



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

F 809 - Instrumentação para o Ensino
Relatório final de atividades - 1º semestre de 2004

Orientador: Prof. Dr. Rigitano

Coordenador: Prof. Dr. José Lunazzi

“APLICAÇÕES DO CÁLCULO VARIACIONAL:
BRAQUISTÓCRONA E
O PRINCÍPIO DE FERMAT”



Daniel Leal Macedo RA: 931601

Resumo

Apresentamos as bases do cálculo Variacional, importante ferramenta na Física. Discutimos brevemente o histórico e a mais importante aplicação do cálculo variacional na mecânica: o princípio de Hamilton. Discutimos e resolvemos o mais famoso dos problemas variacionais: a Braquistócrona. Propomos uma atividade para comprovar sua principal propriedade: ser o caminho mais rápido entre dois pontos em um campo de força constante. Apresentamos outro importante, e por que não famoso, princípio ligado a idéia de variacionais: o princípio de Fermat. Nos utilizamos deste princípio para deduzir a Lei de Snell. Descrevemos um aparato que é o análogo mecânico desta lei, onde pode-se verificar a validade desse último princípio.

Sumário

1 Introdução

2 Pequeno histórico do cálculo variacional

2.1 Primeiras referências

2.2. A base consistente e generalizada para os problemas variacionais: o Cálculo

2.3 Um exemplo clássico de um problema variacional: a braquistócrona

2.4 A desgeometrização do cálculo

2.5 Refração, a disputa Newton *versus* Huygens, e o Princípio de Fermat

3 Pressuposto teórico: Cálculo variacional e equação de Euler

4 Atividade 1 – braquistócrona

4.1 Modelo teórico

4.2 Descrição do aparato

4.2.1 Materiais

4.2.2 Construção

4.3 Resultados

4.4 Alternativas de construção

5 Atividade 2 – Princípio de Fermat e Lei de Snell

5.1 Modelo matemático

5.2 Descrição do aparato

5.2.1 materiais

5.2.2 Construção

5.3 Resultados

5.4 Exemplo de abordagem do princípio de Fermat em material didático

6. Conclusões

7. Referências

8. Comentários

8. Anexos

8.1 Aula sobre refração: módulo 14 da apostila 2003 da Cooperativa do Saber

1. Introdução

A resolução dos problemas da Física Matemática e também da Mecânica Teórica e do Contínuo usualmente levam a equações diferenciais parciais e mais raramente a equações diferenciais ordinárias. Na utilização dos métodos diretos nos deparamos com o fato de que em muitos casos é possível substituir o problema de integrar uma equação diferencial por um problema equivalente de **encontrar a função que faz com que uma certa integral tenha o mínimo valor possível**.

Problemas como estes são chamados Problemas Variacionais. Os métodos que nos permitem reduzir o problema de integrar uma equação diferencial em um problema variacional equivalente são chamados Métodos Variacionais.

Na física, muito problemas variacionais, foram propostos. Na verdade alguns princípios se baseiam nesta idéia. Um destes princípios é conhecido como **Princípio de Hamilton**¹ (1834 e 1835), que, quando aplicado através do uso do cálculo variacional, implica no que conhecemos **como Equações de Lagrange**². O princípio diz que:

“De todos os possíveis caminhos que um sistema dinâmico pode se mover entre dois pontos dentro de um intervalo de tempo especificado (consistente com qualquer vínculo imposto), o caminho seguido será aquele que minimiza a integral, no tempo, da diferença entre a energia cinética e potencial”

Como podemos ver, o enunciado propõe um problema variacional. Pode-se parecer, a primeira vista, que isto se trata apenas de um novo método matemático de se abordar um problema. É bem verdade, que este princípio não apresenta nenhuma teoria nova. Experiências mostram que, ao nível macroscópico, o movimento de uma partícula em um referencial inercial é corretamente descrito pelas Leis de Newton³. Por mais complicado que um sistema possa ser (e ele pode se tornar bem complicado...) ele pode ser descrito pela mecânica newtoniana. Assim o

¹Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) astrônomo e matemático escocês.

²Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)

³Isaac Newton (1642 – 1727)

princípio de Hamilton se apresentaria somente como um método de resolução “alternativo”. De fato, pode-se mostrar que as equações de Lagrange levam às leis de Newton.

Mas o Cálculo Variacional, aplicado à física através do princípio de Hamilton e das equações de Lagrange, vai além de um simples método matemático. Ele expressa, sem medo de estar cometendo exageros, uma característica fundamental do comportamento da natureza. Isto pode ser dito pois o princípio pode ser aplicado a uma gama de fenômenos físicos, não necessariamente ligados à mecânica e às equações newtonianas. É como se a “busca por mínimos” permeasse vários fenômenos e as teorias que os descrevem. Nas palavras de do próprio Euler⁴: *“Como a estrutura do mundo é a mais perfeita e foi estabelecida pelo mais sábio Criador, tudo que ocorre nesse mundo obedece a algum princípio de máximo ou mínimo”*.

O princípio de Hamilton é um dos exemplos de postulados mais elegantes e abrangentes da ciência, indo de encontro com a idéia que as teorias físicas, além de descreverem corretamente a natureza do ponto de vista matemático, devem ser o mais sucintas no que tange o número de postulados fundamentais e as mais unificadoras possíveis.

Não por outra razão, portanto, torna-se relevante este projeto. Nele apresentamos a base do pressuposto teórico do Cálculo variacional, e propomos duas atividades que ilustram a aplicação deste método / princípio.

⁴ Leonhard Euler (1707 – 1783)

2. Pequeno histórico do cálculo variacional

“Está na Eneida de **Virgílio** (70 – 19 a.C.). Dido, uma fenícia, persuadiu um chefe africano a dar-lhe tanta terra quanto ela pudesse cercar com a tripa de um touro. Assim foi. Primeiro, ela cortou as tripas em centenas de tiras bem fininhas. Depois, espertamente, uniu-as para traçar um semi-círculo no chão, a beira do mar Mediterrâneo. Era a máxima área costeira que ela poderia envolver. Neste lugar ela construiu uma cidade. A famosa Cartago.

Esta lenda é pitoresca e tem sido muito usado em livros de otimização. Antes de se tornar rainha de Cartago, Dido teria resolvido o primeiro problema de otimização da história. Mesmo sendo literário, o relato demonstraria que os povos da antiguidade possuíam conhecimento a respeito de áreas e comprimentos. Sabiam que, dentre as figuras de igual perímetro, o círculo é aquela com maior área.

É fato. Sabiam, com toda certeza. Contudo, a atitude da rainha Dido não demonstra exatamente isso. Trata-se de um mito. Tem mais a ver com a simbologia feminina associada à cidade de Cartago.

A figura que Dido traça no chão não seria, necessariamente, um sinal de otimização da área. Um semi-círculo é capaz de representar um útero engravidado. Esboçando então um modesto entender: a hipótese a ser explorada poderia ser outra. A de que a forma do terreno, escolhida a partir da tripa de um touro, a beira-mar, por uma mulher, para gerar uma cidade, simboliza um máximo. Porém, no caso, um máximo de adequação ao arquétipo da mãe-terra. Muito difundido, por sinal, naquelas paragens.”⁵

Mas esta pequena narrativa, se não é prova, ilustra muito bem um fato, este sim comprovado por estudos da história da ciência: é muito antiga a busca por soluções de problemas de mínimos e máximos.

2.1 Primeiras Referências

As idéias mais primitivas do Cálculo Variacional foram apresentadas por **Aristóteles** (384 – 322 a.C.), por volta de 300 a.C., onde constam pela primeira vez

⁵ Retirado de [7], com cortes feitos por mim.

referências a velocidades virtuais, conceito usado em algumas abordagens de problemas de mínimos e máximos.

Porém, a primeira aplicação de um princípio de minimização foi feita por **Herão de Alexandria** (20 – 62). Ele postulou que, na reflexão por um espelho plano, a luz seguiria o caminho mais **curto** entre dois pontos. Uma simples análise geométrica, com conceitos abordados no ensino médio, é possível verificar que este princípio leva, corretamente, à lei da reflexão (igualdade entre os ângulos de reflexão e incidência).

Até mesmo **Galileu** (1564 – 1642) fez referências velocidades virtuais em alguns de seus trabalhos.

2.2. A base consistente e generalizada para os problemas variacionais: o Cálculo

Mas por um bom tempo os problemas de mínimos e máximos, e os problemas correlatos de cálculos de tangentes, quadratura (cálculos de áreas) e de cubatura (cálculos de volumes) não apresentavam a generalização que só viria com **Isaac Newton** e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) que, hoje sabemos⁶, de forma independente, desenvolveram o Teorema Fundamental do Cálculo. Antes disso cada matemático, desenvolvia sua estratégia particular de abordar o problema, muitas vezes se baseando em conceitos não muito rigorosos, ou recorrendo à argumentos filosóficos, que porém levavam a soluções corretas. Contudo, com o teorema fundamental do cálculo, que mostrava que o cálculo de tangentes era a “operação inversa”, se assim podemos dizer, da quadratura e que ambos estavam ligados ao cálculo de mínimos e máximos.

Pelo que foi dito anteriormente – e muitos autores assim o afirmam –, pode-se acreditar que Newton e Leibniz “inventaram” o cálculo. Na verdade, isto é simplificação exagerada. Em vez disso, como Richard Courant (1888 - 1972) observou, cálculo tem sido “uma luta intelectual dramática que durou 2500 anos”. Muitos contribuíram para os fundamentos do cálculo.

⁶ Depois de 1700, circunstâncias levaram a um dos episódios mais tristes e deselegantes em toda a história da ciência: a disputa entre Leibniz e Newton, e mais ainda entre seus seguidores, sobre quem deveria receber os créditos do cálculo.

Todos os conceitos principais do cálculo - derivada, continuidade, integral, convergência/divergência - são definidos em termos de limites. Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo; de fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo de álgebra, geometria e o resto da matemática. Portanto, em termos do desenvolvimento ordenado e lógico do cálculo, limites devem vir primeiro. Porém, é curioso notar que o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limite eram confusas, com idéias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito (números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas) e com intuição geométrica subjetiva e indefinida. O termo limite em nosso sentido moderno é um produto do iluminismo na Europa no final do século 18 e início do século 19, e nossa definição moderna tem menos de 150 anos de idade.

A relevância dos dois vem da formulação do Teorema Fundamental do Cálculo. Eles mesmos não tinham claro o conceito de limites. Newton, por exemplo, recorria a conceitos como infinitesimais que careciam de rigor. Por outro lado, em seu *Principia Mathematica* (1687), talvez o maior trabalho em matemática e ciência, Newton foi o primeiro a reconhecer que o limite deve ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura e afins. No início do Livro I do Principia, Newton **tentou** dar uma formulação precisa do conceito de limite:

“Quantidades, e as razões de quantidades, as quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final.”

A genialidade de Newton tinha descoberto o papel fundamental que o limite tinha que desempenhar no desenvolvimento lógico do cálculo. E, apesar de sua linguagem rebuscada, a semente da definição moderna de limite estava presente em suas afirmações. Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do cálculo, por muitas décadas, ninguém observou estas dicas que Newton tinha fornecido.

Outras contribuições importantes de Leibniz foram as notações e as fórmulas básicas para as derivadas e integrais, as quais usamos desde então.

2.3 Um exemplo clássico de um problema variacional: A Braquistócrona

A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas Brachistos (que quer dizer "menor") e Chronos (que quer dizer "tempo") e se refere à **curva ou o caminho, que une dois pontos A e B pertencentes a um plano vertical, que toma o mínimo tempo, quando esta partícula está submetida apenas a influência da gravidade**. Podemos na verdade generalizar dizendo que a partícula vai de A a B sujeita a um campo uniforme com direção contida no plano que passa por A e B.

“Em Junho de 1696, **Johann Bernoulli** (1667 – 17 48) decide lançar um desafio aos mais “brilhantes matemáticos do mundo”, propondo o problema da braquistócrona na revista *Acta Eruditorum*.

Sendo J. Bernoulli amigo de Leibniz, o desafio teria, aparentemente, a intenção de desafiar Newton. O fato é que o problema requeria conhecimento de cálculo diferencial e integral, cuja paternidade, como vimos, estava sendo discutida na época.

Segundo conta John Conduitt, amigo e Biógrafo de Newton, o diretor da Casa da Moeda⁷ ficou sabendo do desafio lançado, “regressou muito cansado a sua casa as quatro da tarde, entretanto não se recolheu para dormir até ter resolvido o problema, o qual lhe ocupou até as quatro da manhã”.

No dia seguinte, Newton enviou um manuscrito com a solução, em latim e anônima, a Montagu, que era o presidente da Royal Society, com o encargo de publicá-la e mandá-la a Bernoulli. Segundo Jon Pipper [2], conta-se que quando Bernoulli recebeu o manuscrito anônimo, adivinho de imediato seu autor e exclamou: “O Leão se reconhece pela marcas de suas garras!”.

⁷ Nesta época, Newton era o diretor da Casa da Moeda Britânica, posto este arranjado por seu amigo Conduitt.

Em maio de 1697, a *Acta Eruditorum* publicou quatro soluções cujos autores eram Leibniz, o mesmo Bernoulli, seu irmão mais velho **Jacob Bernoulli** (1654 – 1705) e a anônima de Newton⁸. Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver tão celebre problema: Ele, como os outros, mostrou que a solução era uma cicloide⁹.

2.4 A desgeometrização do Cálculo

Como vimos, a base do cálculo variacional são os conceitos de derivada e integral. Mas não como as conhecemos hoje. No século XVII estes conceitos estavam presos ao traçado de tangentes e à avaliação de áreas. Como era de se esperar, o cálculo, criado¹⁰ por Leibniz e Newton, não se afastou da tradição geométrica consagrada, por exemplo, em Arquimedes.

Daí a importância de **Euler e Lagrange**. Ambos trabalharam no sentido de "desgeometrizando" a matemática criada pelos seus antecessores. Entre inúmeros outros feitos, Euler é o responsável pelo conceito de função matemática. Lagrange, com o seu "*Mécanique Analytique*", reconstruiu a mecânica newtoniana em bases analíticas, desvincilhada de figuras geométricas. Sobretudo, um e depois o outro plantaram e fortaleceram as raízes do cálculo variacional.

Finalmente, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Ele não trabalhou explicitamente com o cálculo variacional, mas seus feitos influenciaram decisivamente suas bases. Foi ele quem botou ordem na casa. Livrou o cálculo dos "infinitésimos" introduzindo os conceitos de limite e de continuidade. Deu fundamentos às idéias de derivada e integral. Inaugurou a análise matemática. Com a forma, a autonomia e o rigor atuais.

⁸ Fragmento traduzido de [11]

⁹ Esta curva é gerada por um ponto de um círculo que gira sem deslizar sobre uma superfície plana.

¹⁰ Por força de simplificação adotamos a postura usual. Porém deve-se levar em conta o comentário feito na seção anterior

2.5 Refração, a disputa Newton *versus* Huygens, e o Princípio de Fermat.

“**Pierre de Fermat** (1601 – 1666) não era um matemático profissional. De temperamento tímido, publicou apenas um artigo em vida. Dos seus feitos, há apenas anotações esparsas, cartas e comentários de admiradores. Consta que era basco, tinha uma inclinação por línguas e literatura, estudou leis e se tornou uma espécie de procurador da justiça. Por tédio, vocação ou apenas para se entreter, resolveu recriar, seguindo a moda da época, uma obra perdida de Apolônio. Era o "Plane Loci", sobre lugares geométricos. Talvez por conta disso, sentiu-se estimulado a representar curvas por meio de relações algébricas entre as coordenadas. Inventou assim a geometria cartesiana, lá por 1630.

Esta geometria é "cartesiana" em honra a **René Descartes** (1596 – 1650) que a divulgou em 1637. O que é justo pois, ao que tudo indica, não se sabia do trabalho de Fermat até a sua publicação póstuma. Além disso, a notação matemática de Fermat era terrível. Acostumara-se a usar o método de Viète (criador da primeira sistematização de símbolos algébricos, no final do XVI) mais perto da linguagem corrente do que do simbolismo que temos hoje. Contudo, a geometria "cartesiana" de Fermat é considerada mais genérica e mais acurada do que a de Descartes.

De posse de representações algébricas para curvas e superfícies, Fermat resolveu aventurar-se na resolução de uma outra classe de problemas clássicos. O traçado de tangentes. Em decorrência, debruçou-se na investigação de pontos extremos de curvas¹¹.

No século XVII havia uma polêmica a respeito da natureza da luz. **Christiaan Huygens** (1629 – 1695) defendia largamente a hipótese ondulatória. Newton, ambivalente em relação à natureza da luz, defendia que existiam corpúsculos de luz, uma par cada cor¹². Estes corpúsculos, associados às diferentes cores, geravam vibrações características no éter. Apesar do seu trabalho revelar uma curiosa

¹¹ retirado de [7]

¹² Newton concluiu que a luz branca devia ser composta por uma mistura de toda uma gama de cores independentes

propensão para, simultaneamente, abarcar as teorias ondulatória e corpuscular (de emissão), Newton tornou-se progressivamente adepto desta última.

Na verdade, a discussão era mais ideológica, pois ambas se equivaliam ao explicarem a reflexão e a refração. No meio destas discussões de fundamentos Fermat propõe um ponto de partida matemático. A luz teria velocidade finita, dependente do meio circulante. Quais as trajetórias dos raios luminosos? Segundo seu princípio, enunciado em 1657, afirmou que **a luz, ao propagar-se de um ponto para outro, escolhe o caminho para o qual o tempo de percurso é mínimo mesmo que, para tal, se tenha de desviar relativamente ao caminho mais curto.** Este princípio ficou conhecido como **Princípio de Fermat**.

O fato é que este princípio corroborava a hipótese ondulatória, pois no meio de maior índice de refração a luz deveria ter menor velocidade, fato este que estava em desacordo com a teoria de Newton. O grande peso da opinião de Newton abafou a teoria ondulatória durante o século XVIII, silenciando todos menos os seus defensores mais aguerridos, e colocando de lado o princípio de Fermat. A teoria ondulatória só seria retomada com os trabalhos de **Fresnel**¹³ e **Young**¹⁴.

¹³ Auguste Jean Fresnel (1788 – 1827)

¹⁴ Thomas Young (1773 – 1829)

3. Pressuposto Teórico: Cálculo variacional e a Equação de Euler

O problema básico do cálculo variacional é determinar uma função $y(x)$ tal que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), x\} dx \quad [1]$$

seja um extremo (máximo ou mínimo), para x_1 e x_2 fixos¹⁵.

Se considerarmos que $y(x)$ fornece o valor mínimo para a integral J , qualquer função vizinha de y , por mais perto que possa ser, fornecerá um valor maior para J .

Para definir a função vizinha de y podemos usar a seguinte definição:

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad [2]$$

onde para $\alpha = 0$, $y(0, x) = y(x)$, e de modo que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ de modo que $y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ e $y(\alpha, x_2) = y(x_2)$. Podemos esquematizar o descrito acima no seguinte gráfico (figura 1).

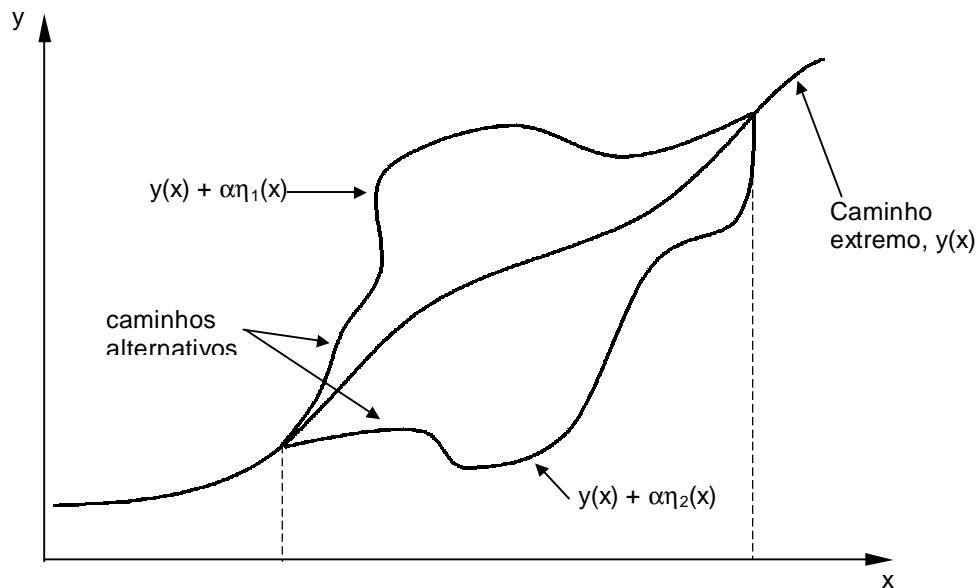


Figura 1

Se, ao invés de usarmos a função $y(x)$, usarmos $y(\alpha, x)$ na equação [1], J se torna função de α , de modo que

¹⁵ Não é necessário que os limites de integração sejam fixos. Porém, se puderem variar, o problema de minimizar (ou maximizar) a integral J incluirá não só a busca de $y(x)$, mas também de x_1 e x_2 tal que J seja um extremo.

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x\} dx \quad [3]$$

A condição de um resultado extremo é que :

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad [4]$$

para qualquer função $\eta(x)$.

Para determinar o resultado da condição expressa por [4], vamos fazer a diferenciação de [3]:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y', x\} dx \quad [5]$$

Como consideramos os limites fixos, a diferenciação afeta somente o integrando. Assim podemos “passar para dentro” a derivada parcial de modo que teremos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad [6]$$

pois somente y e y' (derivada de y em relação a x) que dependem de α . Mas temos que, de [2],

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad [7]$$

e

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dx},$$

mas

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

portanto

$$y'(\alpha, x) = \frac{\partial y}{\partial x} = y'(x) + \alpha \frac{d\eta}{dx}(x)$$

fazendo com que

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx} \quad [8].$$

Substituindo [7] e [8] em [6] temos:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad [9].$$

Podemos integrar por partes a segunda parte do integrando fazendo

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad [10]$$

onde $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ e $dv = \frac{d\eta}{dx} dx = d\eta$. Assim temos que $v = \eta$ e que

$du = \frac{du}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$. Substituindo em [10] temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \cdot dx \quad [11]$$

Com isso, a equação [9] pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \quad [12]. \end{aligned}$$

A integral [12] tem que ser zero para $\alpha = 0$ qualquer que seja $\eta(x)$. Isto só acontecerá se “forçarmos” esta condição estabelecendo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad [13]$$

Devemos lembrar que quando $\alpha = 0$, y e y' do integrando ficam $y(\alpha, x) = y(x)$ e $y'(\alpha, x) = y'(x)$, ou seja, f deve ser diferenciada em função de $y(x)$ e $y'(x)$. Este resultado é conhecido como **Equação de Euler**¹⁶.

¹⁶ Derivada pela primeira vez por Euler em 1744

4. Atividade 1 – a braquistócrona

Se perguntarmos a qualquer pessoa qual o caminho mais rápido entre dois pontos desnivelados, a maioria deles (inclusive estudantes do ensino superior...) responderam que é uma reta. É instintivo imaginar o caminho mais curto como o mais rápido. Daí a natureza intrigante esta 1ª atividade.

Com um aparato simples vamos demonstrar a validade da solução para o problema da braquistócrona, primeiramente obtida por J. Bernoulli, e que, através do cálculo variacional, deduzimos na próxima seção.

4.1. Modelo matemático

O problema geral da braquistócrona é achar a função $y(x)$ que representa a trajetória de menor tempo de um corpo entre dois pontos A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) . Este corpo está sob a ação de um campo de força constante. Para fins de facilitar os cálculos vamos admitir que A é a origem e que x é positivo para baixo. Veja o esquema:

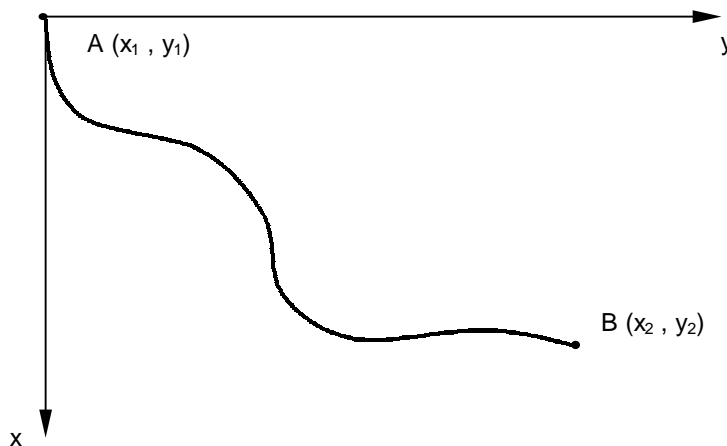


figura 2

Como o campo de força é constante e não estamos considerando outras forças não conservativas que realizam trabalho (haverá outra força – força de vínculo, que manterá a força na trajetória otimizada – mas esta não realizará trabalho sobre o corpo, pois será perpendicular ao deslocamento) o sistema é conservativo. Como o corpo parte do repouso e da origem (usada também como

referência para a energia potencial) a energia mecânica $E_M = E_c - E_{pg} = 0$. Assim em B temos que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ e $E_{pg} = -Fx = -mgx$ temos que

$$v = \sqrt{2gx} \quad [14]$$

O tempo para que a partícula descreva uma trajetória $y(x)$ qualquer de A até B é dado por:

$$t = \int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \frac{(dx^2 + dy^2)^{1/2}}{(2gx)^{1/2}}$$

$$t = \int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \left(\frac{1+y'^2}{2gx} \right)^{1/2} dx \quad [15].$$

[15] é equação que deve ser minimizada. Podemos “tirar par fora” da integral a constante $(2g)^{1/2}$. Assim a funcional que deve seguir a Equação de Euler é:

$$f = \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{1/2} \quad [16].$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, portanto [13], neste caso se torna

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \text{ ou melhor,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante} \equiv \left(\frac{1}{2a} \right)^{1/2} \quad [17]$$

onde ‘a’ é uma nova constante. Definimos a constante deste modo pois, neste formato, ela facilitará futuras substituições de variáveis. Fazendo a diferenciação em [17] temos:

$$f = \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{1/2} = u^{1/2}, \text{ onde } u = \frac{1+y'^2}{x}.$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{-1/2} \frac{2y'}{x} = \left(\frac{x}{1+y'^2} \frac{y'^2}{x^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2a} \right)^{1/2}$$

Portanto

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \quad [18]$$

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \Rightarrow 2ay'^2 = x(1+y'^2) \Rightarrow 2ay'^2 - xy'^2 = x \Rightarrow y'^2(2a-x) = x$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{x}{(2a-x)} = \frac{x^2}{(2ax-x^2)} \Rightarrow y' = \frac{x}{(2ax-x^2)^{1/2}} \Rightarrow \int y' dx = \int \frac{x \cdot dx}{(2ax-x^2)^{1/2}}$$

$$y = \int \frac{x \cdot dx}{(2ax-x^2)^{1/2}} \quad [19]$$

Fazemos a seguinte mudança de variável:

$$x = a(1 - \cos \theta)$$

$$dx = a \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta$$

o que faz [19] se tornar

$$y = \int \frac{x \cdot dx}{(2ax-x^2)^{1/2}} = \int \frac{a(1-\cos\theta)a \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta}{\{2a^2(1-\cos\theta) - [a(1-\cos\theta)]^2\}^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{a(1-\cos\theta)a \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta}{[2a^2 - 2a^2 \cos\theta - (a^2 - 2a^2 \cos\theta + a^2 \cos^2 \theta)]^{1/2}} = \int \frac{a^2(1-\cos\theta) \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta}{(a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} =$$

$$= \int \frac{a^2(1-\cos\theta) \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta}{a(1-\cos^2 \theta)^{1/2}}, \quad \text{ou seja}$$

$$y = \int a(1-\cos\theta) \cdot d\theta \quad [20]$$

Integrando [20] temos

$$y = a(\theta - \text{sen } \theta) + \text{constante}.$$

Como a curva procurada passa pela origem, esta condição de contorno impõe que a constante de integração seja nula, fazendo com que a equação paramétrica da curva de menor tempo seja

$$\begin{cases} y = a(\theta - \text{sen } \theta) \\ x = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad [21].$$

Esta curva é uma ciclóide (figura 3). O parâmetro a deve ser ajustado de forma que a curva passe pelo ponto $B(x_2, y_2)$.

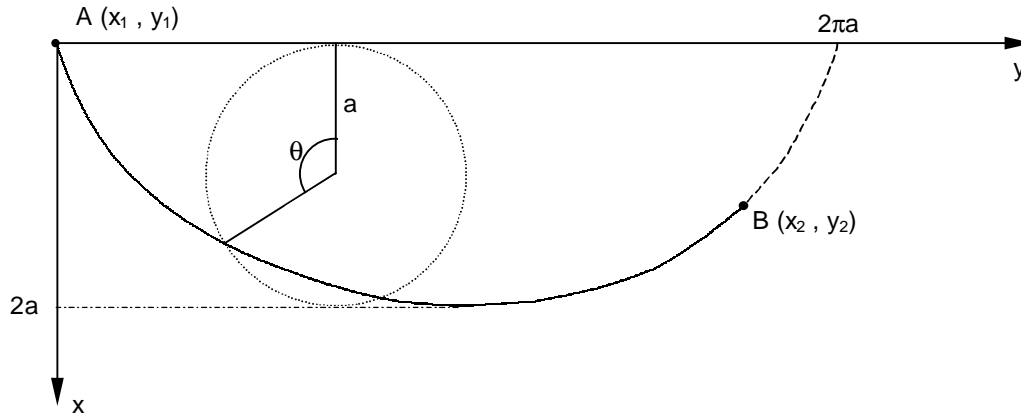


figura 3

4.2. Descrição do aparato

4.2.1. Materiais

Os materiais usados são simples e podem ser comprados facilmente no comércio local

- placa de compensado 80 cm x 70 cm. Aproximadamente R\$ 10,00 comprado de sobras de uma marcenaria
- 3 m de tira de borracha (tipo espuma) comprada em loja especializada em borracha. Aproximadamente R\$ 8,00.
- Pregos e aruelas para fixação. Adquiridas em loja de ferragens. Aproximadamente R\$ 2,00.
- 2 folhas de Cartolina branca e 15 folhas milimetradas adquiridas em papelarias. R\$ 3,00, aproximadamente.
- Bolinhas de gude.



Figura 4: fotos dos componentes

4.2.2. Construção

Com o auxílio do Excel, montamos tabelas de valores para 3 curvas (**reta, cicloide, e uma hipérbole**) que unem dois pontos separados por uma distância no eixo vertical¹⁷ de 40 cm e, de 62,84 cm no eixo horizontal. Com esses valores em mão, plotamô-los no papel milimetrado para que servissem de guia na fixação da borracha fazendo com que estas tiras sirvam como trilhos. Esta pronta a prancha de testes (chamaremos assim, a partir de agora, a montagem).

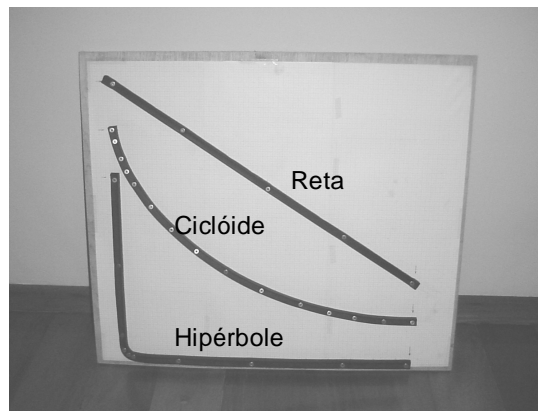


Figura 5

Para usá-lo deve-se apoiar a prancha com uma certa inclinação em relação à horizontal. Na vertical, o campo a que as bolinhas estariam sujeitos seria o gravitacional.

4.3. Resultados

Podemos observar que o resultado segue o esperado. Em comparação às outras duas curvas a cicloide sempre é o caminho mais rápido, independente da inclinação, observada as limitações abaixo.

Para inclinações muito pequenas, devido aos parâmetros usados e a imprecisão inerente ao aparato, a bolinha pode não chegar ao final na hipérbole e, devido ao atrito (que não consideramos no modelo), pode não entrar em movimento no caso da reta.

¹⁷ Não necessariamente vertical, pois como veremos o aparato não é usado na vertical. Tome esta direção como aquela paralela ao lado menor da placa. O lado maior vai servir de base e será designado eixo horizontal.

Para inclinações muito grandes o que se verificou foi a saída da bolinha do trilho-guia, no caso da hipérbole. Assim duas limitações devem ser observadas: a inclinação não pode ser muito grande, ou a bolinha tem que ser pequena. Quanto menor a bolinha maior pode ser a inclinação.

Outro ponto que poderia levantar questionamentos é a influência do momento de inércia, devido ao rolamento. Não foi levado em conta este fato na dedução da curva, mas até onde pudemos observar isto não influenciou o resultado final. Isto se deve ao fato de que em rolamentos sem deslizamentos de esferas o raio desta não influencia o campo gravitacional efetivo final.

De resto é observar e se divertir com o inesperado.

4.4. Alternativas de Construção

Pode-se, ainda construir prancha de teste com materiais mais simples e baratos, porém não tão baratos. Uma alternativa é usar uma placa de isopor como suporte e cartolina grossa como trilhos.

- Deve-se, com uma caneta hidrocor, usando um molde previamente marcado em uma folha, marcar sobre o isopor o traçado das curvas desejadas.
- Com um estilete perfura-se a placa ao longo da curva delineada. Note que a placa deve ter uma certa espessura.
- Após isso, se deve inserir ao longo do corte uma tira de cartolina de modo que esta funcione como trilho. Assim tem-se uma placa de teste de baixíssimo custo

5. Atividade 2 – a Lei de Snell e o Princípio de Fermat

Para ilustrar o princípio de Fermat, uma montagem bem simples, no intuito de levar a efeito uma série de simulações — nas quais uma linha de costura representará o trajeto percorrido pela luz e seu comprimento o tempo que esta leva para percorrer uma distância — que nos permitirão não só compreender melhor o princípio de Fermat, mas também, a partir deste, demonstrar a **Lei de Snell**¹⁸.

5.1 Modelo matemático

Como vimos, o princípio de Fermat encerra a idéia de minimização do tempo percorrido por um raio de luz. A trajetória percorrida por um raio de luz entre dois pontos A e B é o que minimiza o tempo total percorrido. Se definirmos $T(x)$ como o tempo que a luz leva indo de A até B passando pelo ponto X teremos:

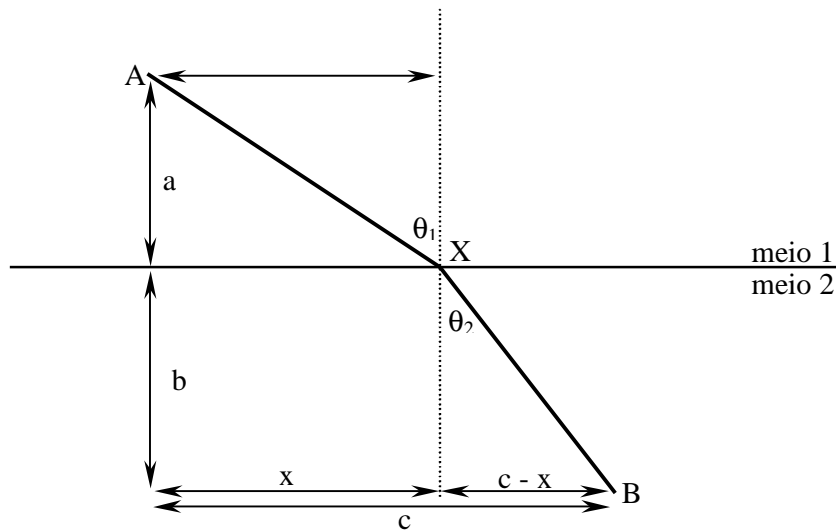


Figura 6

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2} \quad [22]$$

¹⁸ Willebrord Snell (1591-1626), professor em Leyden, descobriu experimentalmente, em 1621, a lei da refração há tanto procurada. Ao compreender exatamente como é que os raios de luz são defletidos ao atravessar a fronteira entre dois meios, isto é, um dioptra, Snell abriu a porta para a óptica aplicada contemporânea

Assim nosso problema está reduzido em achar x que minimize $T(x)$. Como podemos notar pela figura o caminho procurado apresenta uma descontinuidade no ponto X . Assim não é possível acharmos um funcional para aplicar a equação de Euler como fizemos na dedução da equação da Braquistócrona. Mas aqui o problema pode ser resolvido por uma simples diferenciação. Ou seja, a situação procurada obedece à $T'(x) = 0$. De [22] temos

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \quad [23].$$

Da figura 6 temos que:

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

portanto [23] toma a forma:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2} \quad [24]$$

que nada mais é que a Lei de Snell.

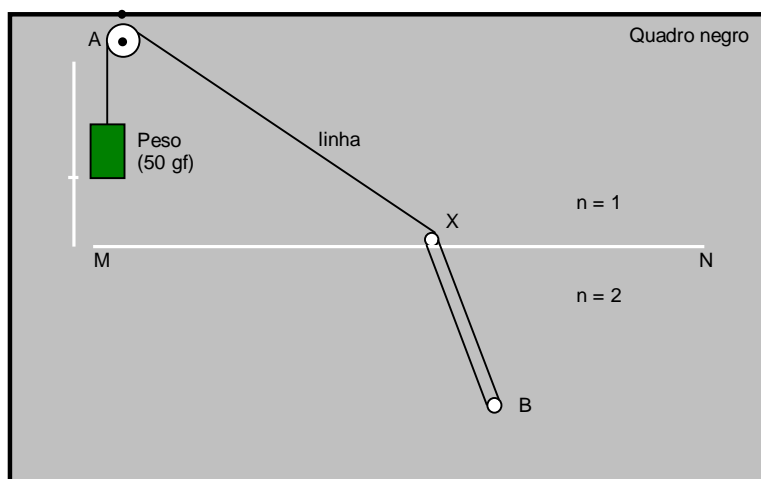
5.2 Descrição do aparato

5.2.1. Materiais

- Uma polia pequena ou algo que possa funcionar como uma;
- linha de costura;
- um "peso" (50 g de massa são suficientes);
- dois lápis;
- quadro-negro e giz.

5.2.2 Construção

Nosso objetivo será encontrar o caminho de menor tempo entre o ponto A (que representa a fonte luminosa, nesta simulação) e o ponto B (que representa o observador), passando por um ponto X (ponto de incidência da luz) localizado sobre a linha MN (que representa a superfície de um dióptro plano). Nessa montagem, o quadro negro representa os meios homogêneos e transparentes no qual a luz se propaga, e a linha de costura, o trajeto da luz dentro desse meio.



A: fonte de luz
B: observador
X: ponto de incidência
MN: dióptro plano
AX: raio incidente
BX: raio refratado

figura 7: esquema da montagem

Uma polia (ou algo que faça esse papel) é fixada na moldura do quadro negro, em A . A linha deve passar pela polia e manter suspenso um peso, em uma das extremidades; a outra extremidade deve ser fixada em B (por meio de um prego pequeno ou mesmo de um lápis, para não danificar o quadro, mas nesse caso alguém terá de ficar segurando o lápis). O lápis móvel X deverá manter a linha sempre encostada no porta-giz MN .

A extremidade livre da linha é amarrada no lápis móvel X . A partir daí, passa pelo lápis fixo B , encosta no lápis móvel X e vai para a polia A . Observe que, como o índice de refração do meio abaixo de MN é igual a 2, o caminho óptico¹⁹ nesse meio (representado pelo comprimento total da linha, abaixo do quadro) é o dobro do

¹⁹ Caminho óptico é definido como a multiplicação entre a distância percorrida pelo raio de luz e o índice de refração do meio em que se propaga. É ele que tem que ser minimizado.

caminho real (distância de X até B). Se n_2 fosse igual a 3, bastaria amarrar a linha em B , passar por X , voltar a passar por B e retornar tocando X . Porém só é possível simular situações onde a razão entre os meios é um número inteiro.

Movendo-se o lápis X na direção MN , o peso desloca-se verticalmente para cima ou para baixo. Uma vez que o comprimento da linha é fixo, o peso alcançará sua posição mais baixa quando no trajeto AXB for utilizado o menor comprimento de linha possível. Para facilitar a determinação da posição mais baixa do peso, pode-se traçar um segmento de reta vertical no quadro negro, de tal modo que o peso se desloque ao longo dele, como ilustramos.

5.3 Resultados

Qualitativamente, podemos observar que a menor altura alcançada pelo peso não é a linha reta. Ao movermos o lápis ao longo da linha MN , o peso vai abaixando e depois começa a subir de novo, como esperaríamos.

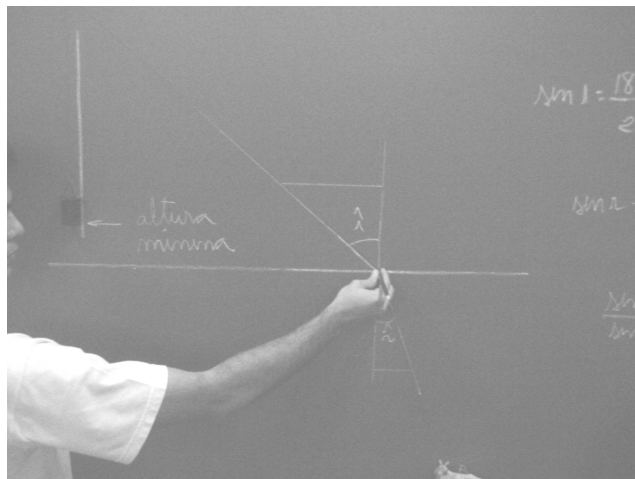


Figura 8: ponto de altura mínima, que deve corresponder a caminho seguido pela luz. Foi marcado, no quadro negro o traçado do fio para que pudéssemos efetuar medições.

Para que pudéssemos efetuar medições e comprovar a validade do aparato, “sujamos a linha de giz” e batemos no quadro na situação de altura mínima (figura 8). Efetuamos medições e obtivemos o valor para $\sin i / \sin r = 2,16$, quando esperaríamos um valor de 2 (figura 9).

Percebemos que é difícil a exata localização do ponto onde temos a minimização do caminho óptico. Esta dificuldade pode ser atribuída a dois principais fatores: a elasticidade do fio, que mesmo sendo de algodão (pouca elasticidade) verifica-se sua deformação; a o atrito entre fio, a polia e o lápis.

Para remediar o problema, diminuámos o atrito da polia com o fio, usando um fio sintético (nylon) uma polia de plástico e óleo mineral lubrificante, além de diminuir o valor do peso deixando o sistema mais sensível.

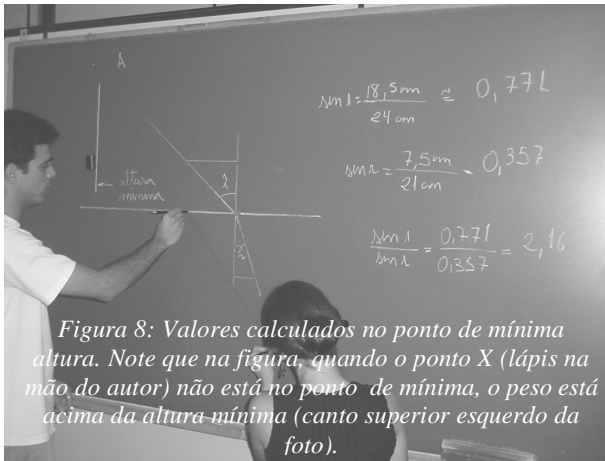


Figura 8: Valores calculados no ponto de mínima altura. Note que na figura, quando o ponto X (lápiz na mão do autor) não está no ponto de mínima, o peso está acima da altura mínima (canto superior esquerdo da foto).

Mesmo assim, observa-se que, quando o ponto X está próximo do ponto de mínimo caminho óptico, a variação de altura do peso é quase imperceptível, fornecendo assim uma região de mínimo, antes de um ponto. Avaliando a extensão desta região pode-se associar ao erro uma medida.

Refazendo as medidas obtivemos um valor para o índice relativo entre os meios de 2,08 com um erro de 7%.

5.4 Exemplo de abordagem do princípio de Fermat em material didático

Em anexo (anexo 1) segue exemplo de uma abordagem do princípio de Fermat em material didático. Esta aula [13] faz parte do material desenvolvido por mim e um colega professor²⁰ para o ano de 2003 para a Cooperativa do saber²¹.

²⁰ Carlos Eduardo Scussiato – professor da Cooperativa do Saber, graduando em bacharelado em física - Unicamp

²¹ Cooperativa do saber, Cursos preparatórios e Sistema Cultural de Ensino. Antigo Cursinho DCE-Unicamp. Segue, nas referências os créditos completos do material.

6. Conclusão

Como vimos o Cálculo variacional tem uma história tão longa quanto suas aplicações no dia-a-dia da ciência e tecnologia. Além disso: aplicado às bases da ciência, fornece princípios que dizem muito sobre a natureza íntima das interações e comportamento da natureza.

As atividades aqui desenvolvidas cumprem seus objetivos: dar uma introdução às bases do Cálculo Variacional, além de ilustrar seus casos mais importantes do ponto de vista histórico. É bem verdade que para o ensino médio não poderíamos dar tanta ênfase à parte formal desenvolvida neste trabalho. Mas isso não invalida de maneira alguma a aplicabilidade das duas atividades neste nível: a primeira para introduzir a idéia de busca por mínimos na natureza, característica esta, segundo muitos autores de hoje e ontem, básica do universo; e a segunda como uma ótima chance de explicação da lei de Snell e conceitos correlatos (velocidade da luz, caminho óptico, índice de refração, etc).

7. Referências

[1] Marion J. B., Thornton S.T.; “*Classical Dynamics of Particles and Systems*”, 4^o ed., Saunders College Publishing, florida ,1995

[2] Fauvel J., Flood R. Shorland M., Wilson R., Wilson R. (editores); “*Let Newton Be!*”, 2^o ed. Oxford University Press, London, 1990

Livro: Cálculo de George B. Thomas

[3] Finney R. L., Weir M. D., Giordano F. R.; “*Material Complementar para os Professores*” in: Thomas G. B.; “*Cálculo*”, volume 1, 10^o ed., Addison Wesley, São Paulo, 2002

[4] Hecht E., “*Óptica*”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1991

[5] www.ctec.ufal.br/ees/disciplinas/mecsol/Introducao_Historica_a_Mecanica_dos_Solidos.pdf na página mantida pelo Professor Eduardo Nobre Lages para o curso de “*Mecânica dos sólidos*” oferecido pelo departamento de Engenharia estrutural da UFAL (Universidade Federal de Alagoas)

[6] www.cesec.ufpr.br/~tc710/EF100.pdf na página mantida pelo Prof. **Inaldo Ayres Vieira** para o Curso de pós-graduação “*Introdução ao métodos aproximados para engenharia*” oferecido pelo Centro de Estudos de Engenharia, Universidade federal do Paraná.

[7] Bennaton J. F.; “*Fermat e o Início da História dos Problemas de Otimização*”, in: www.lps.usp.br/neo/jocelyn/historia_jocelyn.htm - na página do Núcleo de otimização da Universidade Estadual de São Paulo – USP.

[8] www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/familia_bernoulli.doc – arquivo encontrado na página da Direção Nacional de Educação secundária e superior tecnológica do Ministério da Educação do Peru.

[9] www.feiradeciencias.com.br/sala09/09_06.asp - página de divulgação de cultura científica mantida pelo professor Luiz Ferraz Neto.

[10] <http://www.fisica.ufc.br/index.html> - página do Departamento de física da Universidade Federal do Ceará.

[11] <http://bib0.unsl.edu.ar/baea/prof-cs/nro1-03/pes-nro1.htm> - na página do projeto educativo da Faculdade de Ciências Físicas, matemáticas e naturais da Universidade nacional de São Luis – Argentina.

[12] www.icmc.sc.usp.br/~szani/bra/node3.html - na página do Instituto de ciências Matemáticas e de Computação da Universidade Estadual de São Paulo – USP.

[13] Macedo D.L., Scussiatto C.E., “*Refração*”, módulo 14, in: apostila 3 – 2003 da Cooperativa do Saber, Cooperativa do Saber, 2003

8. Comentários sobre o projeto

1. Falta a parte prática, e a comparação do resultado experimental com a teoria. Prof. Lunazzi (sobre o RP em e.mail)
2. RP aprovado, falta a parte prática, não deixe isso para o final. (comentário no portfólio sobre o RP)

Veja embaixo o anexo ao relatório.

Refração

Introdução

Em outros módulos estudamos que a luz, ao incidir em um meio, podia sofrer dois tipos de fenômenos: reflexão e refração. Já estudamos a reflexão e passaremos agora ao estudo da refração. Observe a figura 1.

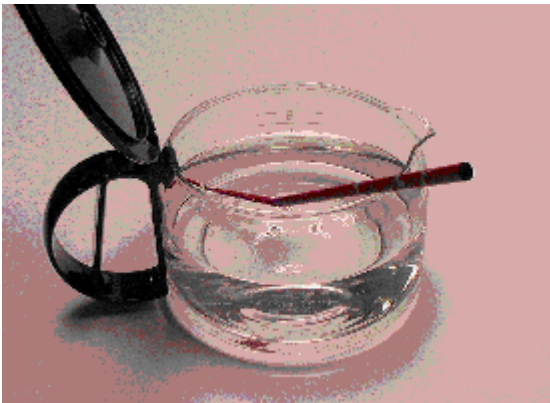


Figura 1. Foto de uma cafeteira com água e um bastão.

Você já deve ter se perguntado: “o bastão está quebrado?”. Não! Sabemos que simplesmente colocar o bastão na água não o fará quebrar. Assim, deve estar acontecendo alguma coisa com a luz que chega aos nossos olhos para que tenhamos a impressão de que o bastão está quebrado...

Esse é um típico fenômeno de refração da luz. O formato do bastão parece mudar porque os raios de luz que chegam aos nossos olhos mudam de direção ao passar da água para o ar. Além desse fenômeno, você já deve ter se perguntado por que existem arco-íris e miragens? Por que uma piscina parece ser mais rasa do que realmente é? Por que uma lupa amplia? Essas e outras perguntas também são respondidas pelo estudo da refração.

O fenômeno

A refração é a passagem da luz de um meio para outro. Nesta passagem, a luz pode sofrer um desvio em sua trajetória.

Este desvio ocorre porque a luz, ao passar de um meio para o outro, propaga-se com velocidades diferentes. Você se lembra que a velocidade da luz era igual a c (300.000 Km/s) no vácuo e menor que c em qualquer outro meio?

Na figura a seguir, esquematizamos o que acontece com os raios de luz ao serem emitidos pelo bastão da figura 1:

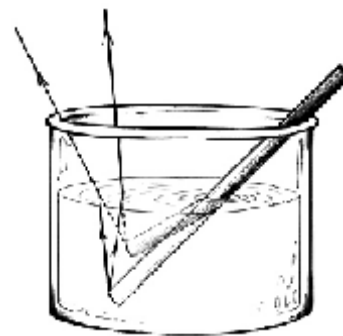


Figura 2.

Observe na figura que os raios, ao passarem da água para o ar, sofreram desvio em suas trajetórias antes de chegarem aos olhos do observador.

FIQUE ATENTO

Quando a luz sofre refração, é comum haver o desvio mostrado na figura 2. **Mas isso não é regra!!** É possível que a luz passe de um meio para o outro, ou seja sofra refração, sem que seja desviada. Isso ocorre quando o raio de luz incide perpendicularmente à superfície de separação (veremos, mais adiante, que neste caso o ângulo de incidência é zero e, conseqüentemente, o ângulo de refração é zero também).

Velocidade da luz e índice de refração

Podemos relacionar a velocidade da luz em vários meios com sua velocidade no vácuo através do **índice de refração**.

O **Índice de Refração** (n) de um meio é a razão entre a velocidade da luz no vácuo (c) e a velocidade da luz no meio (v). Assim,

$$n = \frac{c}{v}$$

ou

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}}$$



A reprodução total ou parcial deste material, por quaisquer meios e mídias, não é permitida, a não ser com autorização expressa e por escrito da Cooperativa do Saber.

Princípio de Fermat

A interpretação puramente geométrica dos fenômenos que ocorrem com a luz, sem a preocupação com a natureza da luz, baseia-se numa proposição do matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665). Esse princípio proposto por Fermat é o seguinte:

“O tempo gasto pela luz para ir de um ponto qualquer A até outro ponto qualquer B é o menor possível”.

Você já ouviu falar que a menor distância entre dois pontos é uma reta? Se os pontos A e B estiverem num mesmo meio (homogêneo), a trajetória de menor tempo será retilínea, ou seja, uma reta que ligue os pontos A e B. O que ocorre com a luz se os pontos A e B estiverem em meios com índices de refração diferentes? Já sabemos que a luz sofre um desvio em sua trajetória. Contudo, queremos saber como isso acontece! Para ilustrar esse problema, observe a figura a seguir:

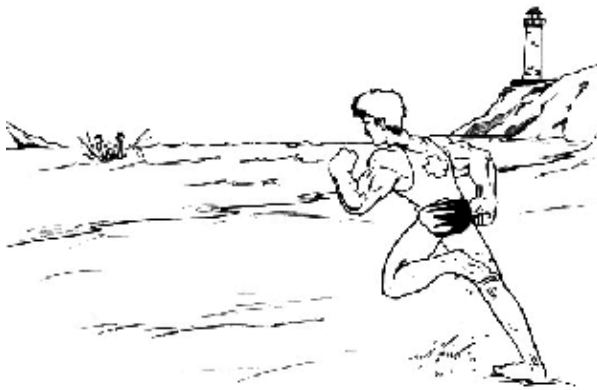


Figura 3. Um salva-vidas correndo para socorrer uma vítima.

Imagine que você é o salva-vidas da figura 3 e precisa salvar a pessoa que está no mar no menor tempo possível. Qual trajetória você escolheria para chegar o mais rápido possível até a vítima?

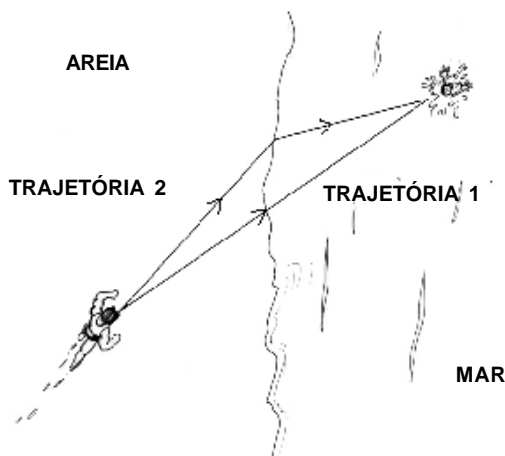


Figura 4: Trajetórias possíveis para o salvamento.

Ir retilineamente até a vítima segundo a trajetória 1 NÃO é o melhor caminho. Isso acontece porque na areia você tem uma velocidade maior do que na água. Assim, é melhor correr um pouco mais na areia porque sua velocidade será maior e deixar para depois entrar na água, ou seja, trajetória 2.

Com a luz acontece a mesma coisa: a luz propaga-se com velocidades diferentes em meios diferentes. Observe a figura 5 e verifique se existe alguma semelhança com o exemplo anterior.

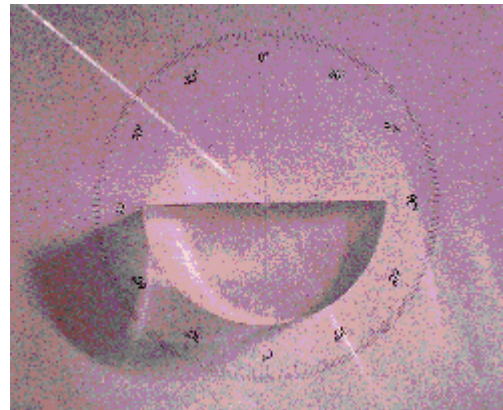


Figura 5. Um feixe de luz atravessando um objeto de vidro.

Lei de Snell

Ao longo da história, muitos cientistas perceberam que a refração era um fenômeno preciso e, portanto, deveria existir uma lei matemática que pudesse explicá-la. O egípcio Ptolomeu (90-168 d.C) chegou a descrever alguns casos, mas não conseguiu formular tal lei. Esse problema só foi solucionado em 1621, quando o matemático e astrônomo Willebrord Snell (1591-1626) propôs uma lei para explicar a refração. Em homenagem a ele, atualmente essa lei é conhecida como “Lei de Snell”.

Da mesma forma que estudamos os raios incidente e refletido para espelhos devemos agora conhecer alguns elementos para o caso da refração. Observe os elementos representados na figura a seguir:

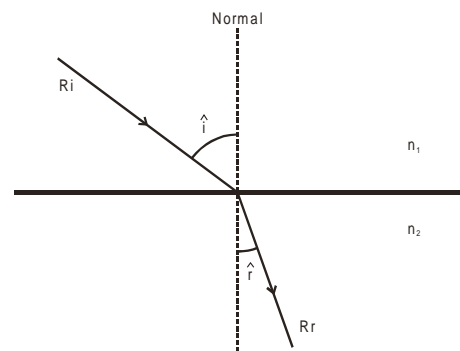


Figura 6. Refração de um raio de luz

Refração

Da figura 6 temos que:

- Ri: Raio Incidente
- Rr: Raio Refratado
- \hat{i} : ângulo de incidência
- \hat{r} : ângulo de refração
- n_1 e n_2 : índices de refração dos meios 1 e 2 respectivamente.

Com um experimento semelhante ao da figura 6 podemos obter o ângulo do raio refratado, \hat{r} , para vários ângulos de incidência, \hat{i} . Analisando um grande número de medidas de \hat{i} e \hat{r} podemos chegar a mesma conclusão que Snell chegou: a razão entre os senos dos ângulos de incidência e de refração é constante.

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \text{constante}$$

Quando a luz passa de um meio, cujo índice de refração é n_1 , para outro meio, cujo índice de refração é n_2 , temos sempre a seguinte relação:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r}$$

Essa é a Lei de Snell para a refração. O cientista e filósofo René Descartes(1596-1650) também chegou a essa lei separadamente de Snell. Entretanto, Snell a estabeleceu primeiro.

FIQUE ATENTO

1. Utilizando a relação entre o índice de refração do meio e a velocidade de propagação da luz, $n = \frac{c}{v}$, podemos chegar a uma outra equação para a Lei de Snell: $\frac{\sin \hat{i}}{v_1} = \frac{\sin \hat{r}}{v_2}$ onde v_1 e v_2 são as velocidades de propagação da luz nos meios 1 e 2, respectivamente.

2. O que acontece com o feixe de luz se o ângulo de incidência for igual a zero, ou seja, o feixe incidir paralelo à reta normal à superfície que separa o meio 1 do meio 2?

Pela Lei de Snell, teremos $0 = n_2 \cdot \sin(\hat{r})$. Como n_2 é diferente de zero, então $\sin(\hat{r}) = 0$. Portanto, concluímos que o feixe de luz não sofrerá desvio em sua trajetória, ou seja, $\hat{r} = 0$. Observe a figura a seguir:

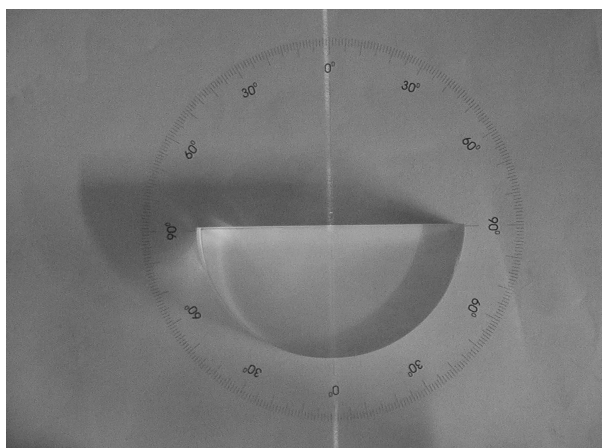


Figura 7. Feixe com ângulo de incidência $\hat{i} = 0$

3. Quando temos um meio 2 mais refringente que o meio 1 ($n_2 > n_1$), o raio refratado aproxima-se da normal à superfície no ponto de incidência. Isso significa dizer que o ângulo de refração é menor que o ângulo do raio incidente: $\hat{r} < \hat{i}$. Isto pode ser visto na seguinte análise:

Pela lei de Snell, $n_1 \cdot \sin \hat{i} = n_2 \cdot \sin \hat{r}$. Se $n_2 > n_1$ temos que ter $\sin \hat{r} < \sin \hat{i}$ para que a multiplicação do primeiro membro da lei de Snell seja igual à multiplicação do segundo membro. Sendo $\sin \hat{r} < \sin \hat{i}$, temos que $\hat{r} < \hat{i}$. Isto significa que o raio se **aproximará** da normal.

Se $n_2 < n_1$ (caso inverso), o raciocínio será análogo, e chegaremos à conclusão que, se o meio 2 é menos refringente que o meio 1, o raio refratado se **afastará** da normal.