CENTRO DE MASSA

Aluno: Miguel Kazuhiro Hirata, RA 880649
Orientador: Reinaldo Camargo Rigitano

Introdução

No cotidiano, muitas vezes, inconscientemente, nos deparamos com situações onde o conceito de centro de massa está envolvido. Como exemplo, pode-se citar a caçamba de um caminhão contendo uma carga relativamente pesada. Se esta carga estiver concentrada em uma das laterais da caçamba (figura 1), existe grande risco do caminhão tombar ao executar uma curva devido à inércia, pois a carga como um todo, está em desequilíbrio em relação ao eixo longitudinal do caminhão. Além do quê, haverá um desgaste não uniforme de pneus e suspensão. Se a carga estiver distribuída como na figura 1, o caminhão poderá tombar se a curva for à direita, mas não tombará se for à esquerda. Entretanto, ao longo do trajeto, existem curvas à esquerda e à direita e o bom senso pede que a carga seja distribuída como na figura 2, ou seja, o centro de massa da carga deverá estar localizado sobre o eixo longitudinal central do caminhão.

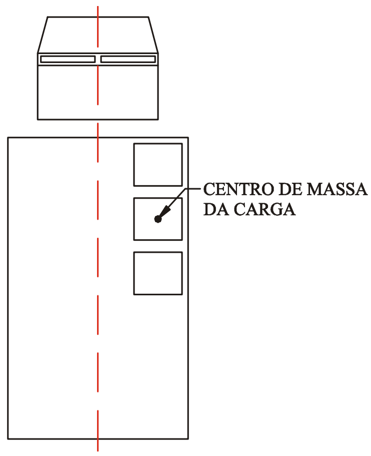

Figura 1: Carga mal distribuída.

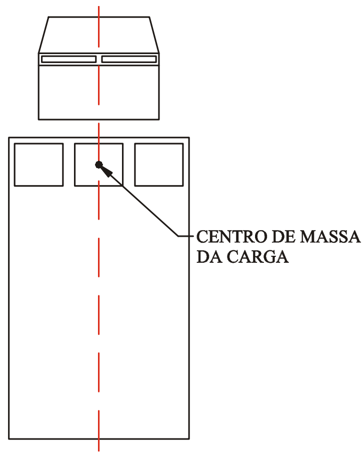

Figura 2: Carga bem distribuída.

Ao longo deste texto, serão abordados os conceitos de centro de massa e centro de gravidade, aplicações e métodos analíticos e gráficos para obtenção do centro de massa.

Centro de massa e centro de gravidade

Se tivéssemos que localizar um corpo no espaço tridimensional, ele seria representado por um ponto, e este ponto é o centro de massa. De outra forma, pode-se dizer que se tivéssemos que concentrar toda a massa de um corpo em um único ponto, este ponto seria o centro de massa.

Em tese, um objeto plano apoiado sobre uma haste fina estará em equilíbrio se o ponto de apoio estiver localizado no centro de massa (figura 3).

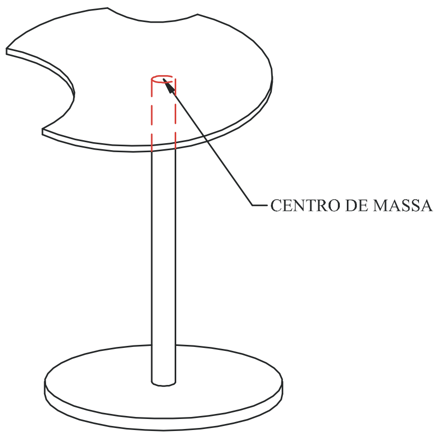

Figura 3: Objeto plano apoiado no centro de massa.

Centro de gravidade é um termo usado para denominar o ponto onde um corpo se equilibra levando-se em conta a aceleração da gravidade local. Sabe-se que o campo gravitacional da Terra não é uniforme. A aceleração da gravidade na superfície média da Terra é de 9,83 m/s^2 e no monte Everest é de 9,80 m/s^2 ou seja, um corpo pesa menos em grandes altitudes do que ao nível do mar. Assim, num corpo suficientemente longo que tenha suas extremidades localizadas em campos gravitacionais diferentes (obviamente, este é um exemplo idealizado), o centro de gravidade estará mais próximo da região onde a aceleração da gravidade é maior (figura 4).

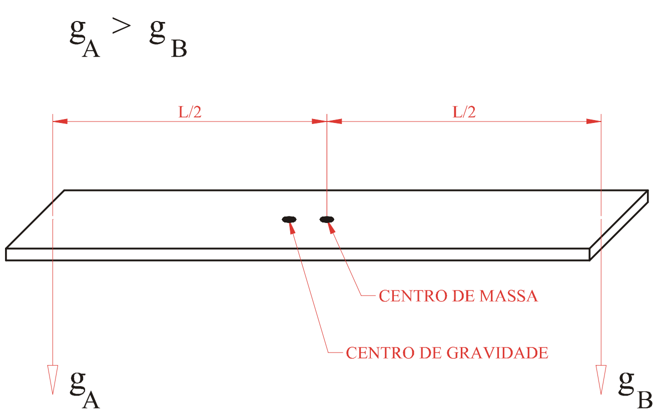

Figura 4: Centro de gravidade em um campo gravitacional não uniforme.

Então, o centro de massa é uma característica intrínseca do corpo e independe de fatores externos; já o centro de gravidade é influenciado pelo campo gravitacional conforme pode se observar no exemplo da figura 4. Se o campo gravitacional for uniforme, o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

Cada corpo tem o seu centro de massa, mas um conjunto de corpos distribuído discretamente no espaço também tem um centro de massa bem definido. Neste caso, o centro de massa depende da localização de cada corpo (figura 5).

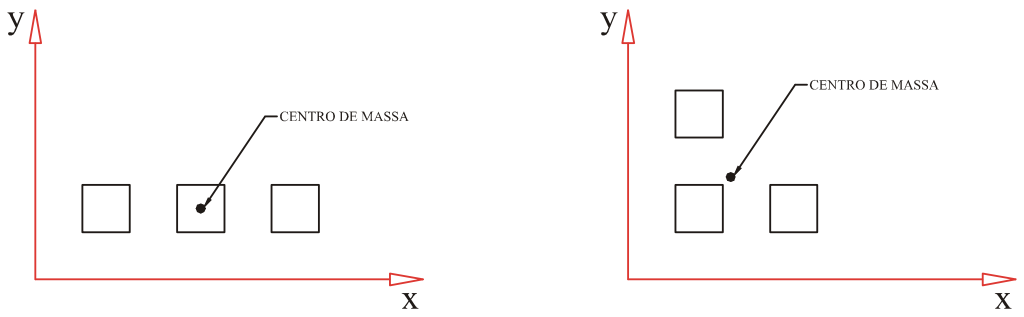

Figura 5: Centro de massa de uma distribuição discreta de partículas.

Até o momento, temos nos referido ao centro de massa de "massas" mas podemos estender o conceito também a vetores tais como velocidade, força, etc. Neste caso, além do módulo, a direção e o sentido são importantes para se determinar o centro de massa.

Baricentro é um outro termo utilizado para designar centro de massa. Etimologicamente significa centro de gravidade, mas a denominação se aplica adequadamente a todos os casos sem perda de clareza. Centróide também é um termo bastante comum e que tem aplicação geral.

Para que haja uma distinção, a seguinte terminologia poderia ser adotada:

Centro de massa: quando somente massas estão envolvidas e não há influencia do campo gravitacional;

Centro de gravidade: quando há influencia de um campo gravitacional não uniforme. Neste caso, o termo pode se aplicar a massas e vetores;

Baricentro: aplica-se a todos os casos, inclusive a vetores sem influencia do campo gravitacional.

Determinação experimental do centro de massa

Como exemplo, tomemos um corpo plano bidimensional. Pendura-se este corpo por um ponto qualquer e traça-se uma linha vertical passando pelo ponto ao qual o corpo está pendurado. Em seguida, repete-se o procedimento tomando-se um outro ponto (figura 6). A intersecção das duas linhas é o centro de massa.

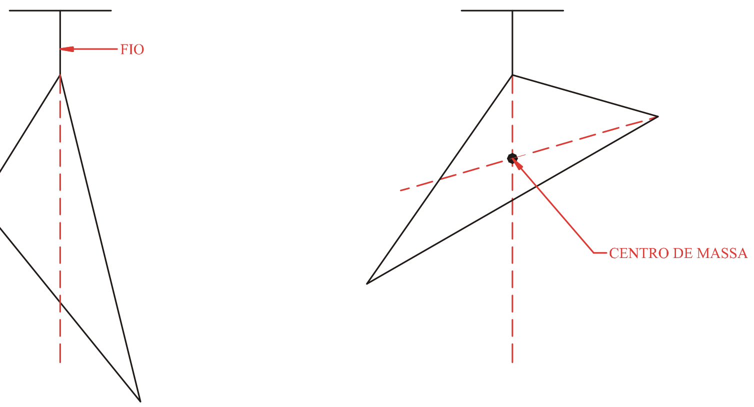

Figura 6: Experimento para obter o centro de massa de um objeto plano.

A linha vertical se justifica porque o experimento é apoiado na força gravitacional cuja direção é normal à superfície terrestre. Deixando o corpo em repouso, o que se obtém é a linha de atuação da força gravitacional resultante agindo sobre o corpo como um todo. Para determinar o ponto, basta repetir o processo para um outro ponto qualquer. Para um corpo tridimensional, o procedimento é o mesmo, mas, agora, para três pontos diferentes situados em dois planos distintos.

É interessante notar que, embora o experimento utilize a força gravitacional, o que se obtém é, efetivamente, o centro de massa geométrico e, mais ainda, mesmo que as linhas de atuação sejam obtidas em campos gravitacionais diferentes, o ponto obtido será o mesmo, pois a direção dos campos gravitacionais é sempre normal à superfície da Terra.

Determinação analítica do centro de massa

O centro de massa de um corpo regular deve estar sobre qualquer eixo de simetria que o corpo possua. Por exemplo, o centro de massa de um bastão uniforme está sobre o eixo do bastão, na metade da sua altura. O centro de massa de um cilindro uniforme está sobre o seu eixo, a meio caminho entre as bases.

Para determinar o centro de massa de um sistema constituído por diversos corpos, precisamos primeiro determinar o centro de massa dos corpos individuais. O centro de massa de um sistema de dois bastões está sobre a reta que une o centro de massa dos bastões separados, conforme mostra a figura 7. Isto porque os corpos, quaisquer que sejam os seus formatos, podem ser considerados entidades pontuais representados pelos seus centros de massa.

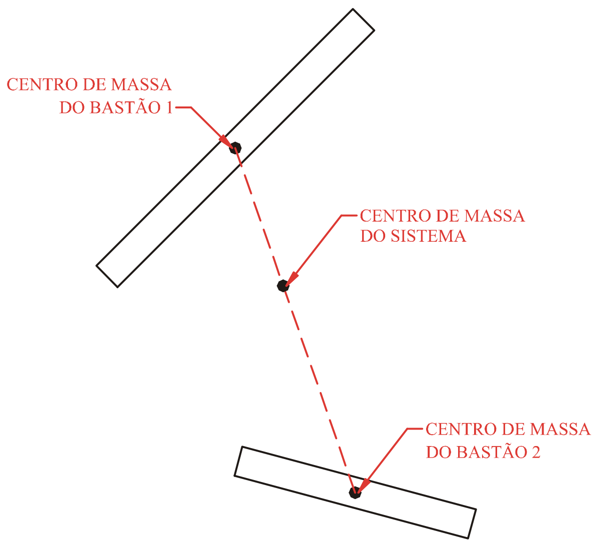

Figura 7: Centro de massa de um sistema de dois corpos.

Consideremos um sistema de partículas de massa total $M = m_1 + m_2 + ... = \sum m_i$, onde m_i é a i-ésima partícula em relação a uma origem arbitrária. O centro de massa do sistema é definido pelo seu vetor posição "r", dada por:

$$M.r = m_1.r_1 + m_2.r_2 + ... = \sum m_i.r_i \qquad (1)$$

Inicialmente, mostraremos que o centro de massa, definido pela equação (1), coincide com o centro de gravidade do sistema num campo gravitacional uniforme. Para simplificar, vamos imaginar uma figura plana localizada no plano “xy”, conforme a figura 8. Se escolhermos a origem no centro de massa, o vetor posição “r” em relação à origem é nulo. A componente “x” da equação (1), com a origem no centro de massa, é, então:

$$0 = m_1.x_1 + m_2.x_2 + ... = \sum m_i.x_i$$

Se multiplicarmos cada termo desta equação pela aceleração da gravidade g, teremos:

$$0 = m_1.g.x_1 + m_2.g.x_2 + ... = \sum m_i.g.x_i \qquad (2)$$

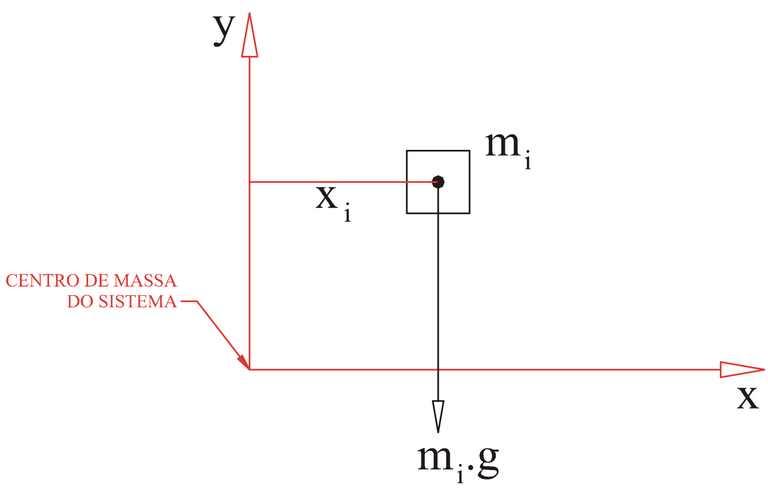

Figura 8: O centro de massa coincide com o centro de gravidade em um campo gravitacional uniforme.

Desde que m_ig é a força da gravidade exercida pela i-ésima partícula e x_i é o braço de alavanca da linha de ação da força em relação à origem no centro de massa, a grandeza m_igx_i é o torque exercido pela força de gravidade sobre a i-ésima partícula, em torno do centro de massa. A equação (2) afirma então que o torque total exercido pela força da gravidade em torno da origem é nulo. A origem, portanto, é o centro de gravidade além de ser o centro de massa. A única exigência para o centro de gravidade e o centro de massa coincidirem é a de a aceleração da gravidade “g” ser a mesma para cada partícula do sistema.

A equação (1) e o exemplo da figura 8 ilustram o centro de massa de uma distribuição discreta de partículas que pode ser estendida para o espaço tridimensional. Então, um corpo qualquer pode ser considerado um conjunto de partículas infinitesimais localizado num determinado referencial. Considerando-se esta distribuição contínua, na equação (1), a soma $\sum m_ix_i$ é substituída pela integral $\int x\, dm$, onde dm é um elemento de massa. Teremos então

$$M.x_{CM} = \int x\, dm$$

Como exemplo, calculemos o centro de massa de um aro semicircular ilustrado na figura 9. A origem do sistema de coordenadas está sobre um eixo de simetria da figura. Isto facilita sobremaneira o cálculo da integral.

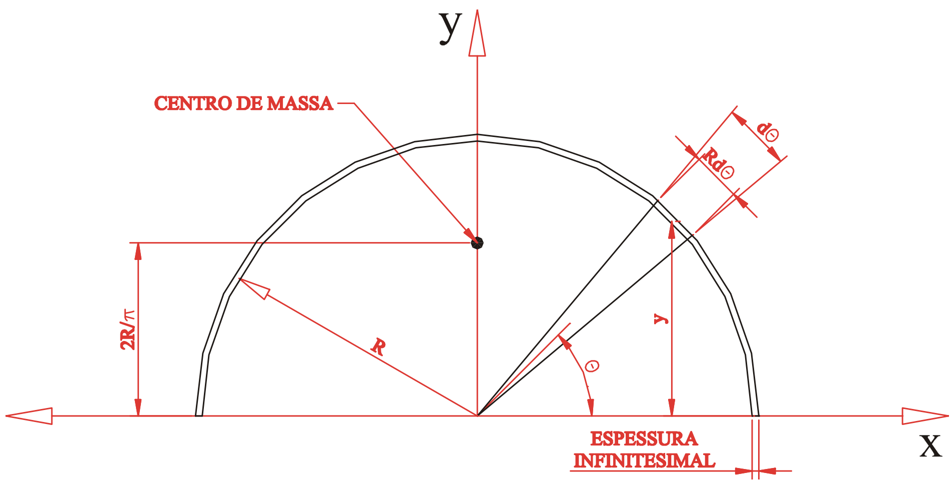

Figura 9: Geometria do cálculo do centro de massa de um aro semicircular

Intuitivamente, podemos observar que o centro de massa deverá estar no eixo “y” pois a todo elemento de massa em +x corresponde um outro igual em –x. A ordenada y do centro de massa, no entanto, não é nula. Também é intuitivo que o centro de massa não está na origem, que é o centro de curvatura do aro, pois todas as massas estão com as ordenadas positivas. Na figura, indicamos um elemento de massa de comprimento R dΘ na altura R.senΘ. A massa deste elemento é dm = λ.R.dΘ, onde λ = M/π.R é a massa por unidade de comprimento. Temos então que

$$M.y_{CM} = \int y.dm = \int R.\text{sen}\Theta.(\lambda.R.d\Theta) = R^2\lambda\int \text{sen}\Theta.d\Theta = 2.R^2.\lambda$$

Logo, y_{CM} = 2R/π. Note que a coordenada do centro de massa, como era de se esperar, não depende da massa.

Calculemos agora, o centro de massa de um semicírculo (figura 10). O raciocínio é análogo ao exemplo anterior com a diferença de que agora o elemento de massa é dm = σ.r.dr.dΘ, onde σ = 2.M/π.R^2 é a massa por unidade de área.

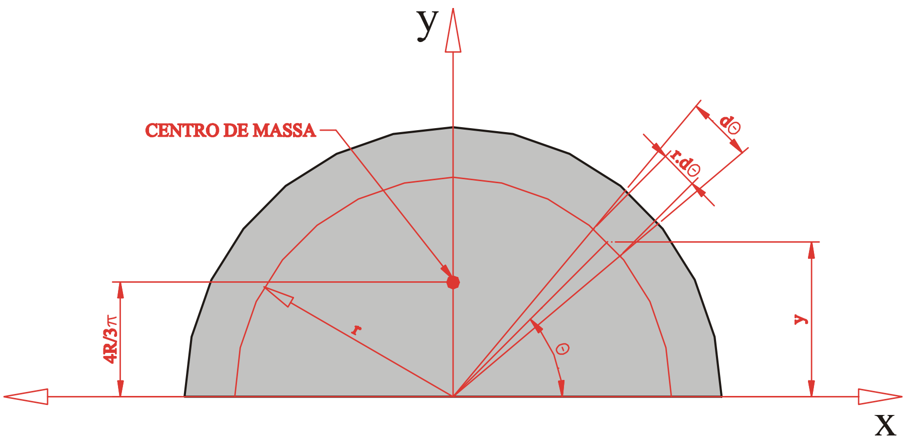

Figura 10: Geometria do cálculo do centro de massa do semi-círculo

Perceba que r agora varia e o elemento de área é $r.dr.d\Theta$. Temos então que

$$M.y_{CM} = \int y.dm = \int r.sen\Theta.(\sigma.r.dr.d\Theta) = \sigma\int r^2.dr \int sen\Theta.d\Theta = 2.\sigma.R^3/3$$

Logo, $y_{CM} = 4R/3\pi$.

Estes dois últimos exemplos mostram alguns fatos interessantes. O baricentro de uma entidade não está necessariamente "dentro" da entidade como pudemos verificar no caso do aro semicircular. Embora uma curva delimite uma superfície, seus baricentros não são necessariamente coincidentes a não ser que sejam perfeitamente simétricos como é o caso da circunferência e do círculo. Analogamente, um sólido e a superfície que o envolve terão baricentros coincidentes quando forem simétricos tridimensionalmente tal qual uma esfera.

No espaço de três dimensões, o procedimento é análogo. Calculemos o centro de massa de um hemisfério de massa M e raio R (figura 11).

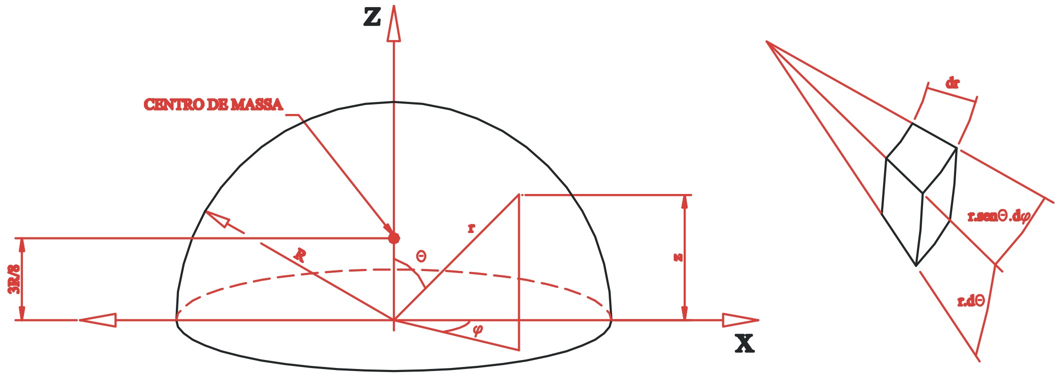

Figura 11: Centro de massa de um hemisfério.

Neste caso aplica-se uma integral tripla sobre um elemento de volume dado por $r^2.sen\Theta.dr.d\Theta.d\varphi$. Por simetria, o centro de massa deverá estar no eixo z. Logo:

$$M.z_{CM} = \int z\ dm = \int r.\cos\Theta.\ (\rho\ dV) = \rho\int r.\cos\Theta.(r^2.sen\Theta.dr.d\Theta.d\varphi).$$

$$M.z_{CM} = \rho \int r3\ dr.\int sen\Theta.\cos\Theta\ d\Theta.\int d\varphi.$$

Onde ρ é a densidade volumétrica.

$$M.z_{CM} = (3M/2\pi R^3).(R^4/4).(1/2).(2\pi).$$

Portanto, $z_{CM} = 3R/8$. Mais uma vez este resultado contraria um eventual senso intuitivo comum de que o centro de massa de um hemisfério é o mesmo de um semicírculo de mesmo raio.

Calculemos agora o baricentro de um conjunto de vetores distribuído discretamente em um plano referencial aleatório conforme mostra a figura 12.

O teorema de Varignon diz que o momento da resultante de um sistema de vetores em relação a um ponto O é igual à soma algébrica dos momentos de cada um dos vetores em relação ao mesmo ponto. Em outros termos:

$$R.d = \sum F_i.d_i$$

Onde R é o módulo da resultante, d_i's são as distancias dos vetores até o ponto O e os F_i's são os módulos dos vetores.