F809 – Instrumentação para o ensino

Relatório Final- Julho 2004

Título: Tradução da segunda parte da obra "Sobre o equilíbrio dos planos" de Arquimedes

Autor: Nivaldo Benedito Ferreira Campos

RA 800823

Orientador: Prof. Dr. André K. Torres Assis

1. INTRODUÇÂO

No ensino, em todas as áreas, muitas vezes o conhecimento é apresentado ao aluno como algo que existe por si só e que sempre foi parte do patrimônio cultural da humanidade. O contexto histórico e as circunstâncias em que o conhecimento foi produzido não é revelado ao aluno, privando-o de parte essencial do aprendizado: a sensação inigualável de auto-realização que advém da produção de conhecimento ou da revelação dos segredos da natureza, a qual ultrapassa em muito o que se pode conseguir pela simples assimilação do conhecimento já existente. Qualquer projeto que se destine a contribuir para a melhoria do ensino deve, por princípio, ser capaz de propiciar ao aluno esta descoberta.

Para entendermos como os grandes pensadores da humanidade desenvolveram sua obra e assim aprendermos com sua genialidade criativa, não basta nos debruçarmos sobre suas biografias, muitas vezes incompletas, inexatas ou falseadas por mitos. É preciso nos dirigirmos diretamente às fontes onde estão impressos os registros do caminho que eles percorreram na busca do conhecimento. Estes registros são as obras originais que eles nos deixaram como um legado. Infelizmente, a língua em que estas obras foram escritas originalmente constitui-se em uma barreira intransponível para a maioria das pessoas, o que faz com que muitas vezes tenhamos de nos contentar com versões parciais e nem sempre confiáveis destes trabalhos, nas quais o toque pessoal do autor acaba se perdendo.

Desta forma, faz-se necessário e oportuno o empenho pela tradução fidedigna de obras clássicas, a qual seja fiel ao autor e que possa nos colocar em contato com seu pensamento criativo.

2. RESUMO DO PLANO INICIAL

O objetivo inicial deste projeto foi a tradução da obra clássica de Arquimedes, “Sobre o equilíbrio dos Planos,” segunda parte, tornando-a disponível a todos que se interessem por ela. Foi proposto que a tradução se desse a partir de texto existente em inglês[1], o qual é uma tradução do original em grego. Este trabalho deu

[1] Hutchins, R. M. (ed.), “The Works of Archimedes,” in: Great Books of the Western World, Chicago, Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952, Vol. 11, tradução para o inglês de T. L. Heath.

continuidade a um trabalho desenvolvido pelo Prof. Assis[2], o qual realizou a tradução comentada da primeira parte desta mesma obra. Não se cogitou da tradução ser feita diretamente a partir do grego, devido à maior dificuldade em se obter esta versão do texto, bem como o desejo de que a tradução fosse realizada pelo próprio aluno, o qual não tem conhecimento de grego, mas que a partir deste trabalho realizado sob a orientação do Prof. Assis, pode dar início a uma colaboração com este docente na tradução de outras obras de interesse.

Propôs-se também acrescentar ao texto traduzido uma pequena biografia de Arquimedes e apresentar na exposição do final do curso alguns conceitos simples desenvolvidos por ele em suas obras, através de experimentos relacionados à determinação do centro de gravidade de seções parabólicas e de forma qualquer.

3. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

Seguindo o planejamento inicial, desenvolveu-se a tradução do texto de Arquimedes "Sobre o equilíbrio dos planos". Embora o texto em inglês apresentasse algumas expressões pouco usais, mesmo para um livro técnico, sua tradução e revisão pôde ser feita dentro do período previsto inicialmente. Uma cópia dele encontra-se anexada ao fim deste relatório. Durante a realização deste projeto, cogitou-se a possibilidade de se realizar a tradução de uma segunda obra de Arquimedes, denominada "Sobre os Corpos Flutuantes – Segunda Parte", cuja primeira parte já foi traduzida e publicada pelo Prof. Assis. Embora esta tradução tenha sido iniciada, a limitação do tempo disponível levou ao adiamento desta para uma futura oportunidade.

Uma biografia sucinta de Arquimedes, baseada em *sites* da internet nacionais e internacionais, foi preparada e anexada à tradução. Como se pretendia que esta biografia não fosse extensa, optou-se por buscar na internet material que tratasse o assunto de uma forma simples e com uma apresentação gráfica atraente, a qual pudesse ser aproveitada neste trabalho. Como alguns dos *sites* utilizados estão em inglês, um trabalho de tradução que não aparece explicitamente no resultado final do projeto, também foi necessário. Os *sites* utilizados estão listados em anexo e, como

[2] Assis, A. K. T., "Sobre o equilíbrio dos planos, tradução comentada de um texto de Arquimedes," Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, Vol. 18, pp. 81-94 (1997). Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~assis/Revista-SBHC-V18-p81-94(1997).pdf

o conteúdo deles é extenso, além de os dados biográficos terem sido condensados na biografia em anexo, optou-se por não reproduzi-los aqui. Alguns dos sites listados apresentam também em detalhes as idéias e problemas estudados por Arquimedes, os que, por si só, já justifica uma consulta ao *site* original.

Complementando o trabalho de tradução realizado, foram montados alguns experimentos simples, para demonstrar alguns dos princípios enunciados por Arquimedes. Estes experimentos apresentam as técnicas desenvolvidas por Arquimedes na determinação do centro de gravidade de figuras planas e, mais especificamente, de segmentos parabólicos. Para tanto, adotou-se os seguintes procedimentos:

a) Determinação do centro de gravidade (CG) de uma seção qualquer.

- Material empregado: placa de isopor, fios e clips
- Cortada da placa de isopor uma seção qualquer, suspende-se esta seção por pontos escolhidos em seu contorno. A cada vez que a seção é suspensa, traça-se em sua superfície uma linha vertical, passando pelo ponto de suspensão. O ponto de cruzamento das linhas será o CG da seção.

b) Demonstração da Proposição 8 do trabalho de Arquimedes “Sobre o equilíbrio dos Planos”, determinando-se o CG de um seguimento parabólico e as proporções a que ele obedece.

- Material empregado: placa de isopor, fios e clips
- Cortado da placa de isopor um segmento parabólico, determina-se seu centro de gravidade utilizando-se o procedimento anterior. Traça-se o raio do segmento parabólico e demonstra-se que o CG o divide na proporção 2/3.

4. CONCLUSÃO

O projeto foi desenvolvido de acordo com o proposta inicial e atingiu os objetivos propostos, tornando disponível em português uma obra clássica de Arquimedes, anteriormente só encontrada em inglês. Este trabalho, acrescentado de comentários, tem possibilidade de vir a ser publicado em alguma revista da área, abrindo perspectivas para o início de um trabalho mais amplo de tradução das principais obras de autores clássicos, tornando-as acessíveis para o uso no ensino e dando possibilidade de familiarizar os estudantes com estes autores e com seus métodos criativos.

ANEXO A

Sites sobre Arquimedes

http://geocities.yahoo.com.br/saladefisica9/biografias/arquimedes.htm

http://matematizando.no.sapo.pt/Biografias/Arquimedes2.htm

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html

http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Archimedes.html

http://scienceworld.wolfram.com/biography/Archimedes.html

http://tqjunior.thinkquest.org/4116/History/archimedes.htm?tqskip=1

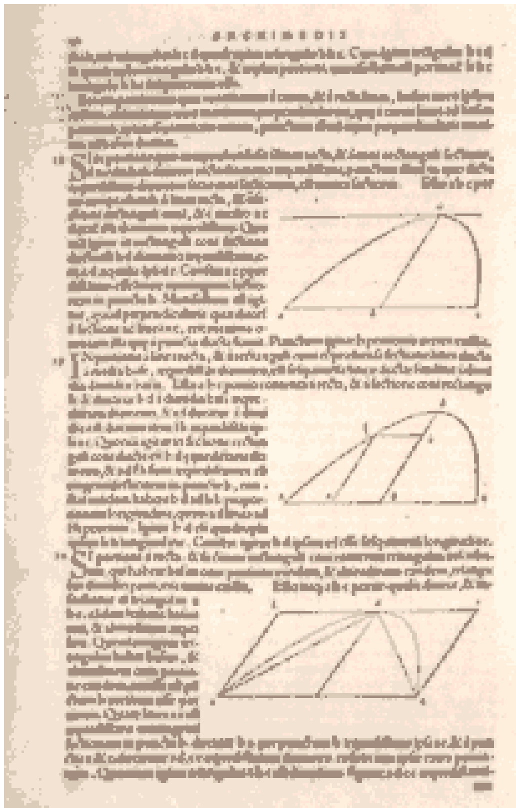
ANEXO B

Biografia de Arquimedes

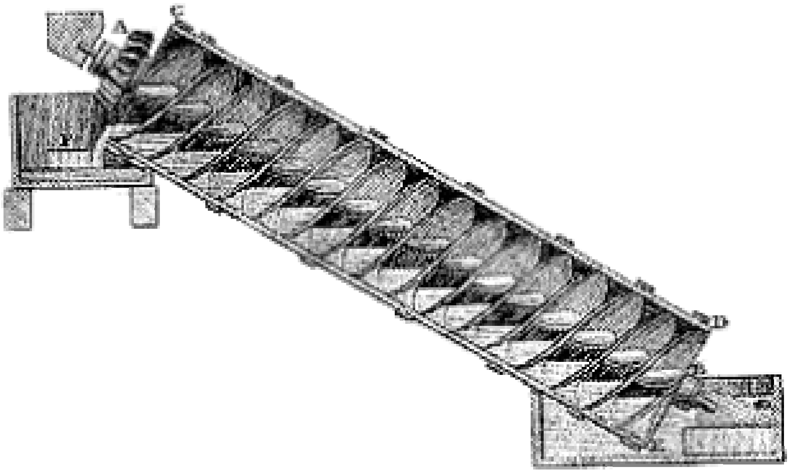
Arquimedes

Filho do astrônomo Fídias, Arquimedes nasceu em 287 a.C., em Siracusa, na Sicília, que então fazia parte da Grécia ocidental ou Magna Grécia. Embora os dados fantasiosos permeiem todos os informes sobre sua vida, parece certo que estudou em Alexandria (Egito), um dos grandes centros culturais da época. Ali teria conhecido Euclides, já velho, e seus discípulos imediatos; e o matemático Canon de Samos, de quem se tornou amigo.

Na sua biografia é difícil destrinçar a realidade da lenda.Escreveu importantes obras sobre geometria plana e espacial, aritmética e mecânica. Antecipou-se a muitas das descobertas da ciência moderna no campo da matemática pura, como o cálculo integral, com seus estudos sobre áreas e volumes de figuras sólidas curvas e sobre as áreas de figuras planas, desenvolvendo também os teoremas fundamentais relativos ao centro de gravidade das figuras planas e dos sólidos.. Demonstrou também que o volume de uma esfera equivale a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve.



Reduzindo o equilíbrio de forças a um simples problema geométrico, estudou o equilíbrio dos sólidos, o funcionamento da alavanca e o movimento dos corpos celestes, além de ter organizado uma coleção - a mais completa da Antiguidade - de figuras planas com os centros de gravidade perfeitamente localizados. Além disso, também procurava utilidades práticas para suas descobertas. Extraordinário engenheiro, construiu, segundo depoimento de Cícero (106 - 43 a.C.), um planetário que reproduzia os diferentes movimentos dos corpos celestes; e um aparelho para medir as variações do diâmetro aparente do Sol e da Lua, um protótipo do modelo, mais requintado, que será construído pelo astrônomo Hiparco, no século II a.C.



Porém, ele é mais conhecido principalmente por ter enunciado a lei da hidrostática, o chamado princípio de Arquimedes. Essa lei estabelece que todo corpo submerso em um fluido experimenta perda de peso igual ao peso do volume do fluido que o corpo desloca.

Diz-se que essa descoberta foi feita enquanto o matemático se banhava e meditava sobre um problema que lhe fora apresentado pelo rei: como distinguir uma coroa de ouro puro de outra que contivesse prata. Observando o deslocamento e transbordamento da água à medida que seu corpo submergia, concluiu que se a coroa, ao submergir, deslocasse quantidade de água equivalente a seu peso em ouro, isto significaria que não continha outro metal. Conta-se que ficou tão entusiasmado que saiu nu para a rua gritando heureka, palavra grega que significa "achei".

Arquimedes passou a maior parte de sua vida na Sicília, em Siracusa e arredores, dedicado à pesquisa e aos experimentos. Embora não tivesse nenhum cargo público, durante a conquista da Sicília pelos romanos pôs-se à disposição das autoridades e muitos de seus instrumentos mecânicos foram utilizados na defesa de Siracusa. Entre os aparatos de guerra cuja invenção lhe é atribuída está a catapulta e a idealização dos célebres "espelhos ustórios" (ustório = que queima, que facilita a combustão), espelhos curvos com os quais os defensores de Siracusa teriam queimado à distância - pela concentração dos raios solares - os navios romanos que sitiavam a região.

Após um longo assédio, as tropas de Marcelo entram na cidade em 212 a.C.. Segundo Plutarco, apesar das ordens de Marcelo para respeitar a vida do sábio, um soldado romano, irritado porque Arquimedes, absorto na resolução de um problema, não responde às suas intimações, matou-o. Cícero, questor da Sicília, encontrou o seu túmulo, onde figura uma esfera inscrita num cilindro.

São muitas as obras de Arquimedes que chegaram até nossos dias. Na sua produção revela-se exclusivamente o investigador. Seus escritos são verdadeiras memórias científicas, trabalhos originais, nos quais se dá por conhecido todo o produzido antes

sobre o tema e apresentam-se elementos novos, próprios. Suas principais obras foram sobre:

1. Os conóides e os esferóides. - Refere-se aos sólidos que hoje designamos elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução.
2. As espirais. - É um estudo monográfico de uma curva plana, hoje chamada espiral de Arquimedes, que se obtém por uma simples combinação de movimentos de rotação e translação. Entre os resultados, encontra-se um processo para retificar a circunferência.
3. A medida do círculo. - Contém apenas 3 proposições e é um dos trabalhos que melhor revela a mente matemática de Aristóteles. Em uma ostentação técnica combinam-se admiravelmente a matemática exata e a aproximada, a aritmética e a geometria, para impulsionar e encaminhar em nova direção o clássico problema da quadratura do círculo.
4. Quadratura da Parábola. - Este escrito oferece o primeiro exemplo de quadratura, isto é, de determinação de um polígono equivalente, de uma figura plana mistilínea: o segmento da parábola.
5. O Arenário. - Arquimedes realiza um estudo, no qual intercala um sistema de numeração próprio, que lhe permite calcular e, sobretudo exprimir quantidades enormes, e uma série de considerações astronômicas de grande importância histórica, pois nelas se alude ao sistema heliocêntrico da antiguidade, devido a Aristarco de Samos.
6. O equilíbrio dos planos. - É o primeiro tratado científico de estática. A alavanca, os centros de gravidade de alguns polígonos, entre outros resultados.
7. Dos corpos flutuantes. (Livro I e II). - As bases científicas da hidrostática.
8. Do método relativo aos teoremas mecânicos. - Arquimedes aproxima-se extraordinariamente de nosso conceitos atuais de cálculo integral.
9. O Stomachion. - É um jogo geométrico, espécie de puzzle, formado por uma série de peças poligonais que completam um retângulo.
10. O problema dos bois. - Um problema referente a teoria dos números

ANEXO C

Sobre o Equilíbrio dos Planos

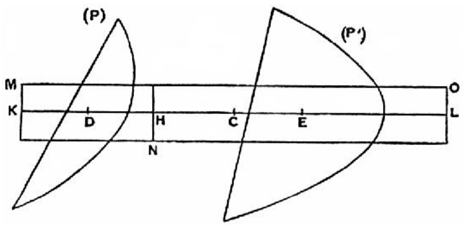
SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS – LIVRO II

Proposição 1

Se P e *P' são dois segmentos parabólicos, sendo D e E seus centros de gravidade, respectivamente, então o centro de gravidade dos dois segmentos considerados conjuntamente estará em um ponto C sobre DE determinado pela relação*

$$P : P' = CE : CD.$$

Na mesma linha reta com *DE*, meça *EH* e *EL*, cada um igual a *DC*, e [meça também] *DK* igual a *DH*; dai é imediato que *DK* = *CE* e também que *KC* = *CL*.



Aplique um retângulo *MN* com área igual ao do segmento parabólico *P* em uma base igual a *KH* e coloque o retângulo de modo que *KH* o divida ao meio e seja paralelo a sua base.

Então, *D* é o centro de gravidade de *MN*, já que *KD* = *DH*.

Prolongue os lados do retângulo que são paralelos a *KH* e complete o retângulo *NO* cuja base é igual a *HL*. Então *E* é o centro de gravidade do retângulo *NO*.

Agora,

$$(MN) : (NO) = KH : HL$$
$$= DH : EH$$
$$= CE : CD$$
$$= P : P'.$$

Mas,

$$(MN) = P.$$

Portanto,

$$(NO) = P'.$$

Também, já que *C* é o ponto médio de *KL*, *C* é o centro de gravidade do paralelogramo completo, constituído pelos dois paralelogramos *(MN)* e *(NO)*, os quais são iguais [em área] a *P* e *P´* e têm os mesmos centros de gravidade que *P* e *P'*, respectivamente.

Desta forma, *C* é o centro de gravidade de *P* e *P'* tomados conjuntamente.

DEFINIÇÃO E LEMAS PRELIMINARES À PROPOSIÇÃO 2

“Se em um segmento limitado por uma linha reta e uma seção de um cone reto [uma parábola] for inscrito um triângulo tendo a mesma base que o segmento e altura igual, se novamente triângulos forem inscritos nos segmentos remanescentes tendo as mesmas bases que os segmentos e altura igual, e, se nos segmentos restantes, triângulos forem inscritos do mesmo modo, será dito que a figura resultante está *inscrita da forma reconhecida* no segmento.

“E é evidente”

(1) “ que *as linhas unindo os dois ângulos da figura inscrita desta forma que estão mais próximos do vértice do segmento, e [unindo] os próximos pares de ângulos em seqüência, serão paralelas à base do segmento*,”

(2) “que *as referidas linhas serão divididas ao meio pelo diâmetro do segmento*, e”

(3) “que *elas cortarão o diâmetro nas proporções dos números ímpares sucessivos, o número um referindo-se ao* [*comprimento adjacente ao*] *vértice do segmento.*

“E estas propriedades terão de ser provadas em seus lugares respectivos.”

Proposição 2

Se uma figura é “inscrita da forma reconhecida” em um segmento parabólico, o centro de gravidade da figura inscrita dessa forma estará localizado sobre o diâmetro do segmento.

Pois, na figura dos lemas precedentes, o centro de gravidade do trapézio *BRrb* tem de estar sobre *XO*, o [centro de gravidade] do trapézio *RQqr* [tem de estar] sobre *WX*, e assim sucessivamente, enquanto o centro de gravidade do triângulo *PAp* estará sobre *AV*.

Portanto, o centro de gravidade da figura completa estará sobre *AO*.

Proposição 3

Se BAB´ e *bab´ forem dois segmentos parabólicos similares cujos diâmetros são AO* e *ao, respectivamente, e se a figura for inscrita em cada segmento “da forma reconhecida,”* *sendo igual o número de lados em cada figura, os centros de gravidade das figuras inscritas dividirão AO* e *ao na mesma razão.*[1]

Suponha que *BRQPAP´Q´R´B´* e *brqpap´q´r´b´* são as duas figuras inscritas "da forma reconhecida." Ligue *PP´*, *QQ´* e *RR´* encontrando *AO* em *L*, *M* e *N*, e [ligue] *pp´*, *qq´* e *rr´* encontrando *ao* em *l*, *m* e *n*.

Então [Lema (3)]

$$AL : LM : MN : NO = 1 : 3 : 5 : 7$$
$$= al : lm : mn : no,$$

de tal forma que *AO* e *ao* estão divididos na mesma proporção.

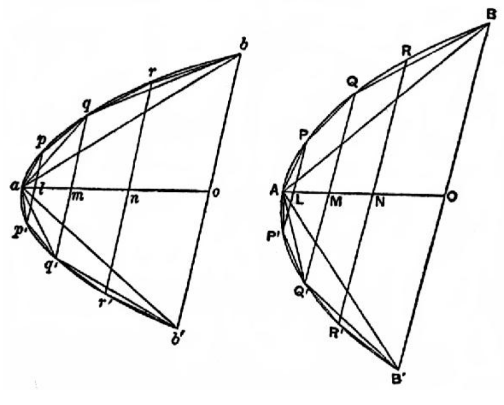
Também, revertendo-se a prova do Lema (3), vemos que

$$PP´ : pp´ = QQ´ : qq´ = RR´ : rr´ = BB´ : bb´.$$

Como então $RR´ : BB´ = rr´ : bb´$, e estas razões determinam, respectivamente, a proporção em que *NO* e *no* são divididas pelos centros de gravidade dos trapézios *BRR´B´* e *brr´b´* [I.15][2], segue que os centros de gravidade dos trapézios dividem *NO* e *no* na mesma razão.

Similarmente, os centros de gravidade dos trapézios *RQQ´R´* e *rqq´r´* dividem *MN* e *mn* na mesma razão, respectivamente, e assim sucessivamente.

Por último, os centros de gravidade dos triângulos *PAP´* e *pap´* dividem *AL* e *al*, respectivamente, na mesma razão.



Além disso, os trapézios e triângulos correspondentes estão, cada [tipo] para cada [tipo equivalente], na mesma proporção (já que seus lados e suas alturas são, respectivamente, proporcionais), enquanto que *AO* e *ao* são divididos na mesma proporção.

---

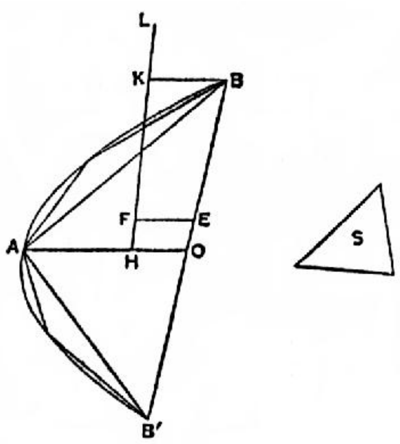
[1] [N. H.] Arquimedes enuncia esta proposição como verdadeira para segmentos *similares*, mas ela é igualmente verdadeira para segmentos que não são similares, como o desenvolvimento da prova irá mostrar.

[2] [N. T.] Isto é, ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 15.

Portanto, os centros de gravidade das figuras inscritas completas dividem *AO* e *ao* na mesma proporção.

Proposição 4

O centro de gravidade de qualquer segmento parabólico cortado por uma reta localiza-se sobre o diâmetro do segmento.



Seja *BAB´* um segmento parabólico, *A* seu vértice e *AO* seu diâmetro.

Então, se o centro de gravidade do segmento não está localizado sobre *AO*, suponha que ele seja, se possível, o ponto *F*. Trace *FE* paralelo a *AO* encontrando *BB´* em *E*.

Inscreva no segmento o triângulo *ABB´* tendo o mesmo vértice e altura que o segmento, e tome uma área *S* tal que

$$\Delta ABB' : S = BE : EO.$$

Podemos então inscrever no segmento "da forma reconhecida" uma figura tal que os segmentos da parábola remanescente são conjuntamente menores do que *S*.[3]

Seja a figura inscrita na forma apropriada; então seu centro de gravidade situa-se sobre *AO* [Prop. 2]. Seja ele o ponto *H*.

Ligue *HF* e faça seu prolongamento encontrar em *K* a linha que passa através de *B* e é paralela a *AO*.

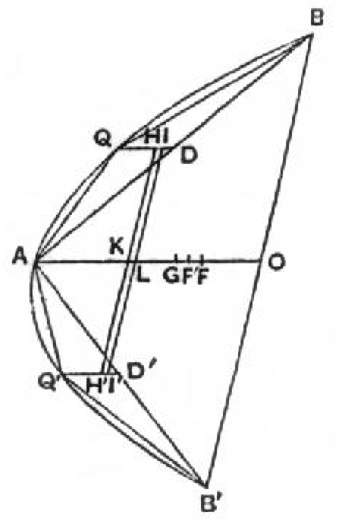
Então temos

$$\text{(figura inscrita)} : \text{(restante do segmento)} > \Delta ABB' : S$$
$$> BE : EO$$
$$> KF : FH.$$

Suponha *L* tomado sobre *HK* gerado de forma que a razão anterior é igual à razão *LF* : *FH*.

[3] Pois a Prop. 20 da *Quadratura da Parábola* prova que, se em qualquer segmento [de parábola] for inscrito o triângulo com a mesma base e altura, o triangulo é maior que metade do segmento; de onde fica evidente que, cada vez que aumentamos o número de lados da figura inscrita "da forma reconhecida", eliminamos mais que a metade dos segmentos restantes.

Então, uma vez que *H* é o centro de gravidade da figura inscrita e *F* é o [centro de gravidade] do segmento, *L* tem de ser o centro de gravidade de todos os segmentos considerados conjuntamente, os quais formam o restante do segmento original. [I.8][4]



Mas isto é impossível, uma vez que todos os segmentos situam-se sobre um lado da linha traçada através de *L* e paralela a *AO* (conferir *Post. 7*).

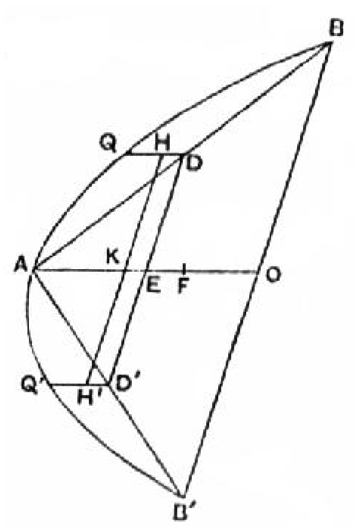
Portanto, o centro de gravidade do segmento não pode se situar em outro lugar que não seja sobre *AO*.

Proposição 5

Se sobre um segmento parabólico uma figura for inscrita "da forma reconhecida," o centro de gravidade do segmento estará mais próximo do vértice do segmento do que está o centro de gravidade da figura inscrita.

Seja *BAB´* o segmento dado e *AO* seu diâmetro. *Em primeiro lugar*, seja *ABB´* o *triângulo* inscrito "da forma reconhecida."

Divida *AO* em *F* de modo que *AF = 2FO*; *F* é então o centro de gravidade do triangulo *ABB´*.



Divida ao meio *AB* e *AB´* em *D* e *D´*, respectivamente, e ligue *DD´* de forma a encontrar *AO* em *E*. Trace *DQ* e *D´Q´* paralelamente a *OA*, de forma a encontrar a curva. Então *QD* e *Q´D´* serão os diâmetros dos segmentos cujas bases são *AB* e *AB´*, e os centros de gravidade desses segmentos se situarão, respectivamente, sobre *QD* e *Q´D´* [Prop. 4]. Sejam eles então *H* e *H´*, e ligue *HH´* de forma a encontrar *AO* em *K*.

Agora, *QD* e *Q´D´* são iguais[5] e, portanto, são iguais os segmentos dos quais eles são os diâmetros [*Sobre Conóides e Esferóides*, Prop. 3].

---

[4] [N. T.] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 8.

[5] Isto pode tanto ser deduzido a partir do Lema (1) acima (uma vez que *QQ´* e *DD´* são ambos paralelos a *BB´*) ou a partir da Prop. 19 da *Quadratura da Parábola*, a qual se aplica igualmente a *Q* ou *Q´*.

Também, uma vez que *QD* e *Q´D´* são paralelos e *DE* = *ED´*, *K* é o ponto médio de *HH´*.

Portanto, o centro de gravidade dos segmentos iguais *AQB* e *AQ´B´* considerados conjuntamente, é *K*, onde *K* situa-se entre *E* e *A*. E o centro de gravidade do triângulo *ABB´* é *F*.

Segue-se que o centro de gravidade de todo o segmento *BAB´* situa-se entre *K* e *F* e, portanto, está mais próximo do vértice *A* do que *F* está.

Em segundo lugar, considere a figura de cinco lados *BQAQ´B´* inscrita "da forma reconhecida," sendo *QD* e *Q´D´*, como anteriormente, os diâmetros dos segmentos *AQB* e *AQ´B´*.

Então, de acordo com a primeira parte desta proposição, o centro de gravidade do segmento *AQB* (situando-se é claro sobre *QD*) está mais próximo de *Q* do que está o centro de gravidade do triângulo *AQB*. Seja *H* o centro de gravidade do segmento e [seja] *I* [o centro de gravidade] do triângulo.

Similarmente, seja *H´* o centro de gravidade do seguimento *AQ´B´* e [seja] *I´* o [centro de gravidade] do triângulo *AQ´B´*.

Segue-se que o centro de gravidade dos dois segmentos *AQB* e *AQ´B´* considerados conjuntamente é *K*, o ponto médio de *HH´* e o [centro de gravidade] dos dois triângulos *AQB* e *AQ´B´* é *L*, o ponto médio de *II´* .

Se agora o centro de gravidade do triângulo *ABB´* for *F*, o centro de gravidade de todo o seguimento *BAB´* (isto é, [o centro de gravidade] do triângulo *ABB´* e dos dois segmentos *AQB* e *AQ´B´* considerados conjuntamente) será o ponto *G* sobre *KF* determinado pela proporção (soma de segmentos *AQB* e *AQ´B´*) : $\Delta ABB' = FG : GK$. [I. 6, 7][6]

E o centro de gravidade da figura inscrita *BQAQ´B´* é um ponto *F´* sobre *LF* determinado pela proporção.

$$(\Delta AQB + \Delta AQ'B') : \Delta ABB' = FF' : F'L. \quad \text{[I. 6, 7]}$$

[Portanto,

$$FG : GK > FF' : F'L,$$

ou

$$GK : FG < F'L : FF',$$

[6] [N. T.] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 6 e 7.

e, *componendo*[7],

$$FK : FG < FL : FF',$$

enquanto

$$FK > FL.]$$

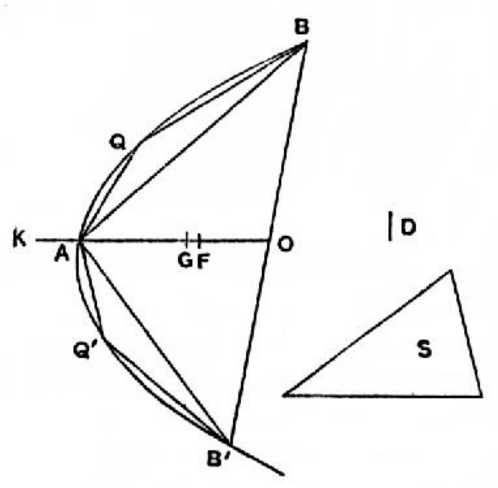
Portanto, $FG > FF'$, ou G situa-se mais próximo do que F' do vértice A.

Usando este último resultado e prosseguindo da mesma maneira, podemos provar a proposição para *qualquer* figura inscrita "da forma reconhecida."

Proposição 6

Dado um seguimento de uma parábola cortada por uma linha reta, é possível inscrever nela "da forma reconhecida" uma figura tal que a distância entre os centros de gravidade do segmento e da figura inscrita seja menor que qualquer comprimento dado.

Seja BAB' o segmento, AO seu diâmetro, G seu centro de gravidade, e ABB' o triângulo inscrito "da forma reconhecida".



Seja D o comprimento dado e S uma área tal que

$$AG : D = \Delta ABB' : S.$$

No segmento inscreva "da forma reconhecida" uma figura tal que a soma dos segmentos restantes seja menor do que S. Seja F o centro de gravidade da figura inscrita.

Provaremos que $FG < D$.

Pois, caso não seja [menor], FG tem ser igual ou maior do que D.

E, claramente,

$$\text{(figura inscrita)} : \text{(soma dos segmentos restantes)} > \Delta ABB' : S$$

$$> AG : D$$

$$> AG : FG, \text{ por hipótese (uma vez } FG \nless D\text{)}.$$

7 [N. T.] O que está entre colchetes aqui foi introduzido por T. L. Heath. *Componendo* vem do latim e pode ser interpretado aqui como "compondo." Isto é, como $GK : FG < F'L : FF'$, então $1 + (GK : FG) < 1 + (F'L : FF')$, ou $(FG + GK) : FG < (FF' + F'L) : FF'$, ou seja, $FK : FG < FL : FF'$, que é o que Heath quer mostrar.

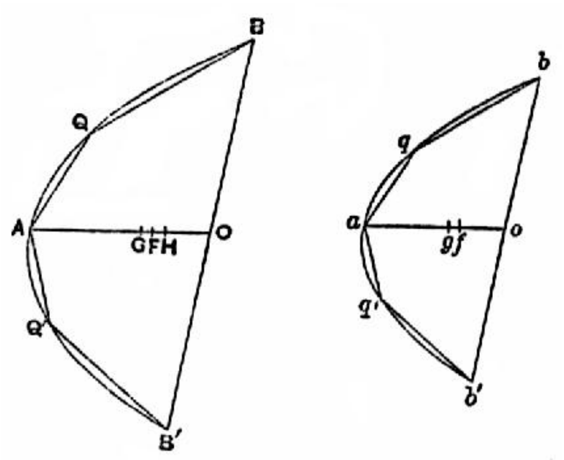
Seja a primeira razão igual à razão $KG : FG$ (onde K situa-se sobre o segmento GA prolongado); segue-se que K é o centro de gravidade dos segmentos pequenos considerados conjuntamente. [I.8]

Mas isto é impossível, uma vez que os segmentos estão todos sobre o mesmo lado de uma linha traçada por K e paralela a BB'.

Desta forma, FG só pode ser menor do que D.

Proposição 7

Se dois segmentos parabólicos forem similares, seus centros de gravidade dividem seus diâmetros na mesma razão.



Sejam BAB' e bab' os dois segmentos similares, AO e ao seus diâmetros, e G e g seus centros de gravidade, respectivamente.

Então, se G e g não dividem AO e ao, respectivamente, na mesma razão, suponha que H seja um ponto sobre AO tal que

$$AH : HO = ag : go;$$

e inscreva no segmento BAB' "da forma reconhecida" uma figura tal que, se F for seu centro de gravidade,

$$GF < GH. \text{ [Prop. 6]}$$

Inscreva no segmento bab' "da forma reconhecida" uma figura similar; então, se f for o centro de gravidade desta figura,

$$ag < af. \text{ [Prop. 5]}$$

E, pela Prop. 3,

$$af : fo = AF : FO.$$

Mas

$$AF : FO < AH : HO$$

$$< ag : go, \text{ por hipótese.}$$

Portanto,

$$af : fo < ag : go; \text{ o que é impossível.}$$

Segue que G e g só podem dividir AO e ao na mesma razão.

Proposição 8

Se AO for o diâmetro de um segmento parabólico e G o seu centro de gravidade, então

$$AG = \frac{3}{2} GO.$$

Seja o segmento BAB'. Inscreva o triângulo ABB' "da forma reconhecida" e seja F seu centro de gravidade.

Divida ao meio AB e AB' em D e D' e trace DQ e $D'Q'$ paralelos a OA, até encontrar a curva, de forma que QD e $Q'D'$ são os diâmetros dos segmentos AQB e $AQ'B'$, respectivamente.

Sejam H e H' os centros de gravidade dos segmentos AQB e $AQ'B'$, respectivamente. Ligue QQ' e HH' encontrando AO em V e K, respectivamente.

Então K é o centro de gravidade dos dois segmentos AQB e $AQ'B'$ considerados conjuntamente.

Agora

$$AG : GO = QH : HD, \text{ [Prop. 7]}$$

portanto,

$$AO : OG = QD : HD.$$

Mas $AO = 4QD$ [como é facilmente provado por meio do Lema (3)].

Portanto,

$$OG = 4HD;$$

e, por subtração,

$$AG = 4QH.$$

Também, pelo Lema (2), QQ' é paralelo a BB' e, portanto, a DD'. Segue da Prop. 7 que HH' também é paralelo a QQ' ou a DD' e, conseqüentemente,

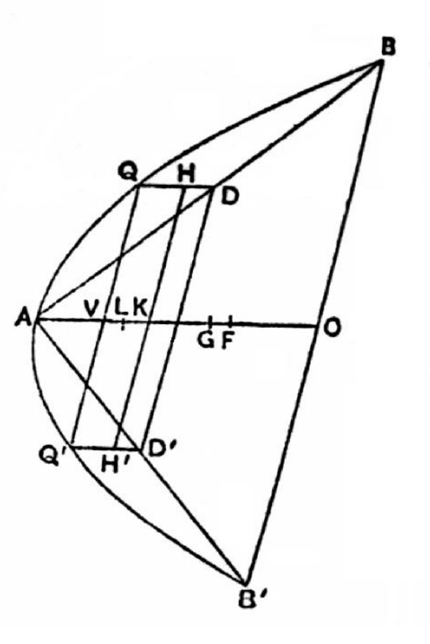
$$QH = VK.$$

Portanto,

$$AG = 4VK,$$

e

$$AV + KG = 3VK.$$



Medindo-se VL ao longo de VK de forma que $VL = \frac{1}{3}AV$, temos

$$KG = 3LK. \ (1)$$

Novamente,

$$AO = 4AV \text{ [Lema (3)]}$$
$$= 3AL, \text{ uma vez que } AV = 3VL,$$

portanto,

$$AL = \frac{1}{3}AO = OF.$$

Agora, por I. 6, 7,[8]

$$\Delta ABB' : (\text{soma dos segmentos } AQB \text{ e } AQ'B') = KG : GF,$$

e

$$\Delta ABB' = 3(\text{soma dos seguimentos } AQB \text{ e } AQ'B')$$

[uma vez que o segmento ABB' é igual a $\frac{4}{3}\Delta ABB'$ (*Quadratura da Parábola*, Props. 17 e 24)].

Portanto,

$$KG = 3GF.$$

Mas

$$KG = 3LK, \text{ de (1) acima.}$$

Portanto,

$$LF = LK + KG + GF$$
$$= 5GF.$$

E, de (2),

$$LF = (AO - AL - OF) = \frac{1}{3}AO = OF.$$

Portanto,

$$OF = 5GF,$$

e

$$OG = 6GF.$$

Mas

$$AO = 3OF = 15GF.$$

8 [N. T.] Ou seja, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 6 e 7.

Portanto, por subtração,

$$AG = 9GF$$
$$= \frac{3}{2}GO.$$

Proposição 9 (Lema)

Se a, b, c, d forem quatro linhas em proporção contínua[9] *e em ordem decrescente de magnitude, e se*

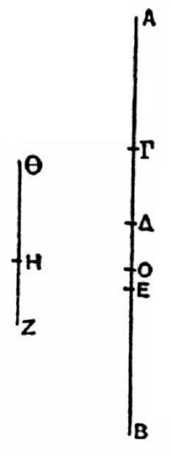
$$d : (a - d) = x : \frac{3}{5}(a - c),$$

e

$$(2a + 4b + 6c + 3d) : (5a + 10b + 10c + 5d) = y : (a - c),$$

é requerido provar-se que

$$x + y = \frac{2}{5}a.$$



[O que segue é a prova dada por Arquimedes, com a única diferença que é apresentada em uma notação algébrica ao invés de geométrica. Isto é feito no caso particular simplesmente para tornar a prova mais fácil de ser seguida. Arquimedes exibe suas linhas na figura reproduzida ao lado, mas, agora que é possível usar notação algébrica, não há vantagem em usar a figura e a notação mais inconveniente que apenas obscurece o curso da prova. A relação entre a figura de Arquimedes e as letras usadas a seguir, é:

AB = a, ΓB = b, ΔB = c, EB = d, ZH = x, H? = y, ΔO = z.]

Temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

de onde,

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} = \frac{c-d}{d},$$

e, portanto,

9 [N. T.] Isto é, $a : b = b : c = c : d$.

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b-c}{c-d}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d} \qquad (2)$$

Agora,

$$\frac{2(a+b)}{2c}=\frac{a+b}{c}=\frac{a+b}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-d}=\frac{a-c}{c-d}$$

E, de forma semelhante,

$$\frac{b+c}{d}=\frac{b+c}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a-c}{c-d}$$

Das duas últimas relações, vem que

$$\frac{a-c}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2c+d} \qquad (3)$$

Suponha z ser considerado tal que

$$\frac{2a+4b+4c+2d}{2c+d}=\frac{a-c}{z} \qquad (4)$$

de tal forma que $z < (c - d)$.

Portanto,

$$\frac{a-c+z}{a-c}=\frac{2a+4b+6c+3d}{2(a+d)+4(b+c)}.$$

E, por hipótese,

$$\frac{a-c}{y}=\frac{5(a+d)+10(b+c)}{2a+4b+6c+3d)},$$

tal que

$$\frac{a-c+z}{y}=\frac{5(a+d)+10(b+c)}{2(a+d)+4(b+c)}=\frac{5}{2} \qquad (5)$$

Novamente, fazendo a divisão cruzada de (3) por (4), obtemos

$$\frac{z}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2(a+d)+4(b+c)},$$

de onde se obtém

$$\frac{c-d-z}{c-d}=\frac{b+3c+2d}{2(a+d)+4(b+c)} \qquad (6)$$

Mas, de (2),

$$\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}=\frac{3(b-c)}{3c}=\frac{2(c-d)}{2d},$$

de tal forma que

$$\frac{c-d}{d}=\frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{b+3c+2d} \qquad (7)$$

Combinando (6) e (7), temos

$$\frac{c-d-z}{d}=\frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{2(a+d)+4(b+c)},$$

tal que

$$\frac{c-z}{d}=\frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)} \qquad (8)$$

E, uma vez que [de (1)]

$$\frac{c-d}{c+d}=\frac{b-c}{b+c}=\frac{a-b}{a+b},$$

temos

$$\frac{c-d}{a-c}=\frac{c+d}{b+c+a+b},$$

portanto,

$$\frac{a-d}{a-c}=\frac{a+2b+2c+d}{a+2b+c}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{2(a+c)+4b} \qquad (9)$$

Então

$$\frac{a-d}{\frac{3}{5}(a-c)}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}},$$

e, portanto, por hipótese,

$$\frac{d}{x}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}.$$

Mas, por (8)

$$\frac{c-z}{d}=\frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)};$$

e segue, *ex aequali*[10], que

$$\frac{c-z}{x}=\frac{3(a+c)+6b}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

E, por (5),

---

[10] [N. T.] Ou seja, multiplicando entre si os lados esquerdos destas duas últimas igualdades, assim como multiplicando simultaneamente os lados direitos.

$$\frac{a-c+z}{y}=\frac{5}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{5}{2}=\frac{a}{x+y},$$

Ou

$$x+y=\frac{2}{5}a.$$

Proposição 10

Se PP´B´B for a porção de uma parábola interceptada entre duas cordas paralelas PP´ e *BB´, divididas ao meio, respectivamente, em N* e *O pelo diâmetro ANO (N estando mais próximo que O do vértice A do segmento) e se NO for dividido em cinco partes iguais, das quais LM é a do meio (L estando mais próximo de N do que está M), então, se G for um ponto sobre LM tal que*

$$LG : GM = BO^2 \cdot (2PN + BO) : PN^2 \cdot (2BO + PN),$$

G será o centro de gravidade da área PP´B´B.

Considere uma linha *ao* igual a *AO*, com *an* sobre ela, igual a *AN*. Sejam *p* e *q* pontos sobre a linha *ao* tal que

$$ao : aq = aq : an, \qquad (1)$$

$$ao : an = aq : ap, \qquad (2)$$

[daí vem que $ao : aq = aq : an = an : ap$, ou *ao, aq, an, ap* são linhas em proporção contínua e em ordem decrescente de magnitude].

Meça ao longo de *GA* um comprimento *GF* tal que

$$op : ap = OL : GF. \qquad (3)$$

Então, uma vez que *PN* e *BO* são ordenadas em relação a *ANO*,

$$BO^2 : PN^2 = AO : AN$$

$$= ao : an$$

$$= ao^2 : aq^2, \text{ por (1)},$$

de modo que

$$BO : PN = ao : aq, \qquad (4)$$

E

$$BO^3 : PN^3 = ao^3 : aq^3$$

$$= (ao : aq) \times (aq : an) \times (an : ap)$$

$$= ao : ap. \qquad (5)$$

Assim,

$$(\text{segmento } BAB') : (\text{segmento } PAP') = \Delta BAB' : \Delta PAP'$$

$$= BO^3 : PN^3$$

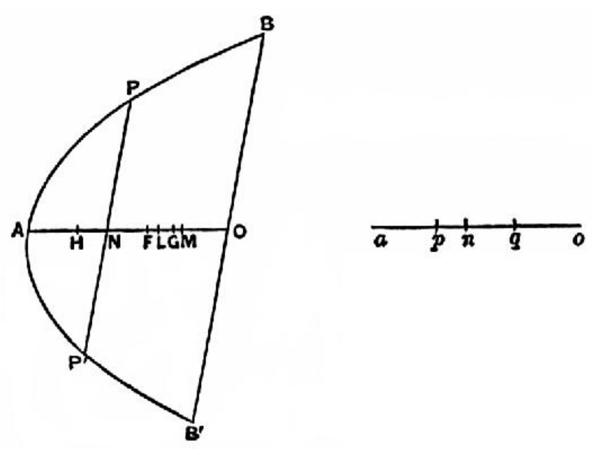
$$= ao : ap,$$

de modo que

$$(\text{área } PP'B'B) : (\text{segmento } PAP') = op : ap$$

$$= OL : GF, \text{ por (3)},$$

$$= \frac{3}{5} ON : GF. \qquad (6)$$



Agora

$$BO^2 \times (2PN + BO) : BO^3 = (2PN + BO) : BO$$

$$= (2aq + ao) : ao, \text{ por (4)},$$

$$BO^3 : PN^3 = ao : ap, \text{ por (5)},$$

e

$$PN^3 : PN^2 \cdot (2BO + PN) = PN : (2BO + PN)$$

$$= aq : (2ao + aq), \text{ por (4)},$$

$$= ap : (2an + ap), \text{ por (2)}.$$

Portanto, *ex aequali*,

$$BO^2 \cdot (2PN + BO) : PN^2 \cdot (2BO + PN) = (2aq + ao) : (2an + ap),$$

de forma que, por hipótese,

$$LG : GM = (2aq + ao) : (2an + ap).$$

Componendo, e multiplicando os antecedentes por 5,

$$ON : GM = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} : (2an + ap).$$

Mas

$$ON : OM = 5 : 2 = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} : \{2(ao + ap) + 4(aq + na)\}.$$

Segue-se que

$$ON : OG = \{5(ao + ap) + 10(aq + na)\} : (2ao + 4aq + 6an + 3ap).$$

Portanto,

$$(2ao + 4aq + 6an + 3ap) : \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} = OG : ON = OG : on.$$

E

$$ap : (ao - ap) = ap : op$$

$$= GF : OL, \text{ por hipótese,}$$

$$= GF : \frac{3}{5} on,$$

enquanto *ao, aq, an, ap* estão em proporção contínua.

Portanto, pela Prop. 9,

$$GF + OG = OF = \frac{2}{5} ao = \frac{2}{5} OA.$$

Então *F* é o centro de gravidade do segmento *BAB´*. [Prop. 8]

Seja *H* o centro de gravidade do segmento *PAP´*, tal que $AH = \frac{3}{5} AN$.

E, uma vez que

$$AF = \frac{3}{5} AO,$$

temos, por subtração,

$$HF = \frac{3}{5} ON.$$

Mas, por (6) acima,

$$(\text{área } PP'B'B) : (\text{segmento } PAP') = \frac{3}{5} ON : GF$$

$$= HF : FG.$$

Então, uma vez que *F* e *H* são os centros de gravidade dos segmentos *BAB´* e *PAP´*, respectivamente, segue [por I. 6, 7] que *G* é o centro de gravidade da área *PP´B´B*.