



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – UNICAMP  
Instituto de Física “Gleb Wataghin” – IFGW  
RELATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO PARA O ENSINO – F 809

# *Espelhos Planos*

Agnaldo Antonio Batista – RA 961826 – [a961826@dac.unicamp.br](mailto:a961826@dac.unicamp.br)

## **RESUMO**

Tendo em vista as diversas aplicabilidades dos espelhos planos, é de considerável relevância o seu estudo e entendimento para os alunos de 2° e 3° grau. Com isto em mente, fazendo uso de sistemas ópticos tais como periscópio e gerador de cone de luz e não nos restringindo apenas ao caso bidimensional, tentamos mostrar como os feixes de luz são refletidos e as imagens são formadas.

## 1. Introdução

Parece algo normal e natural, mas imagine não poder ver com extrema facilidade a sua própria imagem igual ela de fato é. Imaginável não é mesmo. Mas isto só é possível graças a capacidade de certas superfícies planas refletirem os feixes de luz de uma forma perfeita para que isto pudesse ocorrer. Estamos falando do espelho, do qual apresentamos na Fig.1-1 um esboço de sua composição. Desde tempos bem remotos eles já são conhecidos pelos homens e sua aplicabilidade cotidiana bem reconhecida. Indo um pouco além disto, estudando-os podemos conhecer e pensar em novas formas de empregarmos-los. O periscópio, por exemplo, é extremamente útil para os submarinos observarem a superfície terrestre e a razão pela qual ele funciona facilmente explicável. Nesta linha de raciocínio é, portanto, interessante o estudo detalhado do processo a que está submetida uma reflexão em espelho plano, aprofundando ao máximo possível neste estudo de acordo com o grau de escolaridade do aluno.

Camadas de um espelho

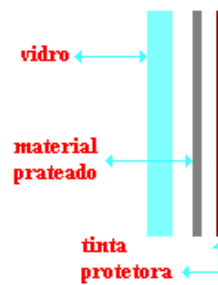


Fig.1-1 – Composição espelho plano.

### 1b. Aspectos históricos:

“Quais são os documentos que mostram o trabalho do homem por criar instrumentos ópticos? Fala-se dos espelhos chineses, que considero metálicos e, portanto, não muito lisos. Também, se diz dos gregos antigos e dos árabes, que já teriam tratados sobre a luz. Mas muito dificilmente se encontra uma menção aos espelhos americanos, que seriam mais antigos, pois surgiram pelos Incas há 4.000 anos, e que os Olmecas aprimoraram há 3.000 anos, dando superfície todo tipo de curvaturas.”

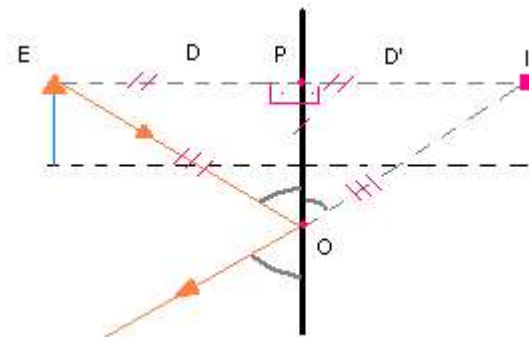


Pequenas esculturas Olmecas de figuras femininas usando espelhos no peito. A direita, embaixo, espelho Olmeca divergente de uns 5 cm de largura e que permite ver o rosto de uma pessoa .

O texto acima introduz a apresentação do artigo “Olmec mirrors: an example archaeological American mirrors”, publicado pelo professor da Unicamp Dr Lunazzi, no qual relata sua descoberta casual dos espelhos mais antigos produzidos pelo homem. É possível apreciar na íntegra o referido artigo no endereço abaixo mencionado. A foto que o referido professor registrou na época da descoberta é apresentada na Fig.1-2:

## 2. Espelho Plano no espaço bi-dimensional:

A experiência nos mostra que num feixe de luz ao colidir com um espelho que o reflete, o ângulo de incidência é igual ao de reflexão (conhecimentos à parte, esta observação é comprovada pela teoria eletromagnética da luz). A partir deste conceito é possível caracterizar um feixe qualquer que é refletido por um espelho plano. No caso bi-dimensional é bastante simples, basta usar conceitos de semelhanças de triângulo, conforme esquematizado na Fig.I-2.

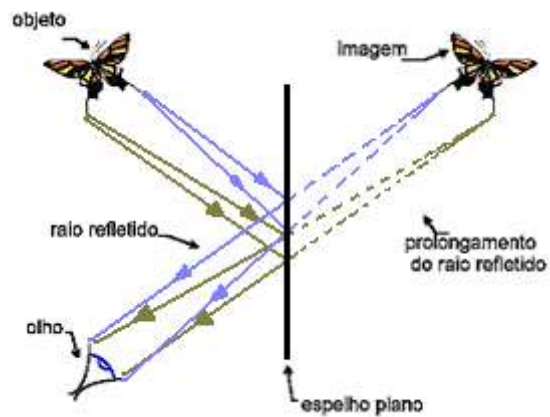


*Fig.II-1 – Caracterização do raio refletido no caso bi-dimensional.*

Da Fig.II-1, temos os triângulos EOP e o IOP, nos quais o lado OP é compartilhado por ambos. Devido a isto, ao ângulo de incidência ser igual ao de reflexão e tanto EP e IP serem perpendiculares ao plano do espelho, tais triângulos são semelhantes e disto implica que  $D=D'$ . Desta forma, conhecendo o ponto em que ocorre a colisão e que o feixe refletido deve passar pelo ponto I, é possível caracterizar o feixe refletido, geometricamente ou através da equação de uma reta.

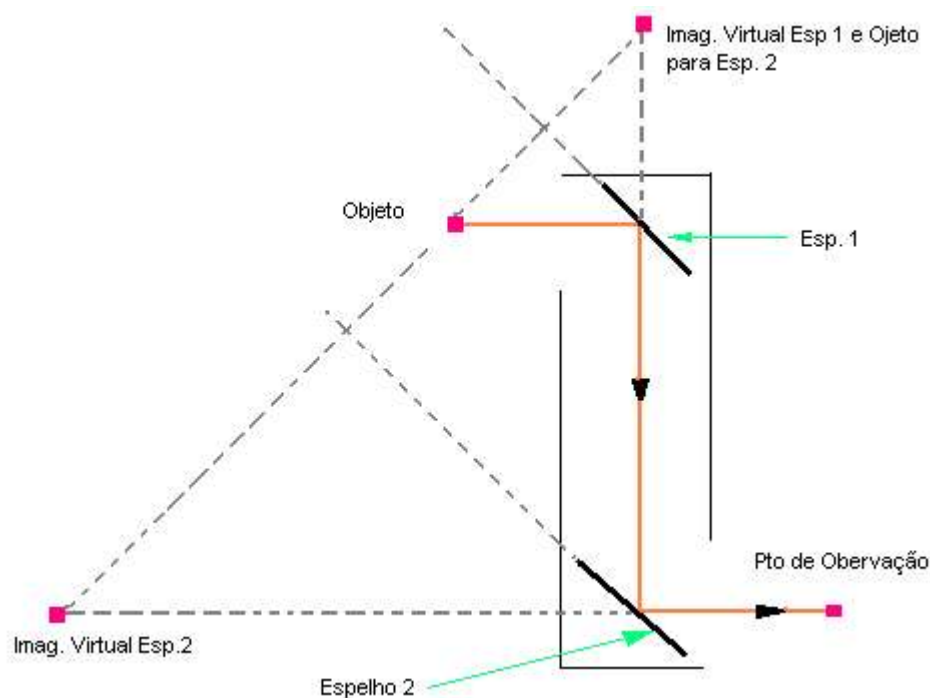
Continuando nossa análise ilustrada pela Fig.II-1, suponha que E seja um minúsculo ponto de um objeto macroscópico do qual emerge feixes cor de laranja em todas as direções, isto é, um ponto de convergência de raios e, portanto, um ponto que forma imagem. Como em nosso esquema para caracterizar o raio refletido a nossa conclusão de que  $D=D'$  não dependeu do ângulo  $\theta$ , temos que para qualquer raio que emerge de "E" e é refletido pelo espelho deve passar por I. Assim I também é um ponto de convergência de raios e, portanto, neste ponto se forma imagem. A ela damos o nome de imagem virtual, pois é formada a partir do prolongamento dos raios reais.

Isto, embora pareça muito óbvio, é de extrema importância para compreendermos e estudarmos imagens formadas em conjuntos de espelho planos. Mas antes, analisemos a Fig.II-2 que mostra uma borboleta sendo refletida num espelho plano. Ela pode ser considerada como sendo composta de milhares de pontos similares ao ponto "E" considerado na Fig.II-1, isto é, todas as considerações observadas anteriormente são aplicáveis aos diversos pontos que compõe a imagem da borboleta e, desta maneira, forma-se uma imagem virtual do outro lado do espelho a uma distância do mesmo igual a que se situa o objeto.



*Fig.II- 2 Formação de imagem em espelho plano*

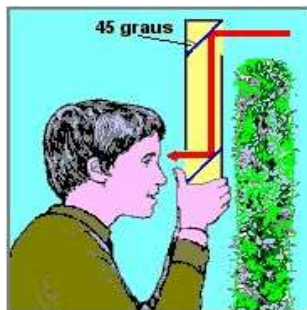
Continuando nosso estudo e usando os conhecimentos adquiridos até aqui, podemos pensar em agrupar mais que um espelho e formar um sistema óptico, um exemplo bastante interessante é o periscópio, o qual é esquematizado na Fig.II-3.



*Fig.II-3 Esquema de um periscópio.*

Como pode ser observado os espelho são paralelos e estão inclinados sob um ângulo de  $45^\circ$  em relação a horizontal. Assim, se os centros deles estão a uma distancia  $D$  um do outro, o feixe refletido está no ponto Imag. Virtual Esp. 2 e, portanto, é paralelo e está deslocado a uma distancia  $D$  em relação ao feixe incidente no espelho 1. Devido ao fato de podermos considerar qualquer objeto como um conjunto de milhares de pontinhos que emanam feixes luminosos em toda direção, considerando ainda que qualquer dos feixes deste pontinho refletido pelo espelho 1 tem de passar por Imag. Virtual Esp.1 e que ao ser refletido pelo espelho 2 tem de passar por

Imag. Virtual Esp. 2, afirmamos que é construída uma imagem neste local. Capacitando-nos ver através de um obstáculo, como sugere a Fig.II-4.



*Fig.II-4 Periscópio para ver através de obstáculos.*

### **MATERIAL**

1. Dois espelhos pequenos
2. Tesoura
3. Um pedaço triangular de cartolina
4. Uma embalagem longa vida vazia
5. Lápis

### **COMO FAZER**

1. Marque duas linhas diagonais em um dos lados da embalagem longa vida usando o triângulo de papel. Os dois lados devem ter o mesmo tamanho.
2. Vire a caixa e trace duas linhas na direção das outras duas e corte todas elas. Peça ajuda a um adulto.
3. Encaixe os espelho nas fendas. O espelho que você colocar na parte de cima tem que estar com o lado espelhado para baixo e o espelho que você colocar na parte baixo da caixa tem que estar com o lado espelhado para cima.
4. Trace um quadrado em frente ao espelho de cima e recorte.
5. Com um lápis, faça um pequeno furo no lado de trás da caixa, na mesma altura do espelho de baixo.
6. Agora olhe pelo furo.

### **O QUE ACONTECE**

Você consegue ver acima da linha dos olhos.

### **POR QUE ACONTECE?**

Porque a luz da imagem entra pela abertura de cima, atinge o espelho que manda a luz para o espelho de baixo. O espelho de baixo manda a luz para o furo no qual você vê a imagem.



*Fig.II-5 Como construir um periscópio.*

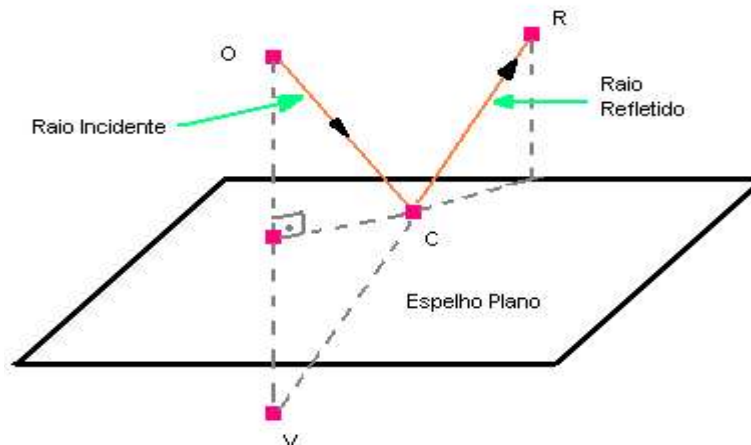
Esta propriedade é que os torna de considerável aplicabilidade em submarinos, pois, estando eles submersos à água necessitam ver por cima dela, o que é feito usando periscópios dotados de dispositivos de lentes esféricas, normalmente convergentes, que fazem com que a imagem situe-se a uma distância bem menor que a distância  $D$  mencionada anteriormente, caso contrário a imagem, conforme a profundidade em que se situa o submarino, poderia ficar muito distante e, conseqüentemente, não atenderia aos interesses.

É bastante simples construir um periscópio, para isto relacionamos uma receita indicada na Fig.II-5 :

Tudo que foi apresentado até aqui soa com bastante simplicidade, mas podemos fazer uma análise mais complexa sobre o assunto estudando-o no espaço tridimensional. Infelizmente muitas das ferramentas utilizadas estão fora do alcance dos alunos de 2º grau, seja porque eles ainda não a conhecem ou ainda não se familiarizaram com elas. Portanto o próximo tópico é destinado apenas aos alunos de 3º grau ou aqueles curiosos que tenham coragem de se aventurar. Para estes, ainda que não entendam por completo as passagens, fica o aprendizado de que tudo aquilo que se aprende no 2º grau é uma base para estudos mais complexos no 3º grau.

### 3. Espelhos Planos no Espaço tridimensional

Baseado na idéia de que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão, construímos, lembrando como funciona a reflexão no espaço bi-dimensional, o modelo mostrado na Fig.III-1 que representa o caso análogo no espaço tridimensional. Nele observamos um raio luminoso emergindo do ponto  $O$ , colidindo com o espelho no ponto  $C$  e sendo refletido para o ponto  $R$ . Como anteriormente, a direção do raio refletido é construída com  $V$ , por onde todos raios que emergem de  $O$  devem se orientar, e com o ponto de colisão no espelho, o ponto  $C$ .



*Fig.III-1 Reflexão em espelho planos no espaço tridimensional*

Então podemos concluir que os pontos  $O, V$  e  $C$  formam um plano, isto é, o raio incidente e o raio refletido estão no mesmo plano. Isto é de extrema importância para análise que vamos fazer.

A fig.III-2 introduz a nossa estratégia vetorial para estudarmos os raios refletidos no espaço tridimensional. Onde a partir das coordenadas do ponto de emissão do feixe, ponto de colisão do mesmo com o espelho e um ponto qualquer por onde passe o raio refletido, podemos construir os vetores abaixo:

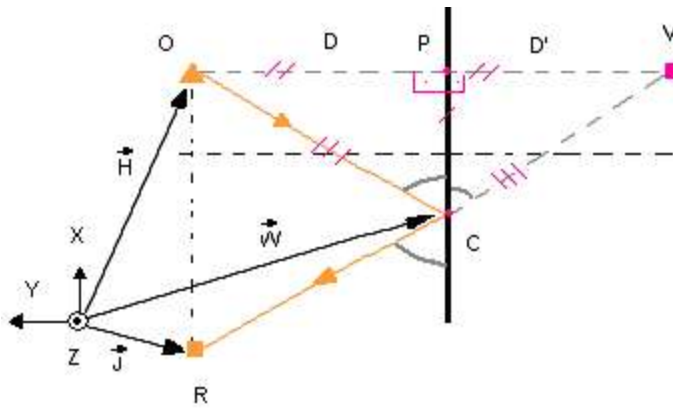


Fig.III-2 Análise vetorial dos raios incidente e refletido. O eixo z está saindo da folha.

A partir dos vetores  $\vec{H}$ ,  $\vec{W}$  e  $\vec{J}$  é possível construir o vetor  $\vec{I}$  do raio incidente e o vetor  $\vec{R}$  do raio refletido, pois:

$$\vec{I} = \vec{W} - \vec{H} \quad (1)$$

$$\vec{R} = \vec{J} - \vec{W} \quad (2)$$

Onde  $\vec{J}$  é o vetor que dá as coordenadas do ponto R;  $\vec{H}$  o vetor que dá as coordenadas do ponto O; e, finalmente,  $\vec{W}$  o vetor que é a coordenada de colisão do feixe com o espelho. Nosso problema fica muito mais fácil se fizermos o plano x-z do nosso sistema de coordenadas coincidir com a superfície do espelho e logo o eixo y será perpendicular ao mesmo. Desta forma  $\vec{W}$  é o vetor  $(W_x, 0, W_z)$ . Assim o vetor:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} -I_x \\ W_y - I_y \\ -I_z \end{pmatrix}.$$

Como o ângulo de incidência é igual ao de reflexão,  $\vec{R}$  pode ser escrito como sendo:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -I_x \\ I_y - W_y \\ -I_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Da análise da Fig.III-1, é só inverter a componente do vetor  $\vec{I}$  perpendicular ao plano do espelho. Dando seqüência à nossa análise, imaginamos agora dois sistemas de coordenadas, um fixo e outro que gira junto com o plano do espelho. Desta forma, a análise que fizemos anteriormente é válida para o sistema de coordenadas que gira junto com o espelho se o plano x-z

coincide com a superfície do mesmo. Para relacionarmos o sistema de coordena fixo como que gira, usamos uma equação matricial do tipo:

$$S = \lambda S'$$

onde  $S'$  é o sistema fixo e  $S$  o sistema que gira com o espelho, então  $\lambda$  é uma matriz que descreve a relação entre os dois sistemas e contém três ângulos independentes. Há muitas possibilidades de se escolher estes ângulos, mas neste caso escolheremos os ângulos de Euler, tal que as matrizes de rotação sejam:

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde estes ângulos são considerados de acordo com a Fig.III-3, isto é,  $\phi$  representa uma rotação em torno do eixo  $z$ ,  $\theta$  representa uma rotação em torno do eixo  $x$  e o ângulo  $\psi$  representa uma rotação em torno do eixo  $Z'$ , formado após a rotação anterior.

$$\lambda = \lambda_\phi \lambda_\theta \lambda_\psi \quad (7)$$

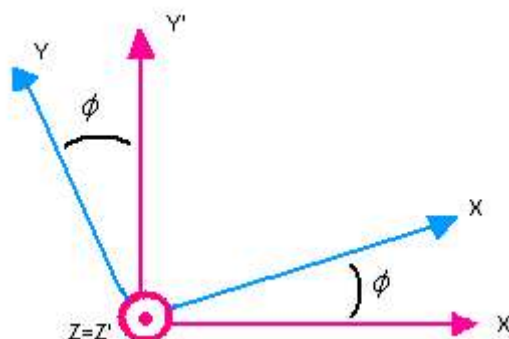


Fig.III-3-a Giro em torno do eixo Z.



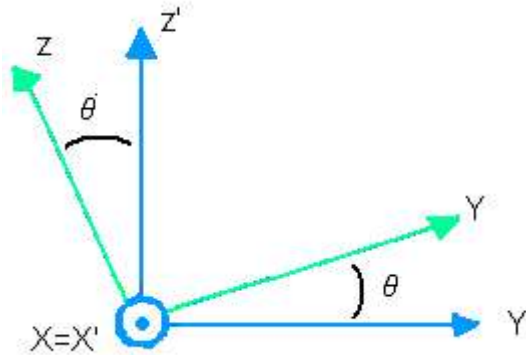


Fig.III-b Giro em torno do eixo X.

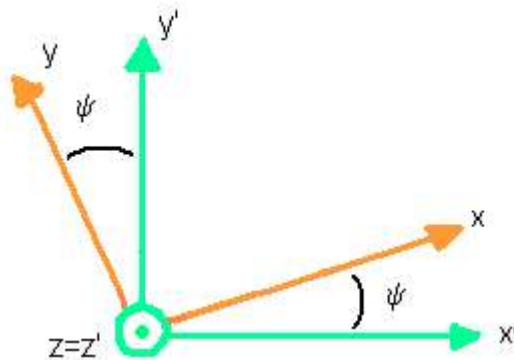


Fig.III-c Giro em torno do eixo Z'

Onde as cores vermelha, azul, verde e laranja representam, respectivamente, o sistema fixo, o sistema com a primeira rotação, o sistema com a segunda rotação e o sistema com a terceira rotação.

Resumidamente, então, para obtermos o vetor que representa o raio refletido em um referencial A, no qual o plano do espelho possui ângulos de Euler, devemos seguir as seguintes etapas:

- ✗ Criar um referencial B onde o plano do espelho coincida com o plano formado por dois versores do sistema de coordenadas deste referencial e, por consequência, a perpendicular ao plano coincida com o outro versor;
- ✗ Determinar os ângulos de Euler entre os sistemas de coordenadas dos referenciais A e B;
- ✗ Usar as matrizes de rotação para passar ao sistema de coordenada de B o vetor que caracteriza o raio incidente e que está inicialmente no referencial A;
- ✗ Utilizar a regra apresentada na Eq.(3), isto é, inverter a coordenada do vetor incidente que é perpendicular ao plano do espelho e desta forma obter o vetor que representa o raio refletido no sistema de coordenadas B;
- ✗ Transportar este vetor para o sistema de coordenadas do referencial A, utilizando a transformação matricial inversa;

A fim de elucidar estes conceitos, aplicamo-los na análise dos espelhos do periscópio. Para isto consideraremos apenas duas primeiras rotações, portanto temos que para qualquer vetor passado do sistema fixo para o móvel a seguinte relação:

$$\vec{S} = \lambda \vec{S}' = \begin{pmatrix} x \cos \phi + y \sin \phi \\ \cos \theta (-x \sin \phi + y \cos \phi) + z \sin \theta \\ \sin \theta (x \sin \phi - y \cos \phi) + z \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Imaginando um feixe horizontal, isto é, no referencial A, paralelo ao eixo Y, poderíamos pensar em:

$$\vec{I}_A = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Desta forma, considerando os dois sistemas de coordenadas sobrepostos, isto será válido para ambos, mas girando o espelho, então para o sistema que gira junto com ele, o referencial B, usando a equação (8), vamos ter que:

$$\vec{I}_B = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{W}_B = \lambda \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

Considerando que o espelho se encontra no plano z-x e a coordenada y é perpendicular ao plano, aplicando o raciocínio desenvolvido anteriormente, podemos determinar:

$$\vec{R}_B = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{W}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

A fim de passarmos estes vetores para o sistema de coordena fixo novamente, usamos a equação (3), só que agora no sentido inverso, isto é, os ângulos são negativos e primeiro fazemos a rotação dada pela equação (5) e depois a dada equação (4), desta forma:

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \phi (1 + \cos 2\theta) \\ \sin^2 \phi - \cos 2\theta \cos^2 \phi \\ -\sin 2\theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{W}_A = \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \cos \theta \\ -\cos \phi \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

Bom, assim podemos caracterizar um raio refletido no espaço e analisarmos a posição dos espelhos que constituem o periscópio. Primeiro pensamos em

$$\theta = 0 / \phi = 45^\circ$$

Neste caso o raio refletido no sistema de coordenadas fixo, referencial A, é dado pelo vetor:

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto está em concordância com tudo que foi apresentado até aqui e podemos verificar facilmente, iluminados pela Fig.III-3(a), que de fato, se um raio incidindo paralelo ao eixo Y colidisse com um espelho rotacionado a  $45^\circ$ , a direção do raio refletido estaria na direção do eixo X apenas.

Façamos uma análise parecida agora, mas considerando:

$$\theta = 45^\circ / \phi = 0^\circ$$

Neste o caso obteríamos:

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Novamente está coerente com que poderíamos prever, visto que, alicerçados na Fig.III-(b), podemos ver facilmente que um raio na horizontal incidindo no espelho rotacionado de  $45^\circ$  em relação ao eixo z, resultaria num feixe nesta direção no sentido negativo.

Na Fig.II-3, se considerarmos o eixo z como sendo a linha vertical, o eixo y como sendo o horizontal e o eixo x saindo da folha. Então podemos fazer uma analogia deste último caso com o periscópio. Isto explica, usando a idéia vetorial, o porquê dos raios traçados na Fig.II-3. Indo um pouco além, podemos responder o que acontece, ainda, com relação ao periscópio esboçado nesta figura, se girarmos o primeiro espelho com os ângulos:

$$\theta = 45^\circ / \phi = 45^\circ$$

Neste caso teríamos o vetor:

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Portanto o raio refletido não encontraria o segundo espelho e não obteríamos, no ponto de observação, nenhuma imagem do objeto. Se continuarmos a fazer uso desta ferramenta matemática, vamos ver que a imagem num único espelho plano é invertida, isto é, o lado direito vira esquerdo e vice-versa, já no esquema do periscópio isto não ocorre porque o primeiro espelho inverte a imagem e o segundo a inverte novamente e a deixa como ela era inicialmente.

#### 4. Cone de Luz:

Agora iremos para algo mais complexo, aplicamos estes conceitos ao cone de luz, cujo esboço apresentamos na Fig.IV-1, a fim de explicar a figura que os raios refletidos formam quando projetados num anteparo a uma distância  $D$  do espelho do cone de luz.

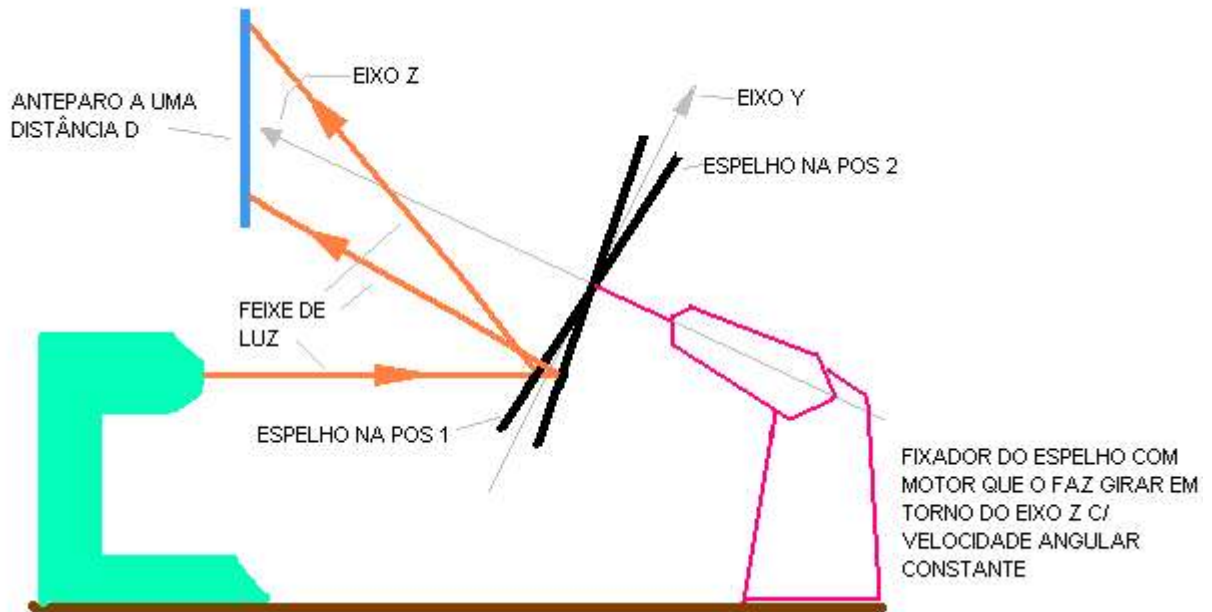


Fig.IV-1 Esquemática de um cone de luz, onde é mostrado o espelho em duas posições distintas, a primeira com o ângulo de Euler  $\phi = 0$  e a segunda com este ângulo  $\phi = 180^\circ$ , conseqüentemente, temos duas direções para os raios refletidos.

O anteparo apresentado acima é basicamente constituído de uma fonte da qual emerge um feixe de luz na horizontal, este feixe colide com um espelho plano girando em torno de um eixo, o qual fazemos coincidir com o eixo  $z$  do referencial a que damos o nome de B, que forma um ângulo  $\tau$  com a sua perpendicular. O referido ângulo é pequeno de forma que podemos usar aproximações para seu seno e cosseno. Além disso, por simplicidade matemática, escolhemos o ângulo em que o eixo  $y$  do mencionado referencial B faz com a horizontal da Fig.IV-1 como sendo igual a  $\Psi = 90 - \theta$ . A partir desta horizontal construímos o referencial A de forma que com ela coincida o eixo  $y$  de um sistema de coordenada cuja origem coincide com sistema de coordenadas do referencial B. A esquematização deste referenciais é representada na Fig.IV-2.

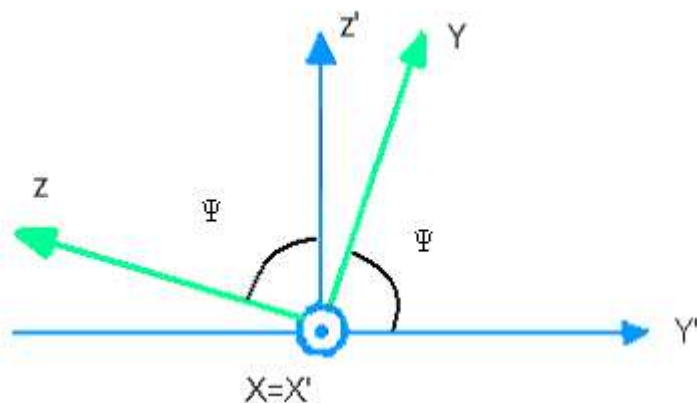


Fig.IV-2 O vetor incidente coincide com o eixo  $y'$  e, portanto, tem componente  $y$  e  $z$  no sistema de coordenada da Fig.IV-1.

Para resumir nossa estratégia de resolução do problema, mencionamos abaixo tópicos relevantes da mesma:

✘ Para caracterizarmos o raio refletido usando as conclusões extraídas da Fig.III-1, precisamos de um terceiro referencial, ao qual damos o nome de C e deve ser fixo com o espelho. Para este caso, contrariamente ao empregado anteriormente, usamos o eixo z do sistema de coordenadas deste referencial C como sendo perpendicular ao plano do espelho;

✘ O ângulo de Euler  $\phi$  entre o referencial B e C varia constantemente com o tempo;

✘ Esta variação é bastante rápida, de forma que os raios refletidos possam constituir uma figura para os nossos olhos;

✘ Como o ângulo  $\Gamma$  é pequeno, pode-se, numa aproximação bastante boa, considerar que o ponto em que o feixe de luz colide com o espelho é constante e é igual ao ponto em que cruzaria com o espelho se o sistema de coordenada fixo, referencial B, e o móvel com o espelho, referencial C, estivessem sobrepostos, isto é, os ângulos de Euler,  $\phi$  e  $\theta$  fossem iguais a zero;

✘ A análise matemática é feita sobre a mesma ótica anterior, só que agora o plano do espelho coincide com o plano x-y e o vetor do feixe incidente é da forma  $(I_x, I_y, I_z)$ , ou seja, possui coordenadas x, y e z. Além disso, temos mais um referencial, no caso o referencial A em que o feixe incidente possui coordenadas apenas no eixo y, desta forma temos três referencias para estudarmos o problema:

✘ Deduzimos primeiramente uma fórmula que possibilite, conhecendo o vetor incidente no referencial B, obter no mesmo referencial o vetor refletido. O que é feito, como anteriormente, passando este vetor para o referencial C e aplicando as leis de reflexão validas neste referencial para obtenção do raio refletido, em seguida passamos este vetor obtido para o referencial B. Observamos novamente que para estas mudanças de referencial usamos nas matrizes de rotação os ângulo de Euler. Tentamos apresentar abaixo todas passagens destes cálculos:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x_B} \\ I_{y_B} \\ I_{z_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \cos\phi + I_y \sin\phi \\ -I_x \sin\phi + I_y \cos\phi \\ I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \cos\phi + I_y \sin\phi \\ -I_x \sin\phi \cos\theta + I_y \cos\phi \cos\theta + I_z \sin\theta \\ I_z \cos\theta + I_x \sin\phi \sin\theta - I_y \cos\phi \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x_C} \\ I_{y_C} \\ I_{z_C} \end{pmatrix}$$

Este último vetor é a representação do vetor incidente no sistema de coordenada do espelho, então, como tínhamos sugerido anteriormente iluminados pela Fig.III-1 e Fig.III-2, para acharmos o vetor que representa a direção do feixe refletido, basta inverter a coordenada do vetor incidente no sistema de coordenada fixo no espelho, logo podemos escrevê-lo como sendo:

$$\begin{pmatrix} R_{x_C} \\ R_{y_C} \\ R_{z_C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \cos\phi + I_y \sin\phi \\ -I_x \sin\phi \cos\theta + I_y \cos\phi \cos\theta + I_z \sin\theta \\ -I_z \cos\theta - I_x \sin\phi \sin\theta + I_y \cos\phi \sin\theta \end{pmatrix}$$

Agora para obtermos este vetor no sistema de coordenadas inicial, basta fazermos as inversas destas transformações, como segue abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx_C \\ Ry_C \\ Rz_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ix \cos\phi + Iy \sin\phi \\ -Ix \sin\phi \cos 2\theta + Iy \cos\phi \cos 2\theta + Iz \sin 2\theta \\ -Ix \sin\phi \sin 2\theta + Iy \cos\phi \sin 2\theta - Iz \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx' \\ Ry' \\ Rz' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx' \\ Ry' \\ Rz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ix(\cos^2\phi + \sin^2\phi \cos 2\theta) + Iy 2 \sin^2\theta \cos\phi \sin\phi - Iz \sin\phi \sin 2\theta \\ Ix 2 \sin\phi \cos\phi \sin^2\theta + Iy(\sin^2\phi + \cos^2\phi \cos 2\theta) + Iz \cos\phi \sin 2\theta \\ + Ix \sin\phi \sin 2\theta + Iy \cos\phi \sin 2\theta - Iz \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx_B \\ Ry_B \\ Rz_B \end{pmatrix} \quad (15)$$

O vetor encontrado na equação (15) representa a direção do vetor refletido pelo espelho em função de um vetor incidente qualquer que colide com ele. Inicialmente havíamos feitos estes cálculos sem explicitar as passagens e também considerando um vetor incidente com apenas uma das coordenadas. Desta vez além de considerarmos um vetor incidente com três coordenadas, ainda, em função do nosso problema do cone de luz, fizemos, no sistema de coordenada móvel com o espelho, o eixo perpendicular ao mesmo ser o eixo z.

✘ Agora aplicamos na equação (15) o vetor do nosso problema, como comentamos o mesmo só tem coordenadas no eixo y do referencial A, logo com relação a nossa definição anterior:

$$\begin{pmatrix} Ix_B \\ Iy_B \\ Iz_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Psi \\ \sin\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Aplicando este resultado na equação (15), obtemos o seguinte vetor que representa a direção do raio refletido pelo espelho em função do ângulo  $\phi$  em que ele se encontra num determinado instante t:

$$\begin{pmatrix} Rx_B \\ Ry_B \\ Rz_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin^3\theta \cos\phi \sin\phi - \cos\theta \sin 2\theta \sin\phi \\ \sin\theta (\sin^2\phi + \cos 2\theta \cos^2\phi) + \cos\theta \sin 2\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin 2\theta \cos\phi - \cos\theta \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Fazendo simplificações, considerando as aproximações pelo fato do ângulo  $\theta$  ser pequeno e transformando este vetor para o referencial A, temos:

$$Rx_A = 2 \sin^3\theta \cos\phi \sin\phi - \cos\theta \sin 2\theta \sin\phi \cong -\cos\theta \sin 2\theta \sin\phi \cong -2\theta \sin\phi$$

$$\begin{aligned} Ry_A &= Ry_B \sin\theta - Rz_B \theta = \sin^2\theta (\sin^2\phi + \cos 2\theta \cos^2\phi) + \sin\theta \sin 2\theta \cos\phi - \\ &\cos\theta \sin\theta \sin 2\theta \cos\phi + \cos^2\theta \cos 2\theta = \sin^2\theta (\sin^2\phi + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cos^2\phi) + \cos^2\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= -\sin^4\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \sin^2\theta \cos^2\theta \cos^2\phi + \cos^4\theta - \cos^2\theta \sin^2\theta \\ &= -\sin^2\theta \cos^2\theta (1 - \cos^2\phi) + \cos^4\theta - \sin^4\theta \cos^2\phi \\ &= -\sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^4\theta - \sin^4\theta \cos^2\phi \\ &= +\sin^4\theta \sin^2\phi - \sin^4\theta \cos^2\phi + \cos^4\theta \\ &\cong \cos^4\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rz_A &= Ry_B \cos\theta + Rz_B \sin\theta \\
&= \cos\theta \sin\theta (\sin^2 \phi + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos^2 \phi) + \cos^2 \theta \sin 2\theta \cos \phi + \sin^2 \theta \sin 2\theta \cos \phi \\
&\quad - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos\theta \sin\theta \\
&= \cos\theta \sin\theta \sin^2 \phi + \cos^3 \theta \sin\theta \cos^2 \phi - \sin^3 \theta \cos\theta \cos^2 \phi - \sin^3 \theta \cos\theta \cos^2 \phi + 2\sin\theta \cos\theta \cos \phi \\
&\quad - \cos^3 \theta \sin\theta + \sin^3 \theta \cos\theta \\
&= \cos^3 \theta \sin\theta \sin^2 \phi + \sin^3 \theta \cos\theta \sin^2 \phi + \cos\theta \sin\theta \sin^2 \phi + 2\cos\theta \sin\theta \cos \phi \\
&\cong 2\theta \cos \phi
\end{aligned}$$

Voltando à equação (2), podemos escrever a equação da reta de um feixe refletido pelo espelho, mas antes é necessário encontrarmos o vetor:

$$\begin{pmatrix} Wx \\ Wy \\ Wz \end{pmatrix}$$

Ou seja, o vetor posição do ponto em que o feixe colide com o espelho. Como consideramos o ângulo  $\theta$  pequeno, podemos fazer a aproximação de que o feixe sempre colide num único ponto. Na realidade isto não é verdade e podemos comprová-lo observando a Fig.IV-1, na qual quando o espelho se encontra na posição 1 o feixe colide numa coordenada diferente de quando ele se encontra numa posição 2. Para minimizar o erro que esta aproximação produz, consideramos o ângulo médio da maior discrepância entre a posição 1 e 2, as quais, ocorrem quando  $\phi=0$ , posição 1, e  $\phi=\pi$ , posição 2, nestas condições esta posição pode ser obtida como sendo o ponto em que o feixe colide com o espelho se o ângulo  $\theta=0$ . Note que desta forma a equação (15), corretamente, seria independente do ângulo  $\phi$  e representaria um espelho plano bi-dimensional, como aquele estudado na Fig.II-1. Então considerando esta aproximação e as considerações anteriores, este vetor no sistema de coordenadas fixo ao espelho sem o mesmo girar pode ser escrito como sendo:

$$\begin{pmatrix} Wx_B \\ Wy_B \\ Wz_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todavia este vetor passado para o sistema de coordenada do referencial A, temos:

$$\begin{pmatrix} Wx_A \\ Wy_A \\ Wz_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Desta forma é possível localizar qualquer ponto no espaço em que o raio refletido possa habitar, para isto usamos a equação (2) e introduzimos, através de um parâmetro P, um vetor paralelo ao encontrado pela equação (16), permitindo que o vetor que caracteriza o raio refletido possa ter uma norma qualquer, a fim de localizar uma coordenada num lugar específico, então:

$$\begin{pmatrix} Jx_A \\ Jy_A \\ Jz_A \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -2\theta \sin \phi \\ \cos^4 \theta \\ 2\theta \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Eq.(16)}$$

✘ Imaginando um anteparo situado a uma distância horizontal D do espelho e, por consequência, da origem do sistema de coordenada. Além disso sendo  $D \gg$  que todas as grandezas consideradas no espelho e fazendo aproximações plausíveis, temos:

$$D = P \cos^4 \theta - \text{sen} \theta \Rightarrow P \cong \frac{D}{\cos^4 \theta}$$

Desta forma a equação (16), que representada a reta no espaço tridimensional formada pelos raios refletidos, produz o seguinte conjunto de pontos no plano (x, D, z), isto é, o plano x, z deslocado a uma distância D da origem:

$$\begin{pmatrix} Jx_A \\ Jy_A \\ Jz_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\theta \left( \frac{D}{\cos^4 \theta} \right) \text{sen} \phi \\ D \\ 2\theta \left( \frac{D}{\cos^4 \theta} \right) \text{cos} \phi \end{pmatrix} \quad \text{Eq.(17)}$$

Lembrando da equação do círculo em coordenadas polares:

$$X = R \cos \lambda$$

$$Y = R \text{sen} \lambda$$

Então, desde de que:

$$R = 2\theta \left( \frac{D}{\cos^4 \theta} \right) \cong 2\theta D$$

$$\lambda = -\phi$$

A equação (17) representa a equação de um círculo no plano x, z. Logo a figura que se forma no anteparo é um círculo, ou seja, o espelho girando numa velocidade adequada reflete raios que ao colidirem com o anteparo formam um círculo para nossos olhos.

## 5. Conclusão Final:

Esperamos que com este trabalho tenhamos possibilitado aos alunos de maneira geral uma boa compreensão a respeito de reflexões em espelhos planos. Principalmente no que se refere à proposta que empregamos para estudar o assunto, à qual atribuímos exagerada atenção para que a mesma pudesse ser o mais didática possível. Pois há muitas analogias interessantes que podem ser feitas com os argumentos que empregamos.

## 5.Referências:

[David J. Griffiths book](#) - Introduction to Electrodynamics

Dynamics of particles and systems, **Marion & Thornton**

Qualquer Livro de Matemática Básica.

<http://www.tvcultura.com.br/x-tudo/experiencia/16/periscopio.htm>

[http://www.geocities.com/prof\\_lunazzi/Olmecas/Olmecas\\_ICO.pdf](http://www.geocities.com/prof_lunazzi/Olmecas/Olmecas_ICO.pdf)