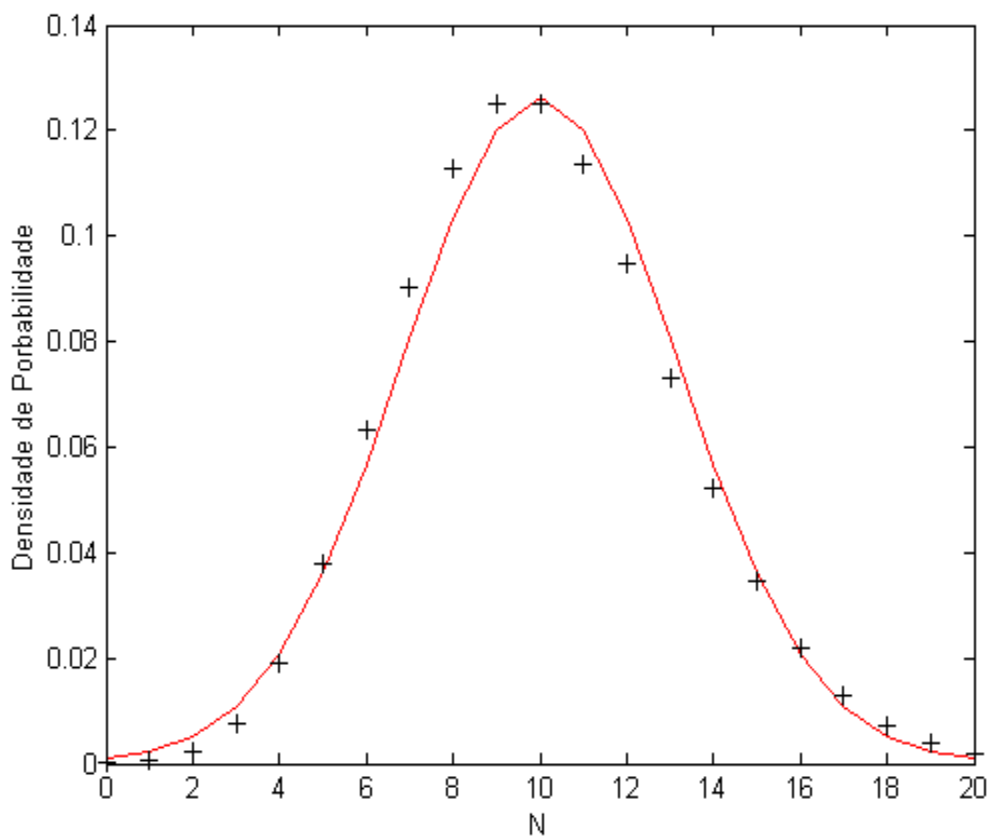


**Figura 5:** Avaliação da consistência do processo para a taxa 3.

A partir dos gráficos (ver Figs. 3,4 e 5) acima verificamos a consistência do processo de aquisição para as respectivas médias, pois em todos os gráficos temos uma convergência para a respectiva taxa média.

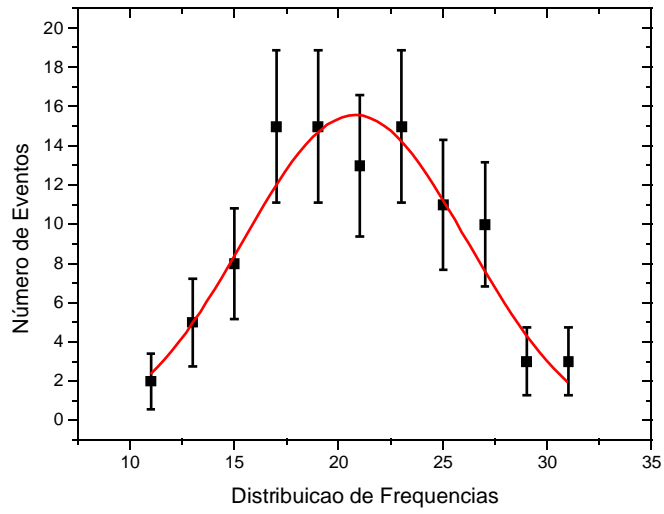
Agora iremos avaliar qual a distribuição estatística que melhor representa nosso conjunto de dados. Primeiramente, faremos uma comparação entre as Distribuições de Poisson (2) e a de Gauss. Na realidade, a Distribuição Gaussiana com média  $m$  igual a 10 e  $\sigma$  igual a  $(m)^{1/2}$  é muito similar a Distribuição de Poisson

para  $m$  igual a 10. para  $m \geq 20$  as Distribuições são virtualmente indistinguíveis (ver figura 6). Duas importantes diferenças são que a Distribuição de Poisson é definida somente para inteiros não negativos, enquanto a Distribuição Gaussiana é definida para qualquer valor de  $x$ , e que para a Distribuição de Poisson a variância  $\sigma^2$  é igual a média  $m$ , enquanto que para a Distribuição Gaussiana ela pode ter qualquer valor.

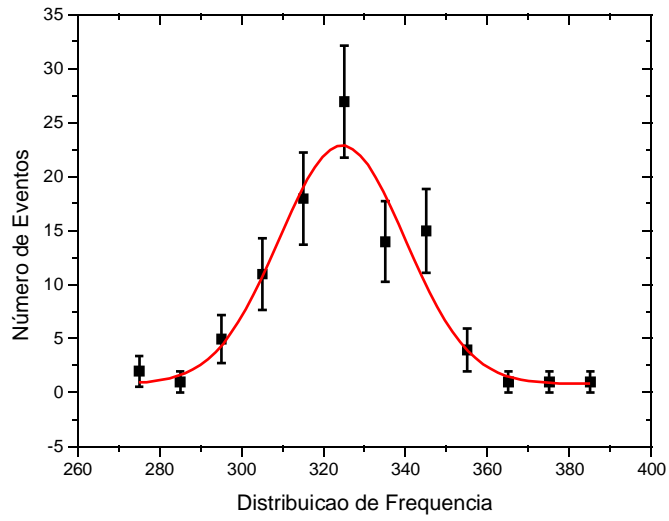


**Figura 6:** Distribuição de Poisson (+) e de Gauss(---) para média  $m=10$  e  $\sigma^2=10$ .

Nos dados obtidos experimentalmente, as menores contagens obtidas tiveram uma média de 15,4 Contagens. Portanto, em acordo com a relação citada acima entre as Distribuições de Poisson e de Gauss, o ajuste teórico das curvas de freqüências dos números de eventos observados e simulados serão realizada pela Gaussiana.

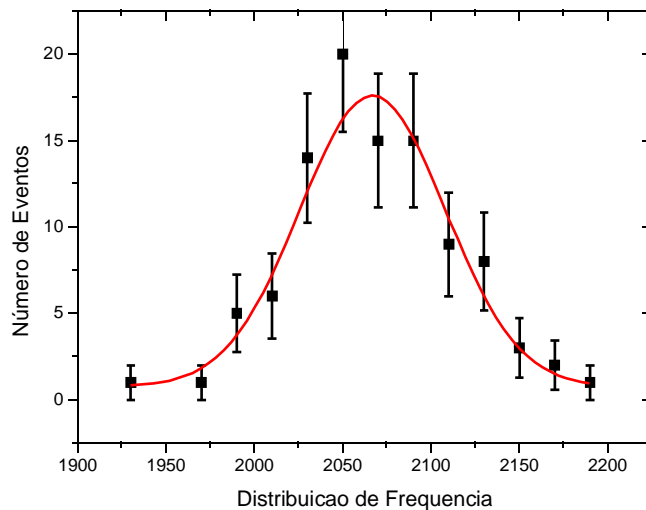


**Figura 7:** Distribuição de freqüências do número de contagens observadas para taxa 1.



**Figura 8:** Distribuição de freqüências do Número de ventos observados para taxa 2.





**Figura 9:** Distribuição de freqüências do número de eventos observados para taxa 3.

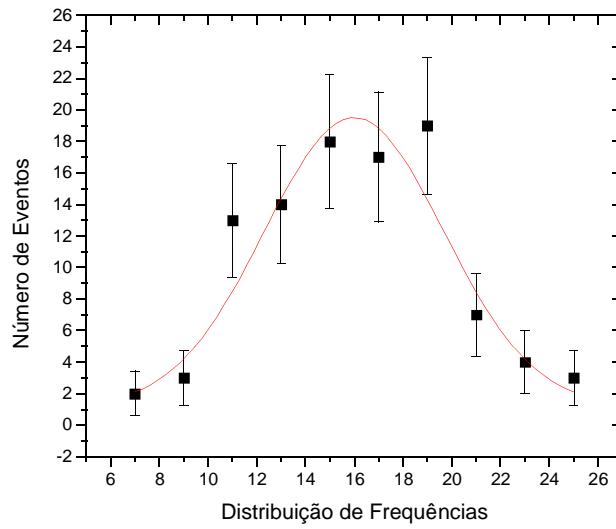
Nota-se que para as três taxas de contagens o ajuste gaussiana se mostrou razoável, de forma a termos a curva de ajuste incluída pelas barras de erros nas contagens em cada freqüência. Tendo estas curvas um coeficiente de correlação de 0,93, 0,93 e 0,94, respectivamente.

Com o objetivo de quantificarmos a verossimilhança das simulações computacionais com eventos randômicos (como pulsos de cintilação) foram gerados três conjuntos de dados, pela Distribuição de Poisson em torno das médias de Contagens obtidas experimentalmente com as taxas 1,2 e 3 (ver figura 2 e 10).

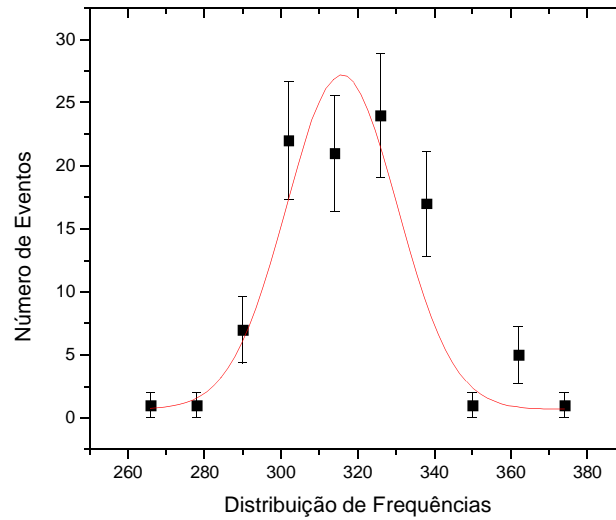
	Simulação da taxa 1	Simulação da taxa 2	Simulação da taxa 3
<b>Média</b>	15,52	319,26	45,22566473
<b>DesvPad</b>	3,960614175	19,15097909	44,99966779

**Figura 10:** tabela com os dados obtidos pela simulação computacional.

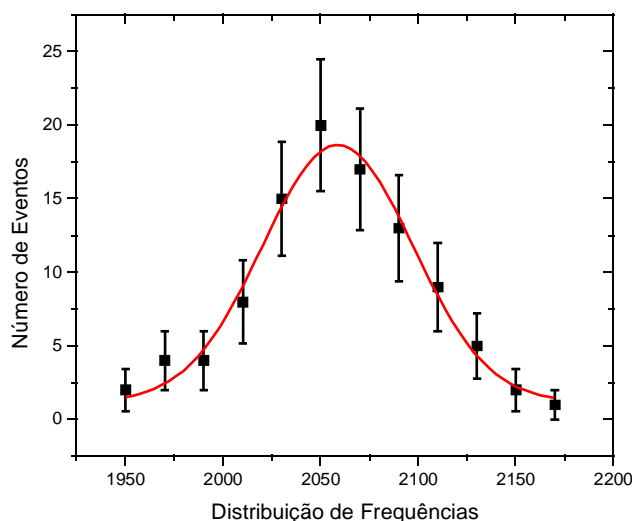
Para este novo conjunto de dados, temos as seguintes distribuições das freqüências do número de eventos gerados.



**Figura 11:** Distribuição de frequências do número de eventos simulando a taxa 1.



**Figura 12:** Distribuição de frequências do número de eventos simulando a taxa 2.



**Figura 13:** Distribuição das freqüências do número de eventos simulando a taxa 3.

Feito isso, o próximo passo em nossa análise foi realizar um teste do  $\chi^2$ . Pois desta forma poderemos avaliar a probabilidade de nossos dados pertencerem a uma Distribuição de Poisson. O que nos permitirá também realizar uma comparação entre os dados experimentais e simulados (ver figura 14).

	Taxa 1	Taxa 2	Taxa 3	Simulação da taxa 1	Simulação da taxa 2	Simulação da taxa 3
<b>Média</b>	15,4	319,4	2061,55	15,52	319,26	2056,86
<b>DesvPad</b>	4,6775	18,8824	45,1416	3,9606	19,1510	44,9997
<b>Chi<sup>2</sup></b>	140,6494	110,5135	97,8578	100,0619	113,7294	97,4651
<b>DesvPadesp</b>	3,9243	17,8718	45,4043	3,9395	17,8678	45,3526
<b>P - Valor</b>	0,005	0,25	0,69	0,5	0,24	0,51

**Figura 13:** Tabela para os testes de  $\chi^2$  realizados em todos os conjuntos de dados.

Com o teste do  $\chi^2$  é obtido o valor de P, que é a probabilidade que uma variação randômica observada em uma série de  $n$  medidas de uma distribuição de Poisson seja igual ou maior que o valor calculado de  $\chi^2$ . Um valor de P pequeno ( $p < 0,01$ ) indica que há somente uma pequena probabilidade que a distribuição de Poisson resulte em um valor do  $\chi^2$  tão grande quanto o valor observado e calculado e sugere que fontes adicionais de erros randômicos estão presentes. P valores dentro do intervalo de  $0,05 < P < 0,95$  são considerados aceitáveis. Assim um valor de P de 0,5 seria perfeito, pois ele indicaria que o valor obtido do  $\chi^2$  está no centro do intervalo esperado para a Distribuição de Poisson.

Em nossos testes o único valor de P que não é aceitável é o referente a taxa 1. O que de certa forma é aceitável, pois constatou-se uma radiação de fundo de cerca de 20% das contagens para este procedimento. Contudo o valor do

desvio padrão (DesvPad) para este conjunto de dados não é muito discrepante em relação ao seu valor esperado ( $\text{DesvPadesp} = (\text{média})^{1/2}$ ), na realidade essa diferença também se mantém, aproximadamente, para os demais conjuntos que possuem valores de P aceitáveis. Da figura 13 também temos que a diferença percentual entre as respectivas médias é menor que 1%.

As curvas ajustadas as distribuições das freqüências do número de eventos foi feito de acordo com a equação,

$$y = y_0 + \frac{A}{w\sqrt{\frac{x}{2}}} e^{-\frac{2(x-x_c)^2}{w^2}} \quad (3)$$

onde A é a área total sob a curva,  $x_c$  é o centro do pico e  $w/2$  é o desvio padrão. Logo, o ajuste nos fornece os parâmetros contidos nesta equação (ver figura 14).

Parâmetros	Taxa 1	Simulação da taxa 1	Taxa 2	Simulação da taxa 2	Taxa 3	Simulação da taxa 3
<b>Xc</b>	20,8	15,99	324,58	315,9	2067,15	2058,91
<b>W</b>	10,74	7,38	30,81	29,07	82,53	77,1
<b>A</b>	219,5	169,719	853,01	965,95	1742,25	1689,33
<b>R^2</b>	0,927	0,91	0,929	0,83	0,94	0,97

**Figura 14:** tabela com os parâmetros de ajuste das curvas para todos os conjuntos de dados.

Da figura 14, observamos que para o conjunto de dados 1 obtivemos diferenças consideráveis entre os parâmetros fornecidos pelo ajuste (entre 20% e 30%). Resultado que só reflete a não confiabilidade do sistema (ver figura 13) para baixas taxas de contagens (~3,08 C/s). Para os conjuntos 2 (taxa de ~64,88 C/s) e 3 (taxa de ~413,31 C/s) em geral, observam-se diferenças entre os parâmetros menores que 10%. De modo que no conjunto 3 as diferenças são ainda menores do que as no conjunto 2. Resultado que está de acordo com o teste do  $\chi^2$  que mostrou que o procedimento 3 era o mais confiável ( $P = 0,69$ ), e também ressalta o fato que para diminuirmos a porcentagem de incerteza em nosso conjunto de dados é desejável um maior média de contagens.

## Conclusão

Neste estudo, mais uma vez ficou comprovada a importância das previsões computacionais. Pois observamos que dados simulados podem ser muito verossímeis a resultados experimentais obtidos de fenômenos extremamente complexos, como a emissão de raios gama por uma fonte radioativa. A grande compatibilidade entre os dados experimentais e os simulados neste experimento nos confirmam a importância e a veracidade das distribuições estatísticas nas ciências, pois desta forma se torna possível a realização de experimentos inviáveis em um laboratório. As simulações pelo método de Monte Carlo não foram realizadas, pois sendo claros os objetivos deste projeto e da disciplina de

instrumentação para o Ensino, tais simulações não acrescentariam mais resultados do que os já obtidos.

### Referências

- [1] P. Bevington and D. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis to the Physical Sciences (Macgraw-Hill, 2003). 3<sup>rd</sup> Ed.*
- [2] A. Melissinos and J. Napolitano, *Experiments in Modern Physics (Academic Press, 2003). 3<sup>rd</sup> Ed.*
- [3] H. Duane, L. Bruce, *MatLab 6, Um Curso Completo*, Ed. Prentice Hall, 2003.
- [4] Cherry, Simon R., Sorenson, James A., Phelps, Michael E, *Physics in Nuclear Medicine (Saunders, 2003), 3<sup>rd</sup> Ed.*
- [5] Magalhães, Marcos N., Lima, Antonio Carlos P., *Noções de Probabilidade e Estatística (IME-USP, 2001) 3<sup>RD</sup>*