

Tampão

O fenômeno a ser investigado é o de oscilação em um tanque preenchido com água e que ao colocarmos uma bolinha e retirarmos o tampão deste, a bolinha começa a oscilar. Em nosso estudo prévio, vimos como se dá um movimento de oscilação na água, fizemos uma aproximação para resolvermos o problema analiticamente e vemos em quais condições e do que depende a oscilação da bolinha na água. Por fim, realizamos uma simulação com o programa *Mathematica 5.0*, confirmando o modelo adotado para a resolução do problema.

Introdução:

Uma das formas de se analisar este problema é através da mecânica de fluidos. No entanto, apesar de apresentarmos aqui um estudo de mecânica dos fluidos, a resolução por nós proposta não baseia-se nesse método, porém, como achamos importante o conhecimento de uma outra forma de se analisar o problema, a relataremos sem mais detalhes.

Em 1738 o cientista Daniel Bernoulli publicou em seu livro, o Tratado de Hidrodinâmica, a dedução do teorema que leva seu nome - e que exprime, no fundo, a conservação da energia mecânica nos fluidos ideais, afirmando que, em qualquer ponto do fluido, há uma relação constante entre três grandezas: velocidade, pressão e energia potencial do fluido. É um dos princípios fundamentais da mecânica dos fluidos, uma vez que, com algumas correções (considerando-se a compressibilidade e a viscosidade dos fluidos reais), pode, ser aplicado ao movimento de qualquer tipo de fluido. Acima de tudo, ele permite calcular a velocidade de um fluido medindo-se as variações de pressão (a diminuição de velocidade provoca o aumento de pressão e vice versa).

Partindo da idéia da conservação da energia mecânica - característica encontrada mesmo em um líquido isento de forças viscosas - Bernoulli mostrou que, em igualdade de nível, há uma diferença de pressões devida à diferente velocidade de escoamento nos vários pontos de um fluido. Por exemplo, num dado ponto do fluido, no qual este último esteja em repouso, a pressão aí será maior, pois está associada a uma forma de energia

potencial, ao passo que num outro ponto onde o fluido se move rapidamente a pressão é menor, pois nessa posição a velocidade do fluido corresponde a uma dose de energia cinética. Dado que a energia total é a mesma em todos os pontos do filete líquido, nos pontos de maior energia cinética a pressão é menor e vice-versa.

Ao longo de um fluido, há uma estratificação da densidade deste, a qual é responsável pela ocorrência de oscilações em neste. Devido a essa oscilação temos uma força restauradora, o empuxo. É esta força restauradora que será responsável, caso coloquemos um corpo (uma esfera) , pelo movimento oscilatório deste, pois devido às oscilações que ocorrem no fluido, o corpo será atado pra a vazão, porém devido à força restauradora, este entra em um movimento oscilatório, o qual objetivamos saber em que condições este ocorre.

Apresentaremos aqui um estudo sobre como se dá a oscilação num fluido, e como funciona a força restauradora deste, o empuxo, mas sem colocarmos um corpo neste, pois a resolução do nosso problema se dará de uma outra forma.

Equações governantes para um fluido incompressível :

Iremos montar um sistema de equações que governam o movimento de onda, já que queremos ter uma oscilação, em um fluido incompressível. As coordenadas cartesianas x, y, e z serão utilizadas, com z medida verticalmente em sentido ascendente. Os componentes de velocidade nas direções crescentes x, y e z serão estipuladas como u, v e w. A partícula de fluido precisa satisfazer a seguinte equação de continuidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

e as equações de momento:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \quad (4)$$

onde ρ e p são, respectivamente, a densidade do fluido e da pressão.

Para um fluido incompressível a densidade ρ satisfaz a equação de densidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (5)$$

Supondo que as velocidades sejam pequenas, podemos linearizar as equações de momento para obter:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \quad (8)$$

Em seguida, consideramos que o movimento de onda resulta da perturbação de um estado de equilíbrio, que é o estado de repouso. Portanto, a distribuição de densidade e de pressão é a distribuição do equilíbrio hidrostático dada por:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -g\bar{\rho} \quad (9)$$

Quando o movimento ocorre, a densidade e a pressão mudam para:

$$P = \bar{p}(z) + p' \quad (10)$$

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho' \quad (11)$$

onde p' e ρ' são, respectivamente as perturbações de pressão e densidade do estado de “fundo” no qual a densidade $\bar{\rho}$ e \bar{p} estão em equilíbrio hidrostático. A equação de densidade assume agora a fórmula:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \omega \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \omega \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Os termos não-lineares $u \frac{\partial \rho'}{\partial x}$, $v \frac{\partial \rho'}{\partial y}$ e $\omega \frac{\partial \rho'}{\partial z}$ são insignificantes para um pequeno movimento de amplitude, então a equação (12) é simplificada para :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \omega \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

a qual afirma que a perturbação de densidade em um ponto é gerada pela advecção vertical da distribuição da densidade de fundo. A equação de continuidade (1) e (5) para o fluido incompressível permanece a mesma, mas as de momento (6), (7) e (8) assumem a fórmula:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = - \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \quad (15)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} - g \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (16)$$

Gostaríamos de reduzir este sistema de equações para uma equação diferencial parcial simples. Isto pode ser conseguido da seguinte forma: primeiro, tomamos o derivativo de tempo da equação de continuidade para obter:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial z} = 0 \quad (17)$$

Segundo, tomamos o derivativo x, y e t , respectivamente, das equações(14), (15) e (16) , e obtemos:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} - g \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (20)$$

Se substituirmos as equações (18) e (19) pela equação (17), obtemos:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial z} = 0 \quad (21)$$

Pode eliminar p' da equação (20) usando a equação(13) para obter:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} - g \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (22)$$

Terceiro, aplicamos o operador $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ à equação (22) para obter:

$$\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

Em seguida, usamos a equação (21) para eliminar p' da equação (23), que proporciona a seguinte equação diferencial parcial para w:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\rho \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (24)$$

onde definimos

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad (25)$$

que possui as unidades de frequência (rad/s) e é chamado de frequência Brunt-Väisälä ou frequência de empuxo. Se supormos que w se altera com z muito mais rápido que $\bar{\rho}(z)$, então:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega \sim \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \quad (26)$$

e (24) pode ser aproximada pela equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (27)$$

A premissa acima é equivalente a aproximação de Boussinesq, que se aplica quando o movimento possui escala vertical comparada à escala de densidade de fundo. Ela consiste em tomar a densidade para ser constante no cálculo da velocidade de mudança do momento a partir das acelerações, porém levando totalmente em consideração as variações de densidade quando elas se originam das forças de flutuação, ou seja, quando houver um fator de multiplicação g no componente vertical das equações de momento. A aproximação de Boussinesq leva à equação (27) para a velocidade vertical w .

Frequência de Empuxo (Frequência Brunt-Väisälä):

Considere um fluido parado, com distribuição de densidade estática $\bar{\rho}(z)$ que diminui com a altura z . Se uma parcela do fluido é movida do nível z acima de $z + \zeta$, ela é cercada por um fluido de densidade mais leve $\bar{\rho}(z + \zeta)$. A força de flutuação que ascende por unidade de volume é

$$g[\bar{\rho}(z + \zeta) - \bar{\rho}(z)] \approx g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \zeta \quad (28)$$

e é negativa. Aplicando a Lei de Newton à parcela de fluido da unidade de volume, temos:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \zeta \quad (29)$$

a qual é chamada frequência de empuxo ou frequência Brunt-Väisälä. a partir desta condição podemos mostrar que toda vez que um fluido é deslocado de sua posição de equilíbrio, o gradiente de gravidade e de velocidade gera uma força restauradora para permitir oscilações.

Minha resolução

Visto a partir da análise feita acima que a oscilação em um fluido é possível, começaremos agora a resolução do nosso problema. Apesar de citado acima uma das formas de se resolver este problema, devido a muitas aproximações que deveriam ser feitas, optamos por um outro modo de resolvê-lo, ainda com bastante aproximações, porém de mais fácil resolução.

Seja uma esfera maciça de massa m_B , a qual flutua em um fluido de densidade ρ , temos agindo sobre esta duas forças, na condição estática:

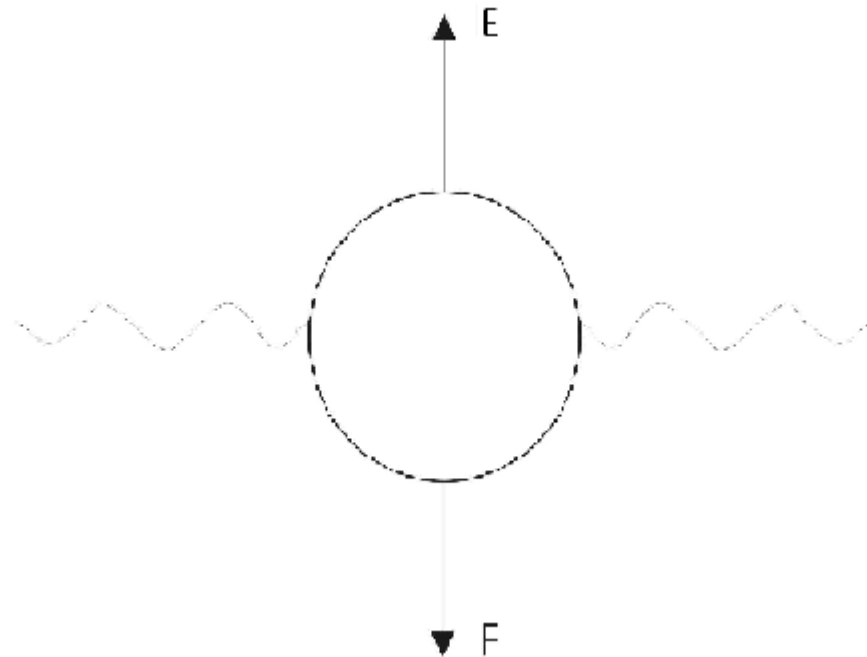


Fig. 1: Esquema das forças que atuam sobre a esfera no caso estático.

Nessas condições, levando-se em conta que a direção adotada é a vertical para cima, nosso empuxo será dado por:

$$E = - m_B g V(r_B) \quad (30)$$

Precisamos portanto, descobrir que força F é esta que está a agir sobre a nossa esfera.

Primeira aproximação:

Para facilitar o cálculo da força, comparamos a situação estabelecida pelo problema, no caso dinâmico (onde a esfera está em movimento oscilatório) com o caso de um disco elétrico, pois como no caso do disco elétrico, existem linhas de força que atuam sobre a esfera e que geram um campo sobre o disco, no nosso caso, sobre o orifício de vazão .

A primeira análise a ser realizada é com uma carga de prova para que possamos calcular o campo do disco em função da distância da carga (z).

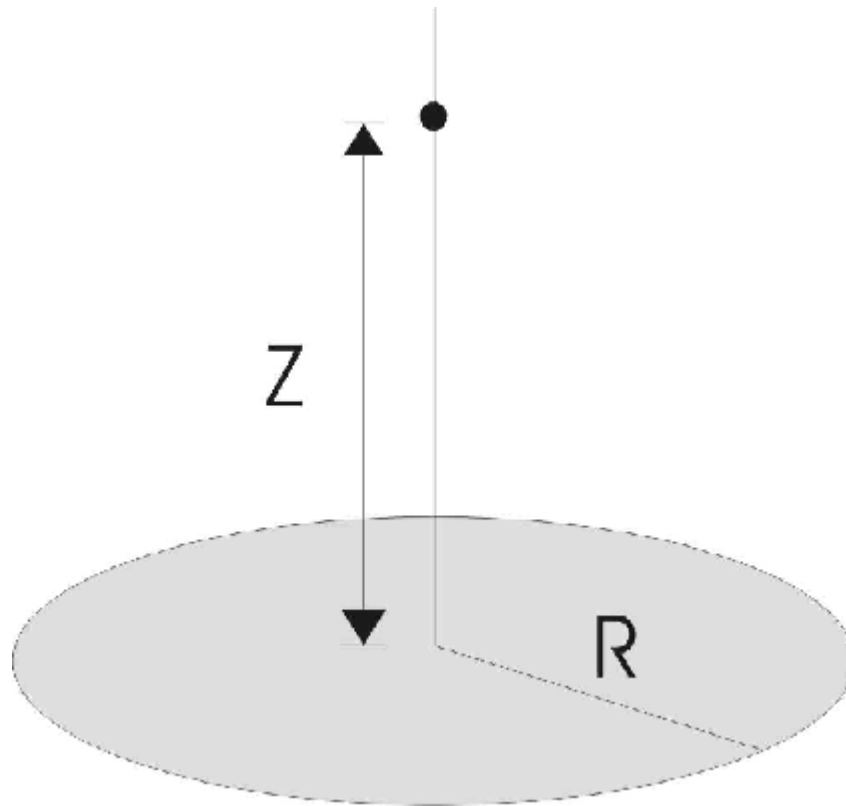


Fig. 2: Esquema de uma carga de prova a uma distância z muito grande do disco.

$$dF_z = \frac{kzr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \quad (31)$$

Trazendo para o nosso problema, o disco representa o orifício pelo qual ocorre a vazão do fluido, e o campo calculado será o da pressão que passa através do orifício.

Sabendo que conforme a vazão ocorre, a pressão na esfera aumenta, puxando-a para baixo, e que quanto mais ela desce maior fica o empuxo, que a puxa para cima novamente, já podemos caracterizar assim o movimento oscilatório do sistema, devemos fazer mais algumas aproximações antes de prosseguirmos com os nossos cálculos.

Segunda aproximação:

Desprezando as linhas de força que contornam a esfera e consideramos apenas aquelas que não entram em contato com a esfera.

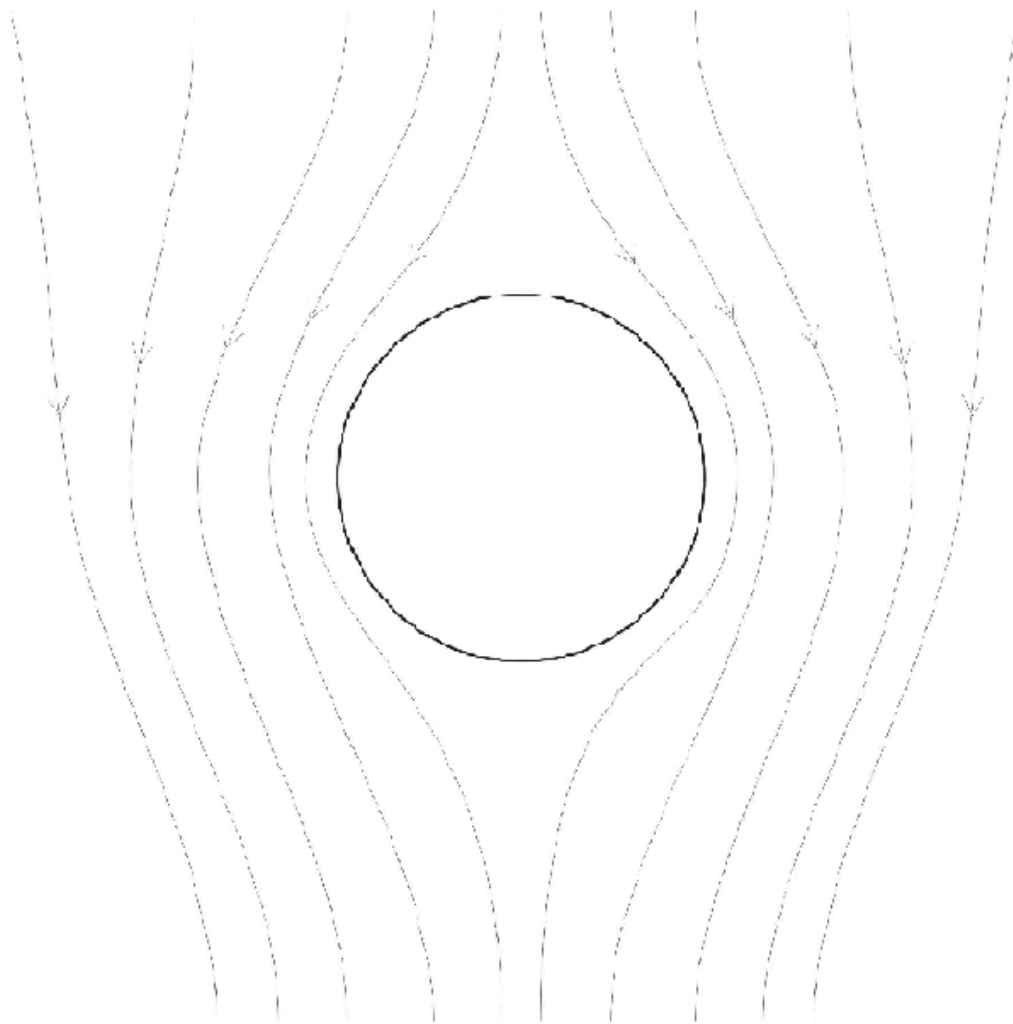


Fig 3: Esquema das linhas de força do fluido sobre a esfera.

Podemos dizer, segundo a análise feita acima, que conforme a esfera desce, as linhas de força que passam através do orifício diminuem, pois são barradas pela esfera, diminuindo assim a área de vazão.

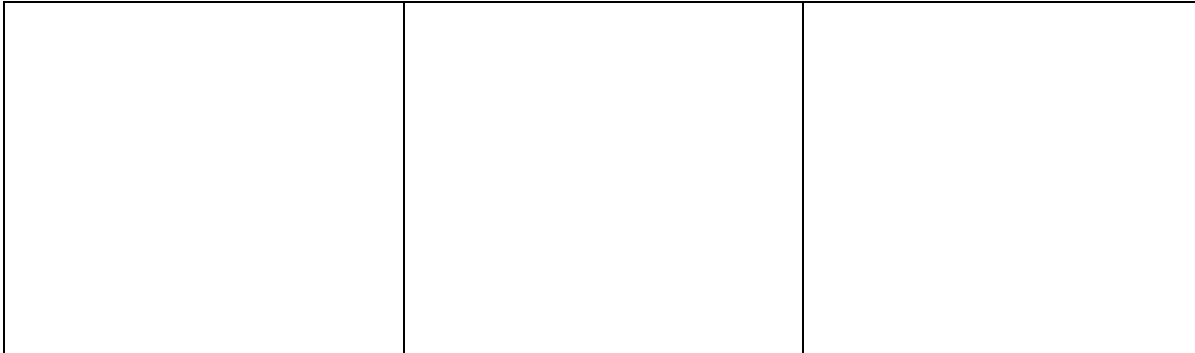


Fig 4: Esquema demonstrando a diminuição da área de vazão conforme z diminui.

Terceira aproximação:

Como podemos ver na Fig 4, conforme a distância entre a esfera e o orifício de vazão (z) diminuem, diminuem também as linhas de pressão. Para facilitar o cálculo do campo formado por essas linhas de força em função de z , faremos a seguinte aproximação, transformaremos as linhas de força em retas, que conforme z aumenta, ou diminui, mudam de coeficiente angular e linear.

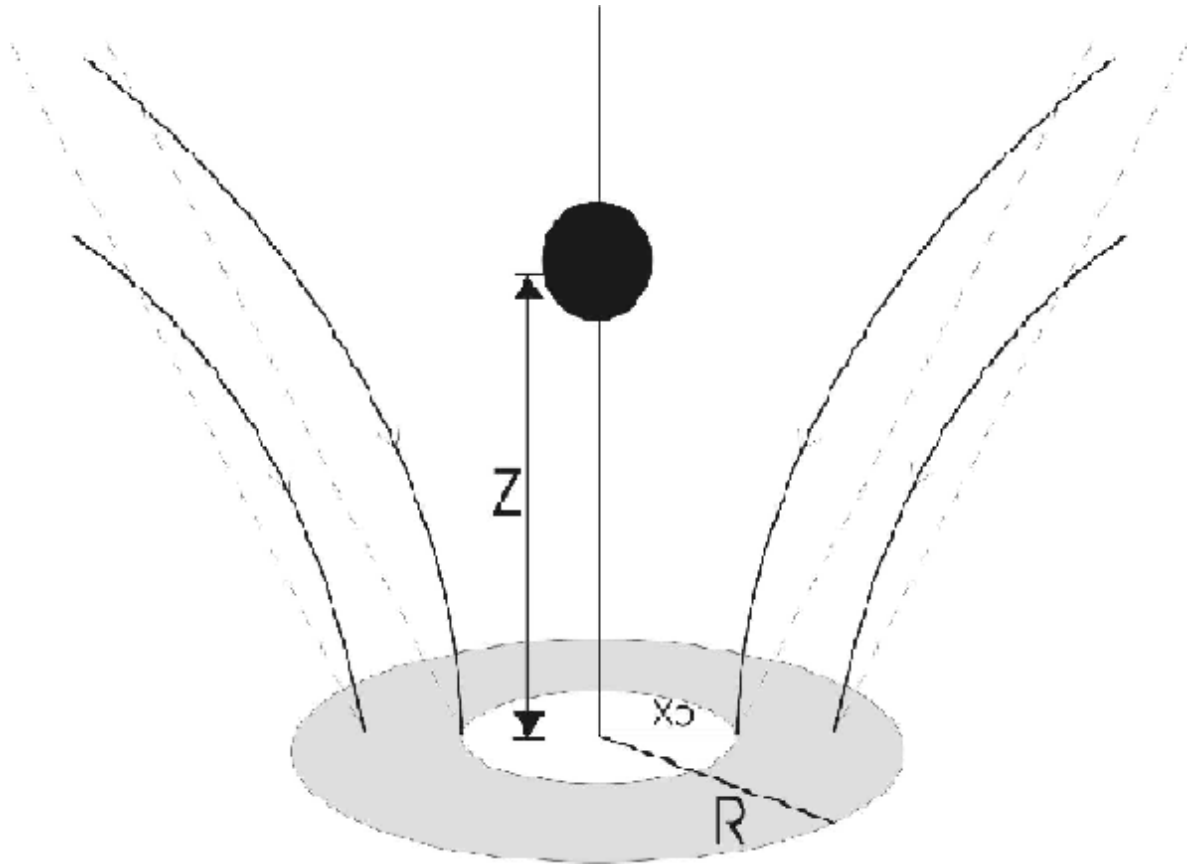


Fig 5: Esquema das aproximações das linhas de força por retas.

Feito isso, podemos dar prosseguimento aos nossos cálculos:

$$F_z = \int_{x_0}^R \frac{kzr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \quad (32)$$

Integrando, temos que a força exercida pelas linhas de força é:

$$F_z = -kz \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + x_0^2}} \right) \quad (33)$$

Quarta aproximação:

Para obtermos a característica de movimento oscilatório, precisamos colocar x_0 em função do raio do orifício (R) e da distância entre este e a esfera (z).

Fazendo a seguinte aproximação: para $z \rightarrow \infty$ temos $x_0 = 0$, e para $z \rightarrow 0$ temos $x_0 = R$, obtemos:

$$x_0 = \frac{R}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)} \quad (34)$$

Substituindo em (33), temos a nossa equação final da força de pressão:

$$F_z = -kz \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{R}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)}\right)^2}} \right) \quad (35)$$

Após estas aproximações, podemos calcular finalmente o campo resultante na esfera.

Através de uma simulação feita no *Mathematica 5*, podemos ver características de movimento oscilatório, confirmando a nossa resolução.

$$V(z, r_B, x_0) = \int (E - F_z) dz \quad (36)$$

Simulação do Ma

thematica 5:

a = -0,05

b = 0,9

R = 2,1

$F[z_]:=a*z+b(\text{Sqrt}[z^2+R^2]/R^2-1/R)-(\text{NIntegrate}[x/\text{Sqrt}[x^2+(R^3/(R+x))^2],\{x,0,10\}])$

$\text{Plot}[F[z],\{z,0,1\}]$

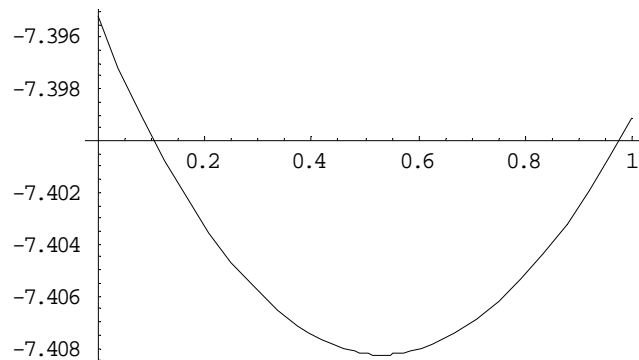


Fig. 6: gráfico obtido através da simulação do problema no programa *Mathematica 5*.

Observando o gráfico obtido (Fig 6), podemos ver que este pode ser aproximado por uma parábola, caracterizando um movimento de oscilação. Desta forma, podemos considerar que a resolução do problema, pelo método utilizado, é satisfatória, pois retrata um movimento oscilatório ocorrendo com a esfera que, como vimos anteriormente através das equações de continuidade, é passível de acontecer.

Experimento:

.Devido ao sucesso da simulação feita no *Mathematica 5*, propomos que o seguinte experimento seja realizado pra que possamos ver de perto o que realmente ocorre em condições reais.

Para realizar o experimento precisaremos de: um tanque que possa ser preenchido com um fluido, no caso àgua, e que tenha um orifício, para que ocorra a vazão, de uma esfera, nem maior que o orifício e nem muito menor que este, e que flutue na superfície deste, e do fluido (àgua).

Depois de escolhido os materiais, de acordo com as condições limite estudadas e respeitadas, primeiramente, enchemos o tanque com àgua, em seguida colocamos a esfera bem próxima do orifício de vazão, e em seguida destampamo-o, para que a vazão se inicie e possamos assim ver a oscilação a esfera. O experimento pode ser repetido varias vezes, aterando-se a altura inicial da esfera, para ver o que ocorre com o movimento de oscilação desta.

Feito o experimento, pode-se traçar alguns gráficos e comparar à simulação, comprovando assim a resolução do problema e obtendo maiores informações sobre um modelo real , sem aproximações.

Referências:

[1]Fundamentos da física,Halliday, vol. 2

[2]Fundamentos da física, Halliday, vol. 3

[3]Fluid Mechanics, L.D. Landau, vol. 6

[4] Influence of Radial Electric Field on Trajectories of Plug Potential Bounce Ion in the Tandem Mirror

Czechoslovak Journal of Physics

Publisher: Springer Science+Business Media B.V., Formerly Kluwer Academic Publishers B.V.

Issue: Volume 52, Number 10

Date: October 2002

Pages: 1135 - 1142

[5] <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-12092002-105032/unrestricted/etd.pdf> ,
pág 18

[6] Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos J. M. Luck ,Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette CEDEX, France

Anita Mehta ,Interdisciplinary Research Centre in Materials, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham B15 2TT, United Kingdom

Received 2 June 1993

[7] I – Projeto do campus, Programa Sobre Mecânica dos Fluidos, Módulo Sobre ondas em Fluidos, T. R. Akylas & C. C. Mei, capítulo 7.

