

CENTRO DE MASSA

Aluno: Miguel Kazuhiro Hirata, RA 880649

Orientador: Reinaldo Camargo Rigitano



Introdução

No cotidiano, muitas vezes, inconscientemente, nos deparamos com situações onde o conceito de centro de massa está envolvido. Como exemplo, pode-se citar a caçamba de um caminhão contendo uma carga relativamente pesada. Se esta carga estiver concentrada em uma das laterais da caçamba (figura 1), existe grande risco do caminhão tombar ao executar uma curva devido à inércia, pois a carga como um todo, está em desequilíbrio em relação ao eixo longitudinal do caminhão. Além do quê, haverá um desgaste não uniforme de pneus e suspensão. Se a carga estiver distribuída como na figura 1, o caminhão poderá tombar se a curva for à direita, mas não tombará se for à esquerda. Entretanto, ao longo do trajeto, existem curvas à esquerda e à direita e o bom senso pede que a carga seja distribuída como na figura 2, ou seja, o centro de massa da carga deverá estar localizado sobre o eixo longitudinal central do caminhão.

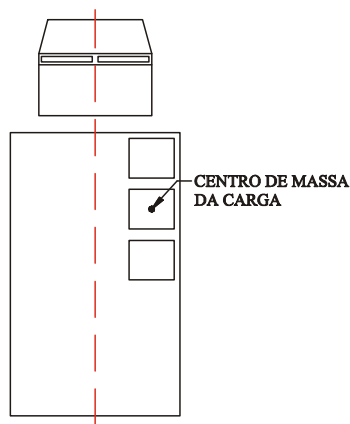


Figura 1: Carga mal distribuída.

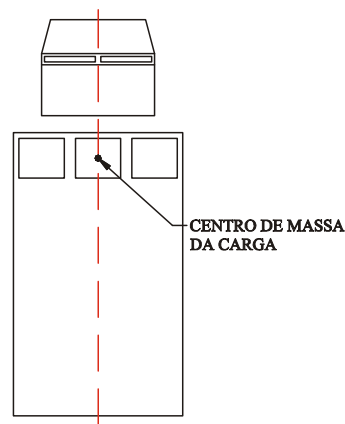


Figura 2: Carga bem distribuída.

Ao longo deste texto, serão abordados os conceitos de centro de massa e centro de gravidade, aplicações e métodos analíticos e gráficos para obtenção do centro de massa.

Centro de massa e centro de gravidade

Se tivéssemos que localizar um corpo no espaço tridimensional, ele seria representado por um ponto, e este ponto é o centro de massa. De outra forma, pode-se dizer que se tivéssemos que concentrar toda a massa de um corpo em um único ponto, este ponto seria o centro de massa.

Em tese, um objeto plano apoiado sobre uma haste fina estará em equilíbrio se o ponto de apoio estiver localizado no centro de massa (figura 3).

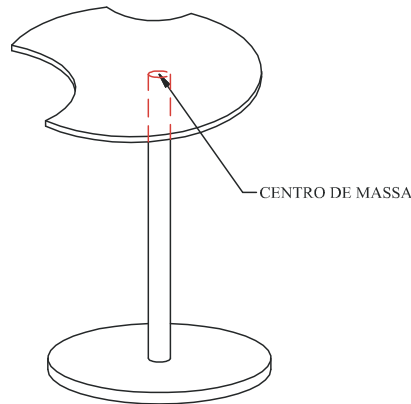


Figura 3: Objeto plano apoiado no centro de massa.

Centro de gravidade é um termo usado para denominar o ponto onde um corpo se equilibra levando-se em conta a aceleração da gravidade local. Sabe-se que o campo gravitacional da Terra não é uniforme. A aceleração da gravidade na superfície média da Terra é de $9,83 \text{ m/s}^2$ e no monte Everest é de $9,80 \text{ m/s}^2$ ou seja, um corpo pesa menos em grandes altitudes do que ao nível do mar. Assim, num corpo suficientemente longo que tenha suas extremidades localizadas em campos gravitacionais diferentes (obviamente, este é um exemplo idealizado), o centro de gravidade estará mais próximo da região onde a aceleração da gravidade é maior (figura 4).

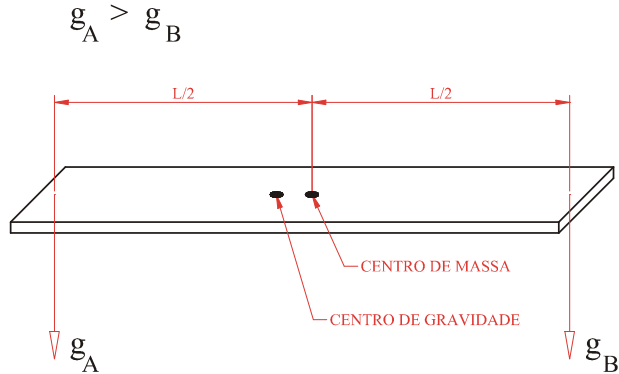


Figura 4: Centro de gravidade em um campo gravitacional não uniforme.

Então, o centro de massa é uma característica intrínseca do corpo e independe de fatores externos; já o centro de gravidade é influenciado pelo campo gravitacional conforme pode se observar no exemplo da figura 4. Se o campo gravitacional for uniforme, o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

Cada corpo tem o seu centro de massa, mas um conjunto de corpos distribuído discretamente no espaço também tem um centro de massa bem definido. Neste caso, o centro de massa depende da localização de cada corpo (figura 5).

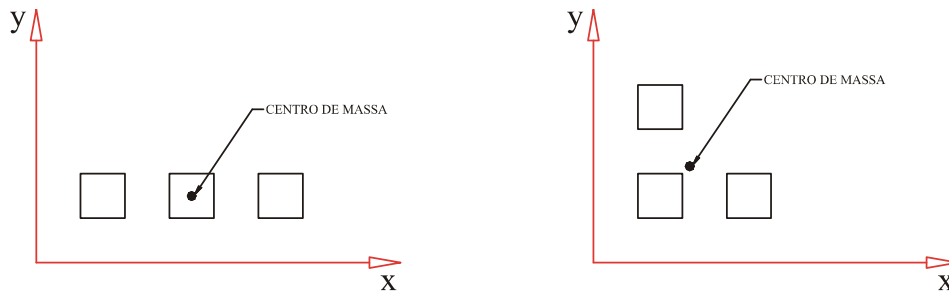


Figura 5: Centro de massa de uma distribuição discreta de partículas.

Até o momento, temos nos referido ao centro de massa de “massas” mas podemos estender o conceito também a vetores tais como velocidade, força, etc. Neste caso, além do módulo, a direção e o sentido são importantes para se determinar o centro de massa.

Baricentro é um outro termo utilizado para designar centro de massa. Etimologicamente significa centro de gravidade, mas a denominação se aplica adequadamente a todos os casos sem perda de clareza. Centróide também é um termo bastante comum e que tem aplicação geral.

Para que haja uma distinção, a seguinte terminologia poderia ser adotada:

Centro de massa: quando somente massas estão envolvidas e não há influencia do campo gravitacional;

Centro de gravidade: quando há influencia de um campo gravitacional não uniforme. Neste caso, o termo pode se aplicar a massas e vetores;

Baricentro: aplica-se a todos os casos, inclusive a vetores sem influencia do campo gravitacional.

Determinação experimental do centro de massa

Como exemplo, tomemos um corpo plano bidimensional. Pendura-se este corpo por um ponto qualquer e traça-se uma linha vertical passando pelo ponto ao qual o corpo está pendurado. Em seguida, repete-se o procedimento tomando-se um outro ponto (figura 6). A intersecção das duas linhas é o centro de massa.

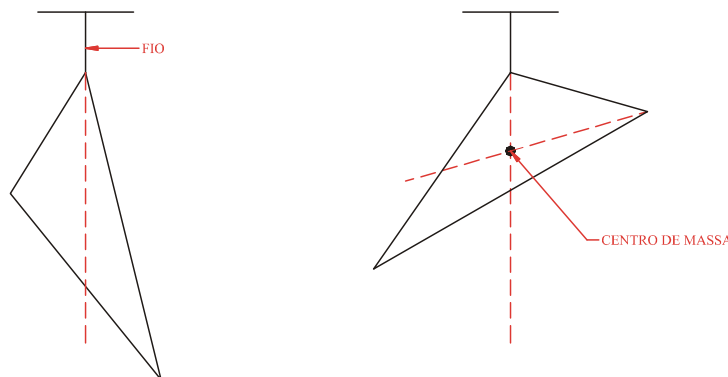


Figura 6: Experimento para obter o centro de massa de um objeto plano.

A linha vertical se justifica porque o experimento é apoiado na força gravitacional cuja direção é normal à superfície terrestre. Deixando o corpo em repouso, o que se obtém é a linha de atuação da força gravitacional resultante agindo sobre o corpo como um todo. Para determinar o ponto, basta repetir o processo para um outro ponto qualquer. Para um corpo tridimensional, o procedimento é o mesmo, mas, agora, para três pontos diferentes situados em dois planos distintos.

É interessante notar que, embora o experimento utilize a força gravitacional, o que se obtém é, efetivamente, o centro de massa geométrico e, mais ainda, mesmo que as linhas de atuação sejam obtidas em campos gravitacionais diferentes, o ponto obtido será o mesmo, pois a direção dos campos gravitacionais é sempre normal à superfície da Terra.

Determinação analítica do centro de massa

O centro de massa de um corpo regular deve estar sobre qualquer eixo de simetria que o corpo possua. Por exemplo, o centro de massa de um bastão uniforme está sobre o eixo do bastão, na metade da sua altura. O centro de massa de um cilindro uniforme está sobre o seu eixo, a meio caminho entre as bases.

Para determinar o centro de massa de um sistema constituído por diversos corpos, precisamos primeiro determinar o centro de massa dos corpos individuais. O centro de massa de um sistema de dois bastões está sobre a reta que une o centro de massa dos bastões separados, conforme mostra a figura 7. Isto porque os corpos, quaisquer que sejam os seus formatos, podem ser considerados entidades pontuais representados pelos seus centros de massa.

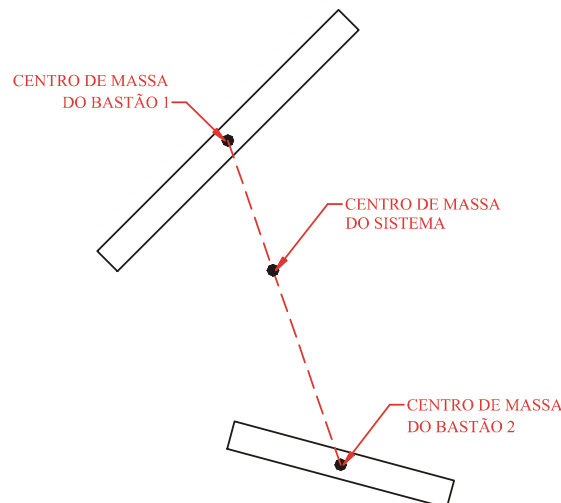


Figura 7: Centro de massa de um sistema de dois corpos.

Consideremos um sistema de partículas de massa total $M = m_1 + m_2 + \dots = \sum m_i$, onde m_i é a i -ésima partícula em relação a uma origem arbitrária. O centro de massa do sistema é definido pelo seu vetor posição “ r ”, dada por:

$$M.r = m_1.r_1 + m_2.r_2 + \dots = \sum m_i.r_i \quad (1)$$

Inicialmente, mostraremos que o centro de massa, definido pela equação (1), coincide com o centro de gravidade do sistema num campo gravitacional uniforme. Para simplificar, vamos imaginar uma figura plana localizada no plano “xy”, conforme a figura 8. Se escolhermos a origem no centro de massa, o vetor posição “r” em relação à origem é nulo. A componente “x” da equação (1), com a origem no centro de massa, é, então:

$$0 = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots = \sum m_i \cdot x_i$$

Se multiplicarmos cada termo desta equação pela aceleração da gravidade g, teremos:

$$0 = m_1 \cdot g \cdot x_1 + m_2 \cdot g \cdot x_2 + \dots = \sum m_i \cdot g \cdot x_i \quad (2)$$

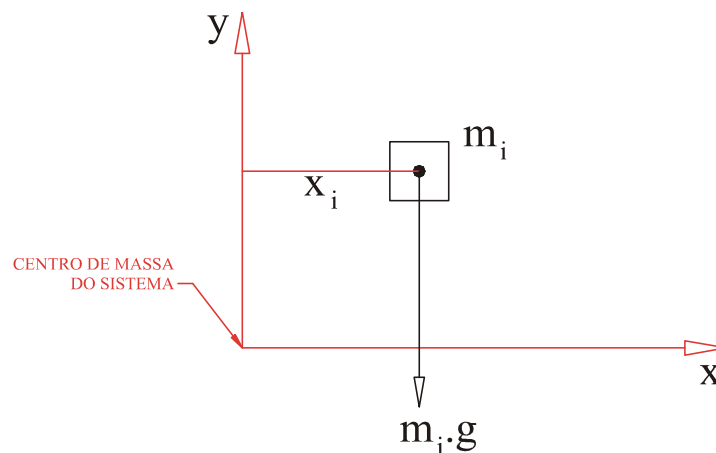


Figura 8: O centro de massa coincide com o centro de gravidade em um campo gravitacional uniforme.

Desde que $m_i g$ é a força da gravidade exercida pela i -ésima partícula e x_i é o braço de alavanca da linha de ação da força em relação à origem no centro de massa, a grandeza $m_i g x_i$ é o torque exercido pela força de gravidade sobre a i -ésima partícula, em torno do centro de massa. A equação (2) afirma então que o torque total exercido pela força da gravidade em torno da origem é nulo. A origem, portanto, é o centro de gravidade além de ser o centro de massa. A única exigência para o centro de gravidade e o centro de massa coincidirem é a de a aceleração da gravidade “g” ser a mesma para cada partícula do sistema.

A equação (1) e o exemplo da figura 8 ilustram o centro de massa de uma distribuição discreta de partículas que pode ser estendida para o espaço tridimensional. Então, um corpo qualquer pode ser considerado um conjunto de partículas infinitesimais localizado num determinado referencial. Considerando-se esta distribuição contínua, na equação (1), a soma $\sum m_i x_i$ é substituída pela integral $\int x \, dm$, onde dm é um elemento de massa. Teremos então

$$M \cdot x_{CM} = \int x \, dm$$

Como exemplo, calculemos o centro de massa de um aro semicircular ilustrado na figura 9. A origem do sistema de coordenadas está sobre um eixo de simetria da figura. Isto facilita sobremaneira o cálculo da integral.

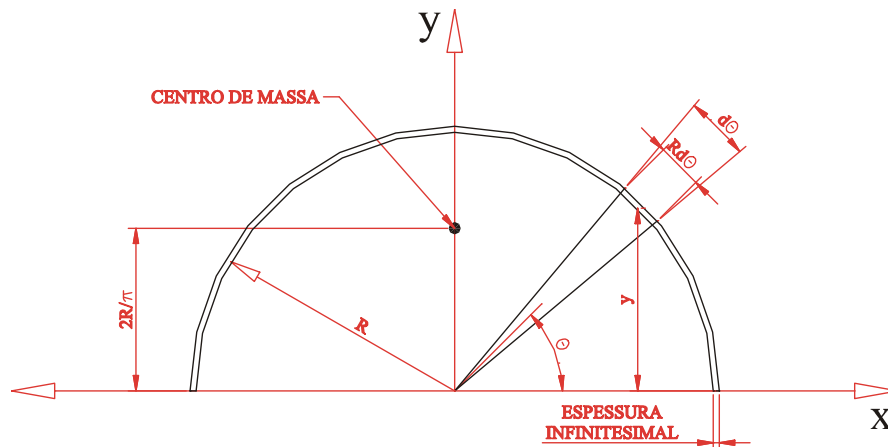


Figura 9: Geometria do cálculo do centro de massa de um aro semicircular

Intuitivamente, podemos observar que o centro de massa deverá estar no eixo “y” pois a todo elemento de massa em +x corresponde um outro igual em -x. A ordenada y do centro de massa, no entanto, não é nula. Também é intuitivo que o centro de massa não está na origem, que é o centro de curvatura do aro, pois todas as massas estão com as ordenadas positivas. Na figura, indicamos um elemento de massa de comprimento $R d\theta$ na altura $R \cdot \sin\theta$. A massa deste elemento é $dm = \lambda \cdot R \cdot d\theta$, onde $\lambda = M/\pi \cdot R$ é a massa por unidade de comprimento. Temos então que

$$M \cdot y_{CM} = \int y \cdot dm = \int R \cdot \sin\theta \cdot (\lambda \cdot R \cdot d\theta) = R^2 \lambda \int \sin\theta \cdot d\theta = 2 \cdot R^2 \cdot \lambda$$

Logo, $y_{CM} = 2R/\pi$. Note que a coordenada do centro de massa, como era de se esperar, não depende da massa.

Calculemos agora, o centro de massa de um semicírculo (figura 10). O raciocínio é análogo ao exemplo anterior com a diferença de que agora o elemento de massa é $dm = \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$, onde $\sigma = 2 \cdot M/\pi \cdot R^2$ é a massa por unidade de área.

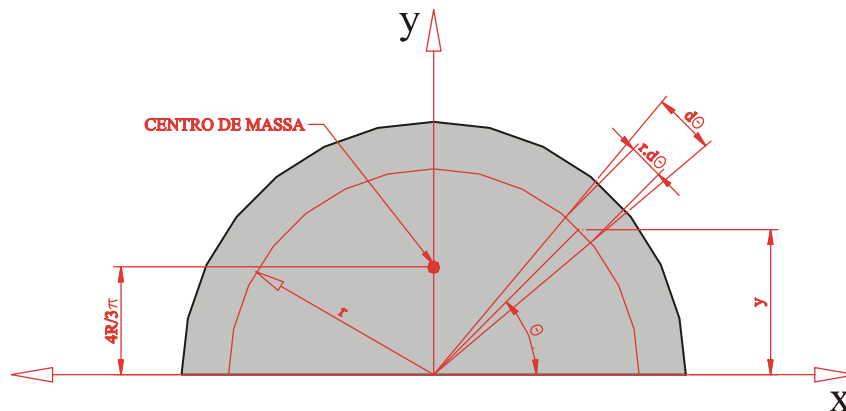


Figura 10: Geometria do cálculo do centro de massa do semi-círculo

Perceba que r agora varia e o elemento de área é $r.dr.d\Theta$. Temos então que

$$M.y_{CM} = \int y.dm = \int r.\text{sen}\Theta . (\sigma.r.dr.d\Theta) = \sigma \int r^2.dr \int \text{sen}\Theta .d\Theta = 2.\sigma.R^3/3$$

Logo, $y_{CM} = 4R/3\pi$.

Estes dois últimos exemplos mostram alguns fatos interessantes. O baricentro de uma entidade não está necessariamente “dentro” da entidade como pudemos verificar no caso do aro semicircular. Embora uma curva delimite uma superfície, seus baricentros não são necessariamente coincidentes a não ser que sejam perfeitamente simétricos como é o caso da circunferência e do círculo. Analogamente, um sólido e a superfície que o envolve terão baricentros coincidentes quando forem simétricos tridimensionalmente tal qual uma esfera.

No espaço de três dimensões, o procedimento é análogo. Calculemos o centro de massa de um hemisfério de massa M e raio R (figura 11).

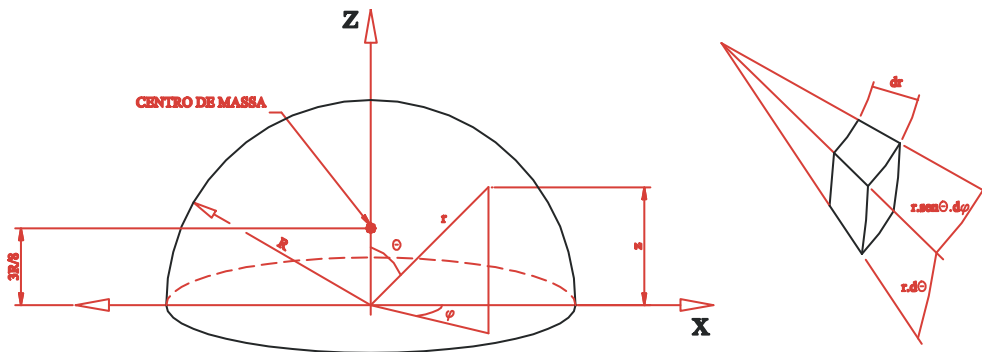


Figura 11: Centro de massa de um hemisfério.

Neste caso aplica-se uma integral tripla sobre um elemento de volume dado por $r^2.\text{sen}\Theta.dr.d\Theta.d\varphi$. Por simetria, o centro de massa deverá estar no eixo z . Logo:

$$M.z_{CM} = \int z dm = \int r.\cos\Theta . (\rho dV) = \rho \int r.\cos\Theta . (r^2.\text{sen}\Theta.dr.d\Theta.d\varphi).$$

$$M.z_{CM} = \rho \int r^3 dr . \int \text{sen}\Theta .\cos\Theta d\Theta . \int d\varphi.$$

Onde ρ é a densidade volumétrica.

$$M.z_{CM} = (3M/2\pi R^3).(R^4/4).(1/2).(2\pi).$$

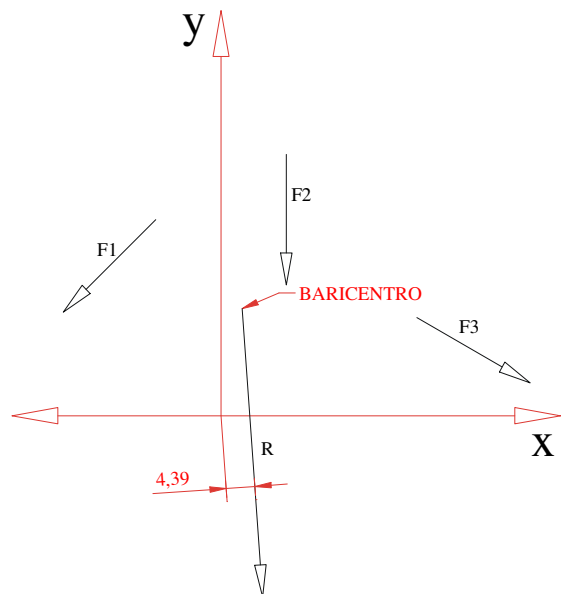
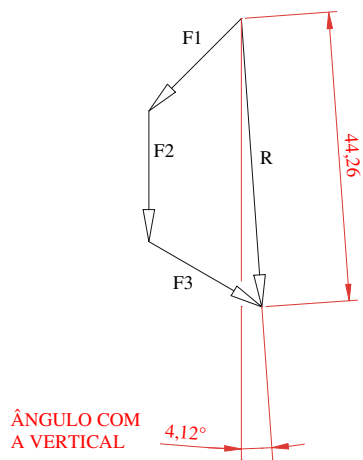
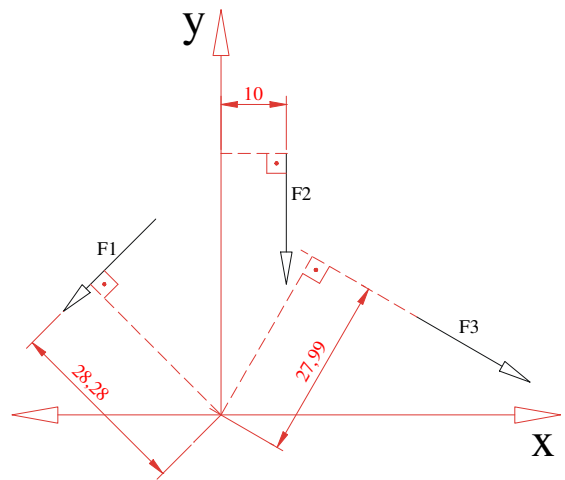
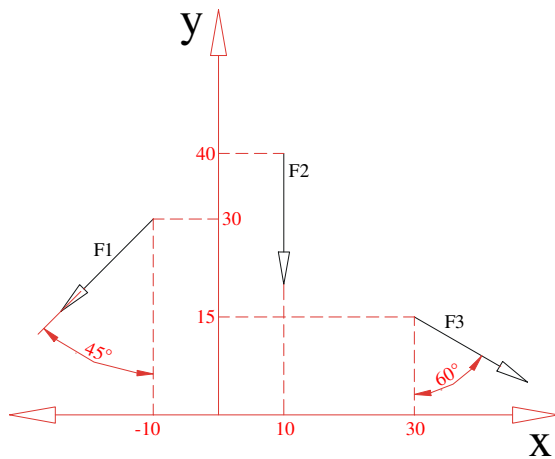
Portanto, $z_{CM} = 3R/8$. No caso de uma casca semi-esférica, temos $z_{CM} = R/2$. Mais uma vez este resultado contraria um eventual senso intuitivo comum de que o centro de massa de um hemisfério é o mesmo de um semicírculo de mesmo raio.

Calculemos agora o baricentro de um conjunto de vetores distribuído discretamente em um plano referencial aleatório conforme mostra a figura 12.

O teorema de Varignon diz que o momento da resultante de um sistema de vetores em relação a um ponto O é igual à soma algébrica dos momentos de cada um dos vetores em relação ao mesmo ponto. Em outros termos:

$$R.d = \sum F_i.d_i$$

Onde R é o módulo da resultante, d_i 's são as distancias dos vetores até o ponto O e os F_i 's são os módulos dos vetores.



Pelo teorema de Varignon:
 $R \cdot d = F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 - F_1 \cdot d_1$
 $44,26 \cdot d = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 27,99 - 20 \cdot 28,28$
 $d = 4,39$

Figura 12: Baricentro de um conjunto de vetores.

Os teoremas de Pappus-Guldin

Pappus de Alexandria é considerado historicamente o último grande geômetra grego e, em 320 d.C., compôs uma obra com o nome de “Coleção” (Synagoge) que continha oito livros dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam. No livro VII consta um teorema, não demonstrado, que diz: “Se uma curva plana fechada gira em torno de uma reta que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando o produto da área limitada pela distancia percorrida durante a revolução pelo centro de massa da área” (figura 13). Assim:

$$V = A.c = A.(2\pi r)$$

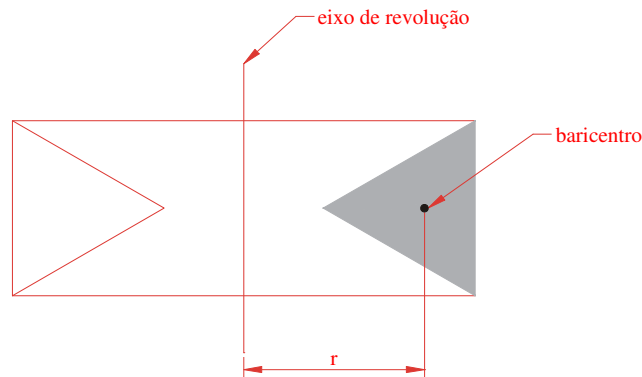


Figura 13: Baricentro de superfície usando teorema de Pappus.

Portanto, com este teorema, conhecendo-se o volume do sólido de revolução e a área da seção transversal da figura que gerou este sólido, é possível obter a localização do centro de massa desta figura.

Neste mesmo volume da “Coleção” se encontra um teorema análogo que diz: “a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a revolução (figura 14)”, ou seja:

$$A = S.c = S.(2\pi r)$$

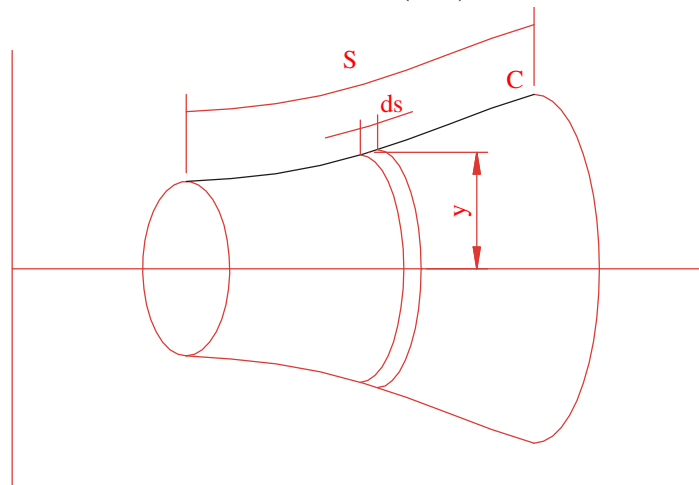


Figura 14: Baricentro de linha usando teorema de Pappus.

Demonstração:

$$A = \int 2\pi y \, ds = 2\pi \int y \, ds = 2\pi Y.S.$$

Onde Y é a coordenada “y” do centróide da curva C e “S”, o comprimento.

Portanto, conhecendo-se a área do sólido de revolução e o comprimento da curva que gerou este sólido, é possível calcular o centro de massa desta curva. Calculemos, como exemplo, o baricentro de um quarto de circunferência de raio R (figura 15):

O comprimento desta curva é facilmente calculado e dá $S = \pi R/2$. A área do sólido de revolução pode ser obtido por meio de uma integral:

$$A = \int R^2 \cdot \sin \Theta \, d\Theta \cdot d\varphi = 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^2.$$

Aplicando os valores obtidos no teorema de Pappus, temos.

$$A = S \cdot (2\pi r) \rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^2 = (\pi R/2) \cdot (2\pi r) \rightarrow r = 2\sqrt{2} \cdot R/\pi.$$

Que está de acordo com o valor do centro de massa obtido por definição.

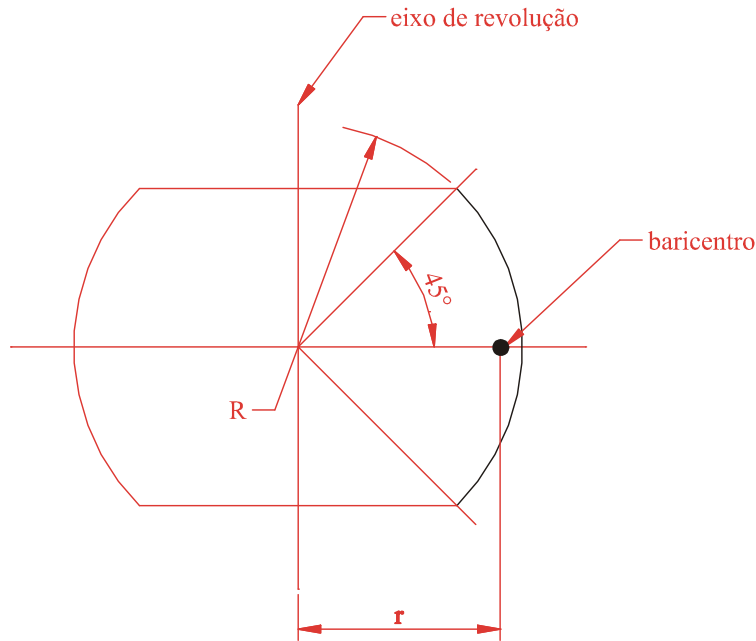


Figura 15: Baricentro de um quarto de circunferência.

Paul Guldin (1577-1643), matemático suíço, desenvolveu estes mesmos teoremas independentemente de Pappus, por isto há esta diversidade de nomes: teoremas de Pappus, teoremas de Guldin, teoremas de Pappus-Guldin.

Determinação gráfica do baricentro

Para obter o vetor resultante de um conjunto de vetores cuja localização no espaço não é relevante podem ser utilizados dois métodos gráficos conhecidos: o método do polígono (figura 16) e o método do paralelogramo (figura 17).

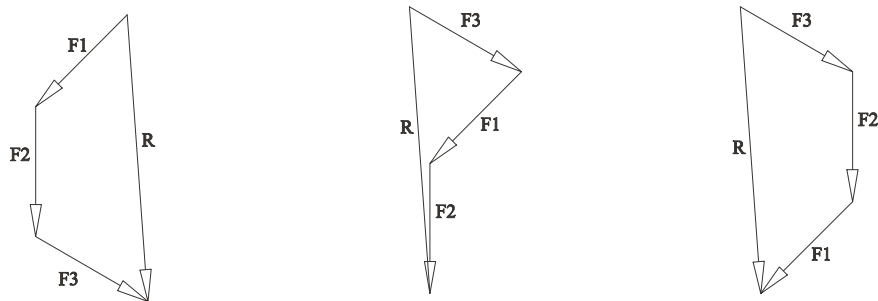


Figura 16: Método do Polígono

O método do polígono requer apenas que cada vetor tenha a sua origem coincidindo com a extremidade de outro vetor não importando a ordem. A resultante é obtida unindo-se a origem do primeiro vetor com a extremidade do último.

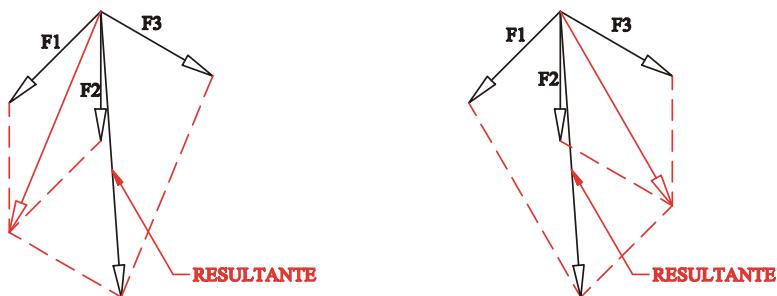


Figura 17: Método do Paralelogramo

No método do paralelogramo, obtém-se a resultante de um par de vetores qualquer com origem comum traçando-se retas paralelas a cada um dos vetores passando pela sua extremidade. O vetor que une a origem à intersecção destas retas é o vetor resultante. Na sequência toma-se esta resultante e o terceiro vetor com mesma origem e repete-se o procedimento obtendo-se uma nova resultante. A última resultante é a resultante do sistema. O módulo do vetor resultante, R , é obtido através da lei dos cossenos:

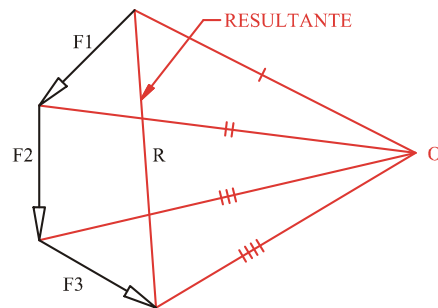
$$|R| = (|F_1|^2 + |F_2|^2 - 2 \cdot |F_1| \cdot |F_2| \cdot \cos \Theta)^{1/2}$$

Onde Θ é o ângulo entre os vetores.

O método do polígono e o do paralelogramo permite determinar a direção, o sentido e o módulo do vetor resultante e a lei dos cossenos permite determinar analiticamente o módulo do vetor resultante. Mas, e quando a localização dos vetores no espaço é relevante e estes não tem origem comum? O método do polígono e o do paralelogramo podem ser aplicados para se obter o módulo, a direção e o sentido do vetor resultante, mas um outro dado igualmente importante não pode ser obtido por estes métodos: a localização da origem do vetor resultante, ou seja, o baricentro do sistema de vetores. Veremos agora um método gráfico associado a um método analítico para obtenção deste baricentro. Consideremos o sistema de vetores da figura 12.

Procedimento gráfico (figuras 18 e 19)

1. Prolongar as retas de ação de todos os vetores;
2. Construir o polígono dos vetores. Note que este polígono já permite determinar a direção, o sentido e o módulo do vetor resultante;
3. Por um ponto O qualquer projetar as extremidades de todos os vetores;
4. Por um ponto A qualquer traçar a paralela à primeira projetante até encontrar a reta de ação de F_1 no ponto B. Pelo ponto B, traçar a reta paralela à segunda projetante até encontrar F_2 no ponto C. Analogamente determina-se o ponto D. A linha quebrada obtida chama-se polígono funicular e tem a aparência de uma corda (“funè”, em italiano);
5. Prolongar o primeiro e o último lado do polígono funicular até determinar o ponto T;
6. Pelo ponto T traçar a paralela ao vetor R. Esta paralela é a reta de ação da resultante;



POLÍGONO DOS VETORES

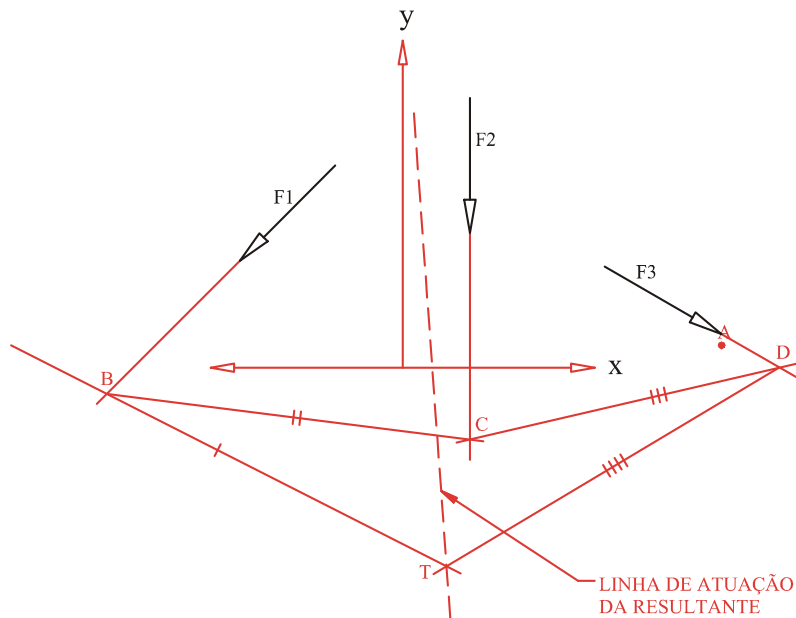


Figura 18: Determinação gráfica da linha de atuação da resultante

Se os vetores do sistema dado girarem de um certo ângulo α , cada uma em torno do seu ponto de aplicação, a resultante girará também de um mesmo ângulo α em torno do seu ponto de aplicação. Este fato permite determinar o ponto de aplicação da resultante. Para isso, basta traçar o polígono dos vetores e o polígono funicular também para o novo sistema obtido (sistema de vetores auxiliar) e determinar a reta de ação da nova resultante. O cruzamento das retas de ação das resultantes (verdadeira e auxiliar) é o ponto de aplicação da resultante do sistema dado, ou seja, é o baricentro (figura 19).

O ponto O, do polígono auxiliar, pode ser qualquer mas existe um ponto que fornece o mesmo feixe de projetantes do polígono original com a diferença de que estão apenas girados de um ângulo α . Logo, é desnecessário desenhar o polígono de vetores auxiliar, bastando apenas traçar as retas de ação do novo sistema de vetores e o respectivo polígono funicular.

O ângulo α pode ser qualquer, mas comumente usa-se 30° ou 60° ou 90° .

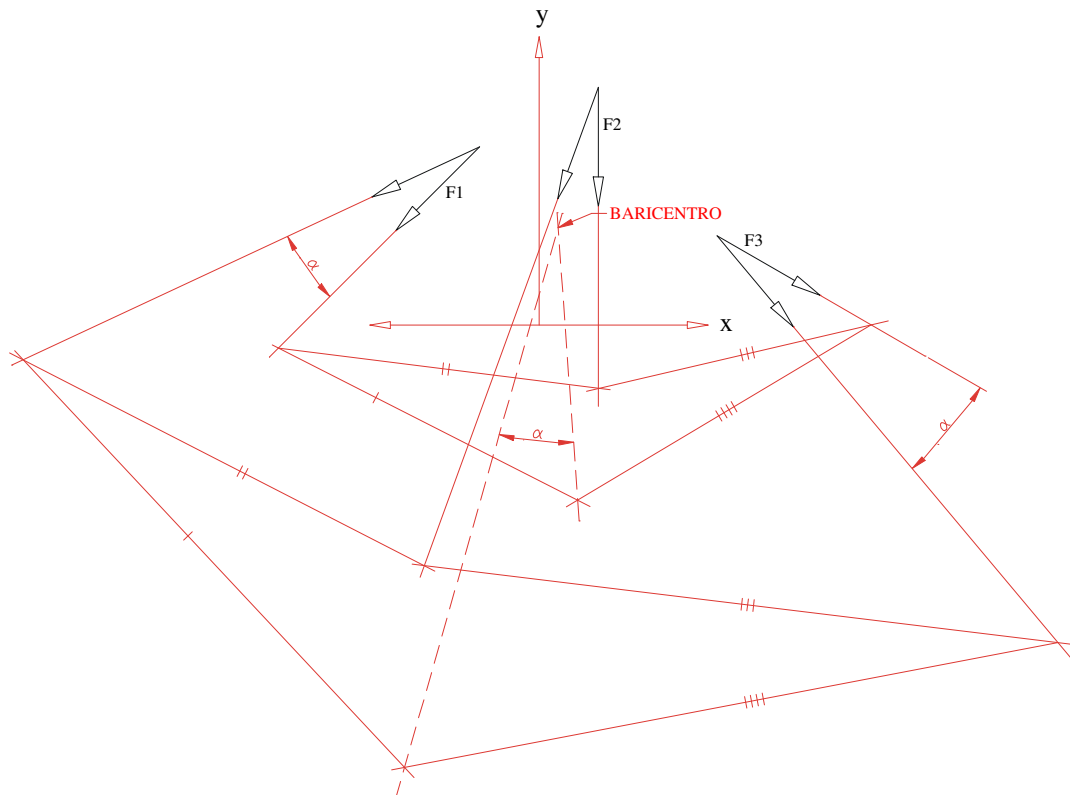
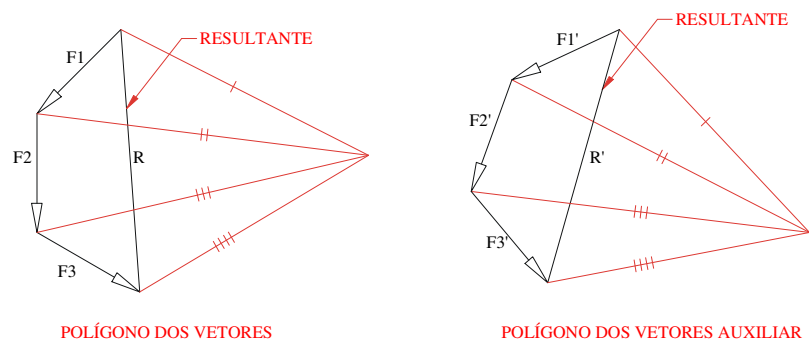


Figura 19: Determinação do ponto de aplicação da resultante (baricentro)

As figuras 21 e 22 ilustram exemplos de determinação gráfica e analítica do baricentro de perímetro e área usando ângulo de rotação do polígono funicular de 90° . Podemos verificar que o método analítico corrobora o método gráfico. Como já havia sido afirmado, o baricentro do perímetro é diferente do da área porque a figura não apresenta simetria. Por mera convenção adotou-se uma direção vertical para os vetores tanto no caso do perímetro como no da área. O sentido do vetor é para baixo quando há perímetro ou área e para cima quando ocorre o contrário. Note que nos dois casos houve uma subdivisão das figuras em formas geométricas simples com baricentros conhecidos em cujos pontos foram localizadas as origens dos vetores. No caso da figura 21, os módulos dos vetores são perímetros e no caso da figura 22 são áreas. Note que perímetro e área, neste contexto, não são vetores, mas os seus módulos foram utilizados como parâmetros para a obtenção do centro de massa.

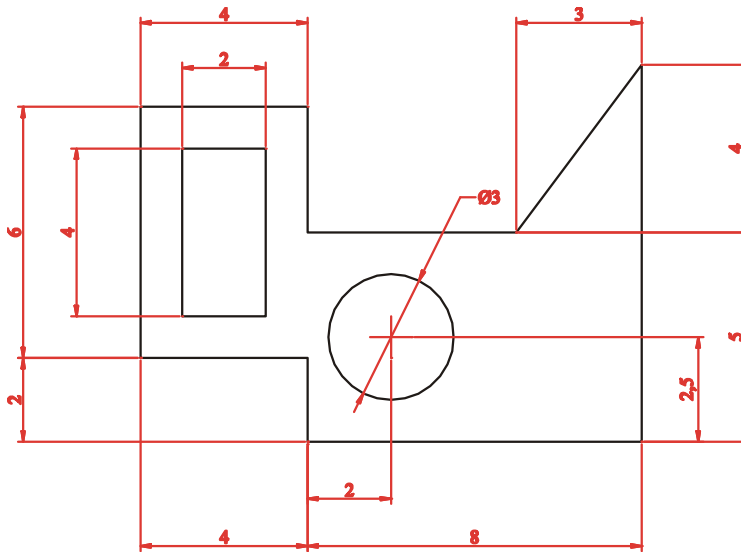
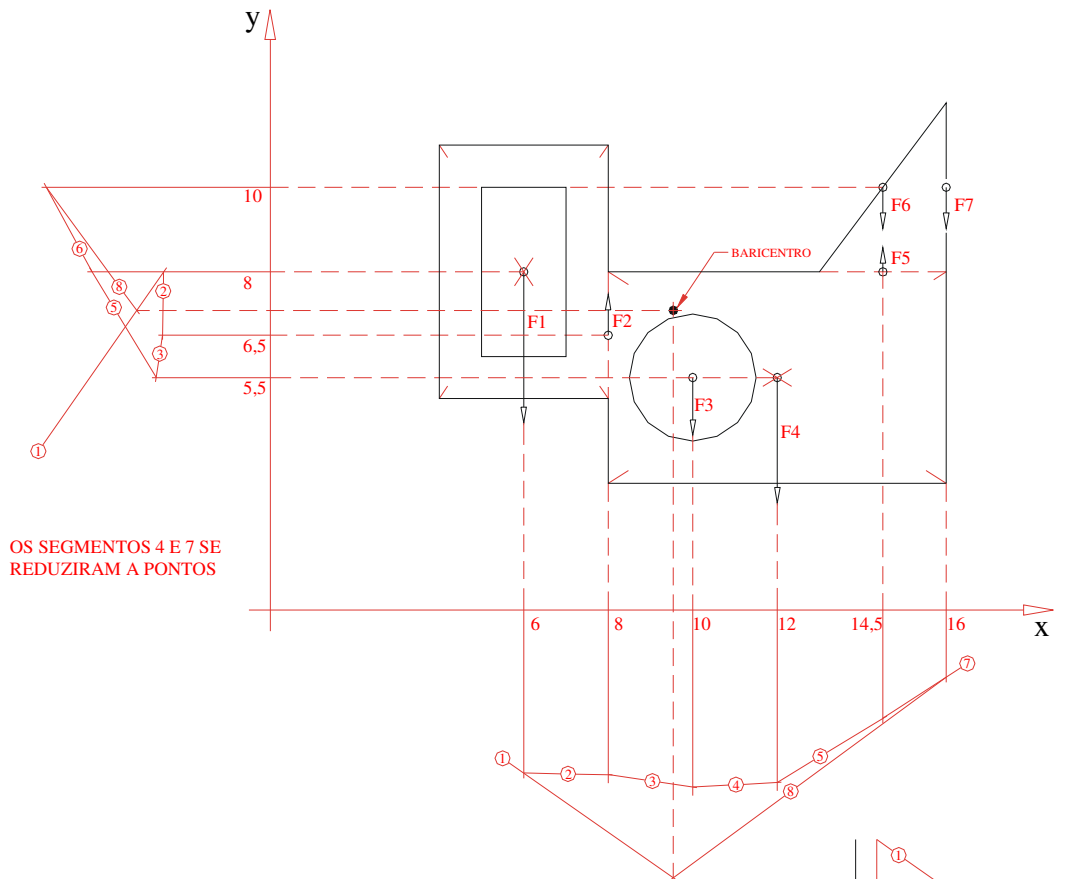


Figura 20: Figura plana com dimensões para determinação do baricentro.

Aplicações práticas

O conceito de centro de massa é extremamente importante na construção civil e na indústria de transformação. Como exemplo de aplicação na indústria mecânica cita-se um processo de conformação de metais chamado estampagem que consiste em cortar ou dobrar ou repuxar (ou uma combinação delas todas) chapas de metal mediante ferramentas apropriadas denominadas estampas (figura 23). Estes estampas são fixados em máquinas chamadas prensas (figura 24) que operam verticalmente apresentando grande força inercial. Como exemplo podemos citar as bandejas do restaurante universitário que foram cortadas e repuxadas por meio de estampas em prensas de aproximadamente 80 toneladas. Se quisermos cortar uma chapa com o formato da figura 20, teremos de fabricar um estampo apropriado cuja espiga (eixo que conecta o estampo e a prensa) deverá estar localizada no baricentro do perímetro (figura 21). Isto porque a força de corte estará atuando apenas no perímetro através dos punções de corte. Por outro lado, se quisermos fabricar uma bandeja repuxada com o formato da figura 22, devemos confeccionar um estampo apropriado cuja espiga deverá estar localizada no baricentro da área, pois a força de repuxo estará atuando sobre toda a área da figura. Na prensa toda a força inercial vertical está concentrada no centro do seu martelo que é transmitida à espiga e, conseqüentemente, ao baricentro da ferramenta.



OS SEGMENTOS 4 E 7 SE REDUZIRAM A PONTOS

Nº	F _i	x _i	F _i x _i	y _i	F _i y _i
1	2.(6+4)+2.(4+2)=32	6	192	8	256
2	-2.(5-2)=-6	8	-48	6,5	-39
3	(3,14).3=9,4	10	94	5,5	51,7
4	2.(8+5)=26	12	312	5,5	143
5	-3	14,5	-43,5	8	-24
6	$\sqrt{3^2+4^2}=5$	14,5	72,5	10	50
7	4	16	64	10	40
$\Sigma F_i = 67,4$		$\Sigma F_i x_i = 643$	$\Sigma F_i y_i = 477,7$		

$$x_g = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{643}{67,4} = 9,54$$

$$y_g = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{477,7}{67,4} = 7,09$$

Figura 21: Baricentro do Perímetro

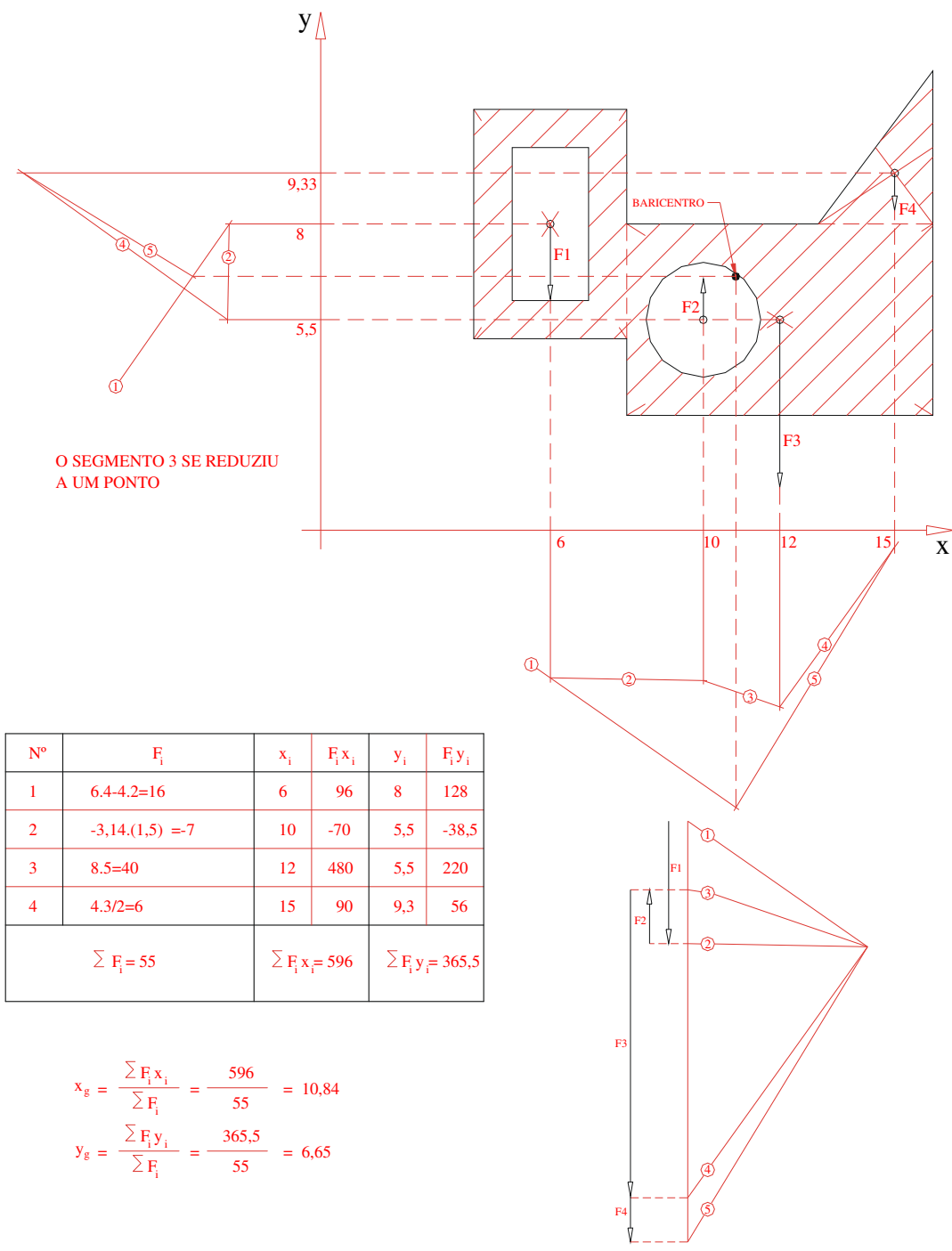


Figura 22: Baricentro da Área

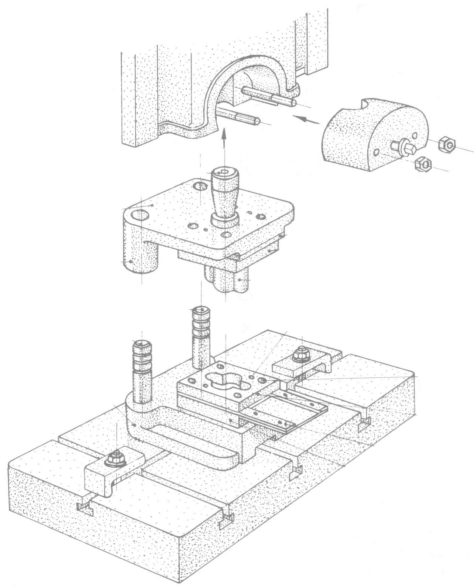


Figura 23: Estampo desmontado

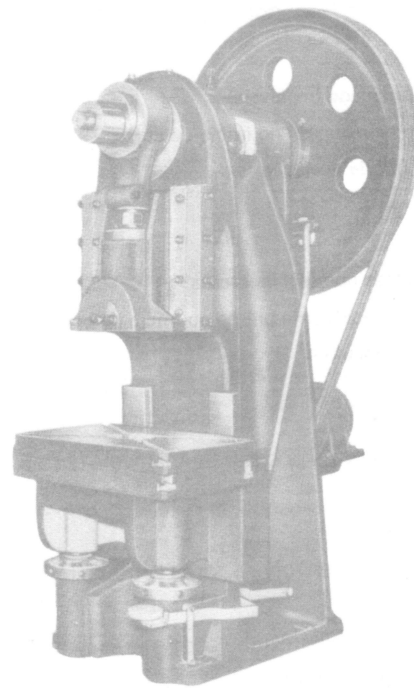


Figura 24: Prensa Excêntrica

A Pedra Movediça de Tandil

Em Tandil, uma cidade da província de Buenos Aires, Argentina, existia uma gigantesca rocha de granito com mais de 300 toneladas de massa em delicado equilíbrio na borda de um abismo (figura 25). A pedra caiu em 29 de fevereiro de 1912.

A serra de Tandil, onde se localizava a pedra, se formou no período pré-Cambriano e, por esta época, suas elevações atingiam até 8000 metros. Hoje, seus montes têm cerca de 500 metros de altura. A explicação geológica para a formação da pedra está na atuação de diversos agentes climáticos (vento, chuva, sol, umidade) esculpindo-o lentamente ao longo de milênios. Para o geólogo Juan Jose Nágera, a rocha esteve sempre em movimento, mas por um lapso de tempo (quem sabe milênios?) esteve em equilíbrio no alto de uma montanha.

O atrito, a grande massa inercial e o fato do centro de massa estar sobre um ponto de apoio possibilitaram que a pedra de Tandil permanecesse imóvel por tão longo tempo. Conta o folclore do lugar que um cidadão tentou derrubar a pedra com mil cavalos mas não logrou êxito. Provavelmente, a lenta atuação dos fatores climáticos levou-a a precipitação devido ao deslocamento do centro de massa para o lado do abismo.

Tandil deve seu nome etimologicamente a esta pedra peculiar e, no final do século XIX, a cidade colocou o desenho da pedra no seu brasão. Os comerciantes e moradores adotaram a rocha como uma espécie de mascote e, de fato, a cidade prosperou com a vinda de turistas e pesquisadores. A sua queda na época provocou enorme comoção, não tanto pela perda de um fator econômico mas porque a pedra se tornara um símbolo da cidade e, através dela ficara mundialmente conhecida.

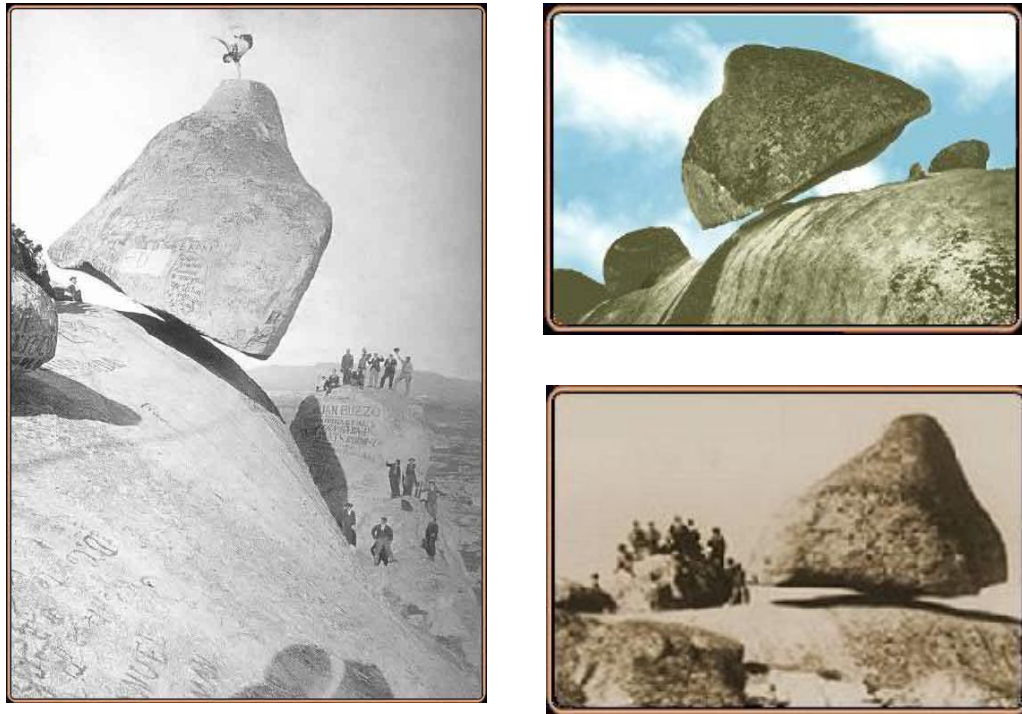


Figura 25: A pedra de Tandil, vista em vários ângulos

Conclusão

Até o momento, temos nos referido a baricentro de corpos rígidos e vetores. Tem sentido falarmos em baricentro de corpos não rígidos? Por exemplo, dá para determinar o centro de massa de um gás qualquer? Sim; desde que este gás esteja limitado por uma superfície. Neste caso, o centro de massa é o do volume limitado por esta superfície.

Um corpo humano de pé tem um centro de massa com relação a um referencial qualquer, mas agachado o seu centro de massa muda. Curiosamente, ao executar um salto ornamental, o centro de massa de um atleta mantém uma trajetória parabólica respeitando as leis da mecânica clássica, embora seu corpo mude de posição várias vezes.

Todos os processos para determinação do centro de massa aqui descritos chegam invariavelmente ao mesmo resultado. Dependendo da situação, um ou outro é mais adequado. No caso de conjuntos de entidades discretas (corpos ou vetores), o processo gráfico ou o analítico é o mais conveniente já que o procedimento experimental é impraticável. Em se tratando de um corpo rígido contínuo irregular, o método experimental é o mais adequado, pois é praticamente impossível separá-lo em subpartes com simetria conhecida (principalmente na periferia) sem que haja perda de precisão. Já no caso de corpos rígidos com algum tipo de simetria, o processo analítico através de integração é o mais recomendado.

Antes do advento do computador, a precisão do método gráfico estava atrelada à habilidade no manuseio do lápis, da régua e do esquadro. Aliás, este é um bom momento para o professor retomar o uso destes instrumentos em sala de aula. Atualmente existem aplicativos computacionais, como o CorelDRAW e o AutoCAD por exemplo, que executam este processo com exatidão.

O exemplo do caminhão com carga, citado na introdução, e as aplicações industriais mostram que o conceito de centro de massa está intimamente relacionado com o

conceito de equilíbrio, ou seja, quando as forças atuam sobre o centro de massa, os fatores de desequilíbrio (desgaste, tensão, fadiga) se minimizam aumentando a durabilidade de equipamentos e ferramentas.

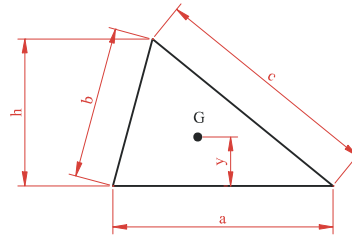
Apêndice 1: Baricentro de Linhas

segmento de reta



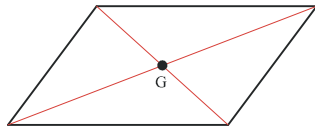
$$G = \frac{AB}{2}$$

perímetro do triângulo



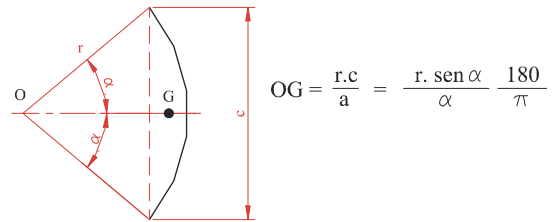
$$y = \frac{h}{6} \frac{b+c}{a+b+c}$$

perímetro do paralelogramo



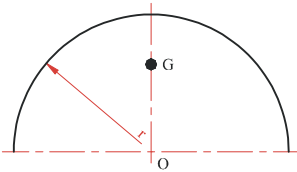
G = ponto de intersecção das diagonais

arco de circunferência de comprimento a



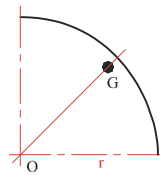
$$OG = \frac{r \cdot c}{a} = \frac{r \cdot \text{sen } \alpha}{\alpha} \frac{180}{\pi}$$

semi-circunferência



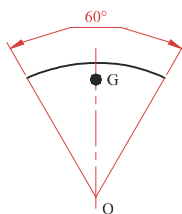
$$OG = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$

1/4 de circunferência



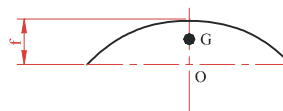
$$OG = \frac{2\sqrt{2} \cdot r}{\pi}$$

1/6 de circunferência



$$OG = \frac{3 \cdot r}{\pi}$$

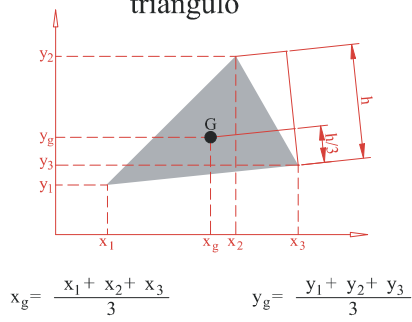
arco plano qualquer



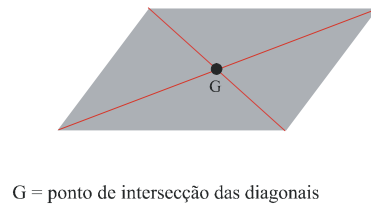
$$OG \approx \frac{2}{3} f$$

Apêndice 2: Baricentro de Superfícies I

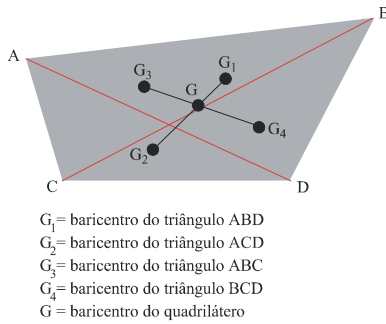
triângulo



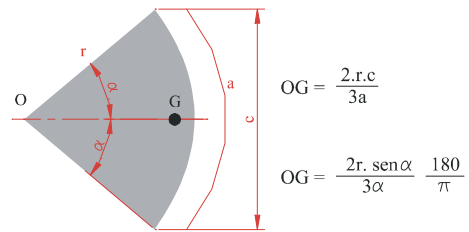
paralelogramo



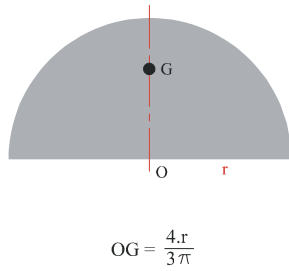
quadrilátero



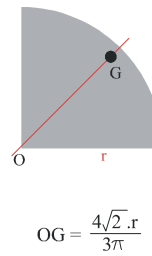
setor circular



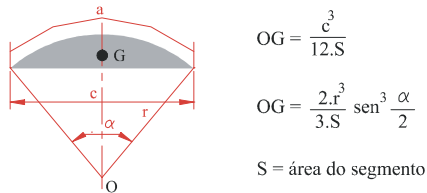
semi-círculo



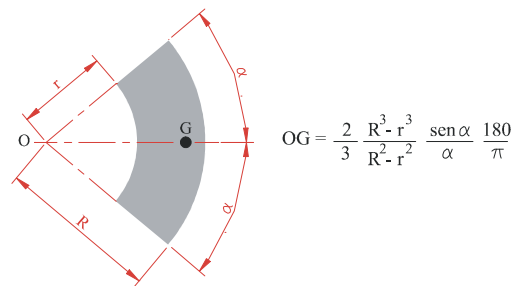
quadrante de círculo



segmento circular

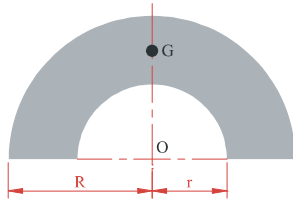


arco de coroa circular



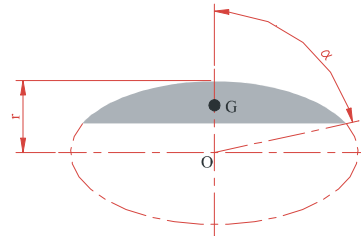
Apêndice 3: Baricentro de Superfícies II

semi-anel circular



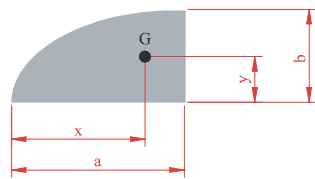
$$OG = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

segmento elíptico



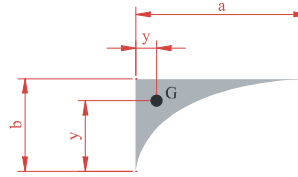
$$OG = \frac{240.r}{\alpha.\pi - 180.\text{sen } \alpha} \text{sen}^3 \frac{\alpha}{2}$$

segmento parabólico



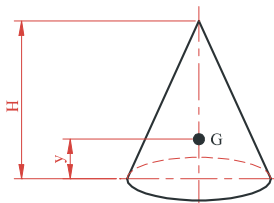
$$x = \frac{3}{5} a \quad y = \frac{3}{8} b$$

segmento parabólico



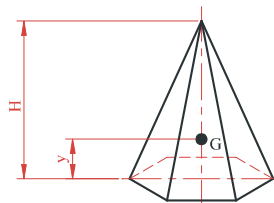
$$x = \frac{3}{10} a \quad y = \frac{3}{4} b$$

superfície lateral do cone



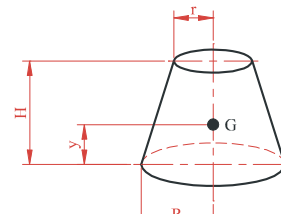
$$y = \frac{H}{3}$$

superfície lateral da pirâmide



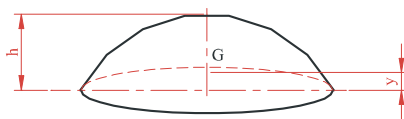
$$y = \frac{H}{3}$$

superfície lateral do tronco de cone



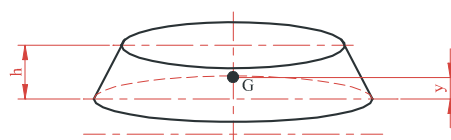
$$y = \frac{H}{3} \frac{R+2r}{R+r}$$

superfície da calota esférica



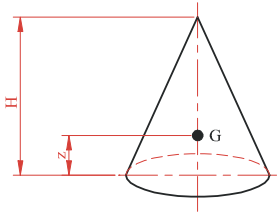
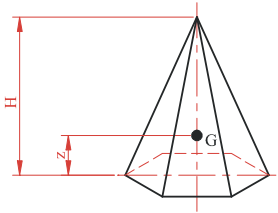
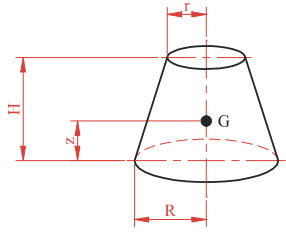
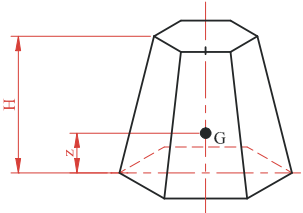
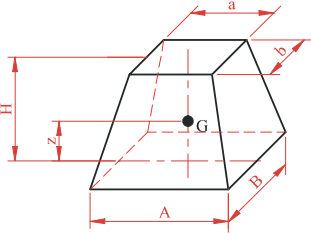
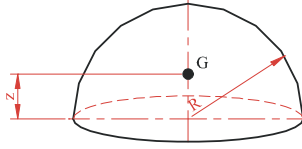
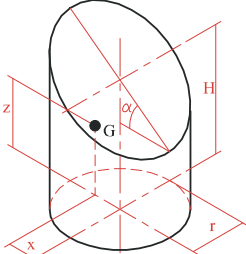
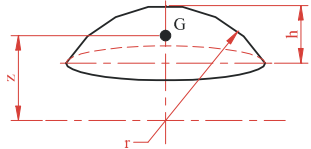
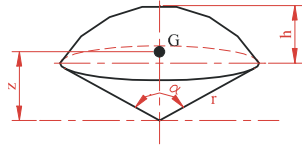
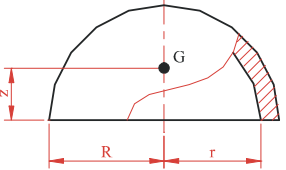
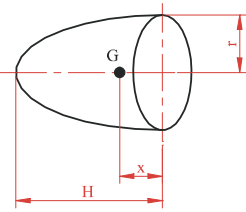
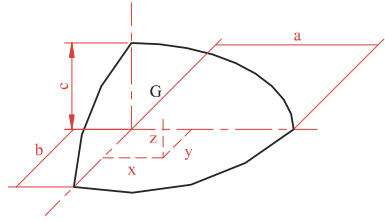
$$y = \frac{h}{2}$$

superfície de zona esférica



$$y = \frac{h}{2}$$

Apêndice 4: Baricentro de Sólidos

<p>volume do cone</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{H}{4}$</p>	<p>volume da pirâmide</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{H}{4}$</p>	<p>volume do tronco de cone</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{H}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$</p>
<p>volume do tronco de pirâmide</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{H}{4} \frac{B + 2\sqrt{Bb} + 3b}{B + \sqrt{Bb} + b}$</p> <p style="text-align: center;">B, b: áreas das bases</p>	<p>volume do obelisco</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{H}{2} \frac{AB + Ab + aB + 3ab}{2AB + Ab + aB + 2ab}$</p>	<p>volume da semi-esfera</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{3}{8}R$</p>
<p>volume do tronco de cilindro circular</p>  <p style="text-align: center;">$x = \frac{r^2 \cdot \text{tg} \alpha}{4H}$ $z = \frac{H}{2} + \frac{r^2 \cdot \text{tg}^2 \alpha}{2H}$</p>	<p>volume do segmento esférico</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$</p>	<p>volume do setor esférico</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{3}{8} (2r-h) = \frac{3}{8} r(1 + \cos \alpha)$</p>
<p>volume da semi-esfera ôca</p>  <p style="text-align: center;">$z = \frac{3}{8} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$</p>	<p>parabolóide</p>  <p style="text-align: center;">$x = \frac{H}{3}$</p>	<p>elipsóide</p>  <p style="text-align: center;">$x = \frac{3a}{8}$; $y = \frac{3b}{8}$; $z = \frac{3c}{8}$</p>

Bibliografia

- Boyer, Carl B., História da Matemática, São Paulo, Edgard Blucher, 1974
- Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., Fundamentos de Física, Mecânica, LTC, 1996.
- Hittig, Aladar, Manual de Engenharia Industrial, V. 2, São Paulo, Global, 1986.
- Provenza, F., Cinemática Estática Dinâmica, São Paulo, Pro-Tec, 1983.
- Provenza, F., Projetista de Máquinas, São Paulo, Pro-Tec, 1983.
- Shenk, Al, Cálculo e Geometria Analítica, V. 2, Rio de Janeiro, Campus, 1984.
- Symon, Keith R., Mecânica, Rio de Janeiro, Campus, 1982.
- Tipler, P. A., Física, 2º Edição, Guanabara, 1985.

Internet

Palavras-chave para a obtenção de mais informações sobre:
Centro de massa: “centro de massa”, “baricentro”, “Varignon”, “polígono funicular”.
Teoremas de Pappus: “pappus”, “guldin”.
Aplicações: “prensa”, “estampo”.
Pedra de Tandil: “pedra movediza de Tandil”.

Sites:

www.lapiedramovediza.com.ar

<http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/nematostatica/arcprob/eg.html>

<http://www.ciencia.net/VerArticulo/Equilibrio-de-Cuerpos?idArticulo=5136>

Agradecimentos:

Prof. Reinaldo Camargo Rigitano; IFGW - Unicamp

Prof. José Joaquim Lunazzi; IFGW - Unicamp

Milton Kazunori Hirata, pela formatação deste texto.

Favor enviar críticas, correções e sugestões para: miltonkhirata@uol.com.br.