

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)  
Instituto de Física Gleb Wataghin (IFGW)

F 809 – Instrumentação para Ensino  
1º Semestre 2006  
21/06/2006

Efeito Talbot ou “Auto-imagens por Difração”



Aluna: Aya Hase RA 015540  
Orientadora: Profa. Lucila D. Cescato  
Coordenador do curso: Prof. Lunazzi

14-1

Sumário

---

1. Resumo.....	14-3
2. Introdução.....	14-3
3. Teoria.....	14-3
4. Parte Experimental.....	14-7
5. Resultados e Análise.....	14-9
6. Conclusão.....	14-12
7. Considerações Finais.....	14-12
8. Bibliografia.....	14-13
9. Referências.....	14-14

## 1. Resumo

---

Este projeto visa mostrar um efeito de difração [1] que ocorre em óptica, o efeito Talbot, através de duas montagens experimentais relativamente simples: uma utilizando o laser de He-Ne mais todo um aparato do laboratório de óptica, e outra simplificada com laser de caneta. Trata-se de um experimento que servirá para ter uma melhor noção do que é a difração, podendo seu conceito ser utilizado em várias áreas, tais como litografia, nanotecnologia e holografia.

## 2. Introdução

---

Quando um objeto periódico (como, por exemplo, uma grade de difração [2]) é iluminado com uma fonte de luz coerente, imagens do objeto aparecem a certas distâncias periódicas deste. Este efeito é chamado de efeito Talbot [3] ou formação de Auto-Imagens.

O efeito Talbot foi primeiramente observado pelo cientista inglês Henry Fox Talbot (1800-1877) em 1836 e explicado posteriormente pelo Lord Rayleigh, em 1880, como sendo uma consequência natural da difração de Fresnel [4].

A distâncias intermediárias entre as autoimagens, aparecem também outras imagens com frequência dobrada que são chamadas de sub-imagens [4]. Quando um objeto com periodicidade em duas dimensões é utilizado, este efeito fica mais rico devido a diversidade de imagens que podem ser formadas [5].

## 3. Teoria

---

### I) Efeito Talbot para uma grade de difração

Consideremos o caso de uma grade com amplitude sinusoidal fina. Para simplificar, nós desprezaremos a extensão finita da grade e concentrar nos efeitos de difração e propagação da estrutura periódica de campos transmitidos pela grade.

A geometria está ilustrada na Fig. (1). A grade é modelada como sendo uma estrutura de transmissão com amplitude de transmitância:

$$t_A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[ 1 + m \cos\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right) \right] \quad (1)$$

com período  $d$  com as linhas da grade paralelas na direção do eixo  $\eta$ . O campo e a intensidade serão calculados a uma certa distância  $z$  da grade. A estrutura é iluminada por uma onda plana incidente tal que o campo imediatamente atrás da grade seja igual à amplitude de transmitância (1).

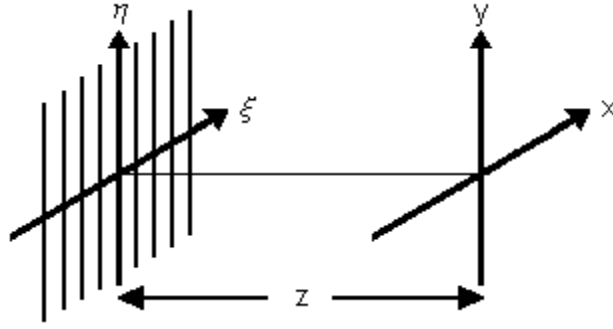


Figura 1 - Geometria da grade de difração

Para achar a solução de (1) deve-se primeiramente encontrar o espectro de frequência espacial do campo transmitido pela estrutura. Para tal fim, aplica-se a transformada de Fourier em (1), obtendo:

$$F\{t_A(\xi, \eta)\} = \frac{1}{2}\delta(f_X, f_Y) + \frac{m}{4}\delta\left(f_X - \frac{1}{d}, f_Y\right) + \frac{m}{4}\delta\left(f_X + \frac{1}{d}, f_Y\right) \quad (2)$$

Agora, a (2) possui um valor na origem, e quando desenvolvido nas frequências  $(f_X, f_Y) = \left(\pm \frac{1}{d}, 0\right)$ , tem-se:

$$H\left(\pm \frac{1}{d}, 0\right) = \exp\left(-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \quad (3)$$

Assim, após a propagação a uma certa distância  $z$  atrás da grade, a transformada de Fourier do campo fica:

$$F\{t_A(\xi, \eta)\} = \frac{1}{2}\delta(f_X, f_Y) + \frac{m}{4}e^{-j \frac{\pi \lambda z}{L^2}}\delta\left(f_X - \frac{1}{d}, f_Y\right) + \frac{m}{4}e^{-j \frac{\pi \lambda z}{L^2}}\delta\left(f_X + \frac{1}{d}, f_Y\right) \quad (4)$$

Transformando inversamente este espectro encontra-se o campo a distância  $z$  da grade, dado por:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{m}{4}e^{-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}}e^{j \frac{2\pi x}{d}} + \frac{m}{4}e^{-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}}e^{-j \frac{2\pi x}{d}} \quad (5)$$

Simplificando (5):

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \left[ 1 + me^{-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}} \frac{e^{j \frac{2\pi x}{d}} + e^{-j \frac{2\pi x}{d}}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + me^{-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] \quad (6)$$

Finalmente, a distribuição de intensidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |U(x, y)|^2 = U(x, y).U^*(x, y) \Rightarrow \\
 \Rightarrow I(x, y) &= \frac{1}{4} \left[ 1 + m e^{-j \frac{\pi \lambda z}{d^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] \left[ 1 + m e^{+j \frac{\pi \lambda z}{d^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow I(x, y) &= \frac{1}{4} \left[ 1 + 2m \cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Supõem-se três casos especiais:

### 1) Auto-imagens

Para  $\frac{\pi \lambda z}{d^2} = 2n\pi$  ou  $z = \frac{2nd^2}{\lambda}$  (8), onde  $n$  é um inteiro. Isto implica em  $\cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) = 1$ . A intensidade observada a esta distância atrás da grade é:

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \left[ 1 + m \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right]^2 \quad (9)$$

o qual pode ser interpretado como a perfeita imagem da grade. Ou seja, é uma réplica exata da intensidade que seria observada logo atrás da grade. Estas imagens são chamadas de *imagens de Talbot*, ou simplesmente *auto-imagens*.

A primeira auto-imagem é calculada para  $n = 1$  na eq. (8):  $z = \frac{2d^2}{\lambda}$  (10)

Se  $n = 0$ ,  $z = 0$ , seria a imagem da própria superfície da grade.

### 2) Imagens Reversas

Para  $\frac{\pi \lambda z}{d^2} = (2n + 1)\pi$  ou  $z = \frac{(2n + 1)d^2}{\lambda}$  (11), tem-se que  $\cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) = -1$ . Assim:

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \left[ 1 - m \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right]^2 \quad (12)$$

Esta distribuição é também uma imagem da grade, mas defasado de  $180^\circ$ , ou *imagem reversa*. Esta também é uma *imagem de Talbot*.

Para  $n = 0$ , aparece a primeira imagem reversa, antes da primeira auto-imagem (se  $n = 1$ , seria a imagem reversa após a primeira auto-imagem):  $z_{rev} = \frac{d^2}{\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{2d^2}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} z$  (13), ou seja, é a metade da distância da primeira auto-imagem.

### 3) Imagens com frequência dobrada

Para  $\frac{\pi\lambda z}{d^2} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$  ou  $z = \frac{(n-\frac{1}{2})d^2}{\lambda}$  (14), tem-se  $\cos\left(\frac{\pi\lambda z}{d^2}\right) = 0$ . Assim:

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \left[ 1 + m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \right] = \frac{1}{4} \left[ \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) + \frac{m^2}{2} \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \quad (15)$$

Esta imagem possui o dobro da frequência da grade original e contraste reduzida. Tal imagem é chamada *sub-imagem de Talbot*.

Para  $n = 1$ :  $z_{fr.dob.} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{\lambda} = \frac{1}{4} \left( \frac{2d^2}{\lambda} \right) = \frac{1}{4} z$ . Ou seja, a cada  $\frac{1}{4}$  da distância em relação à auto-imagem, forma-se a sub-imagem de frequência dobrada.

A Fig. (2) mostra de modo bastante simples os três casos acima.

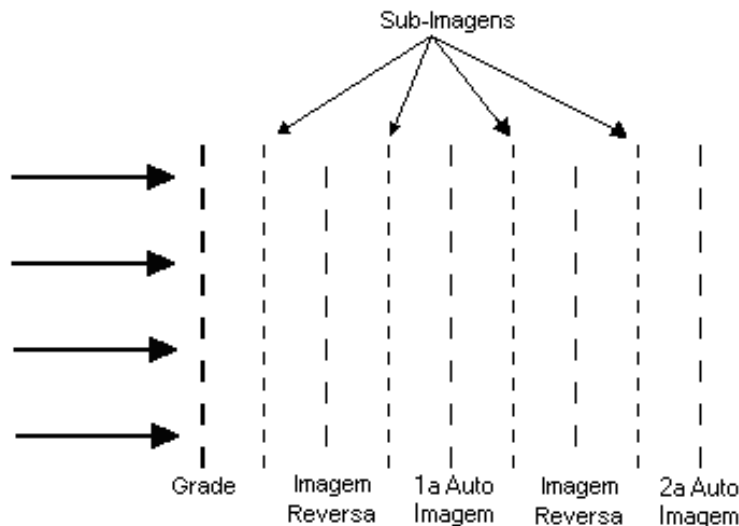
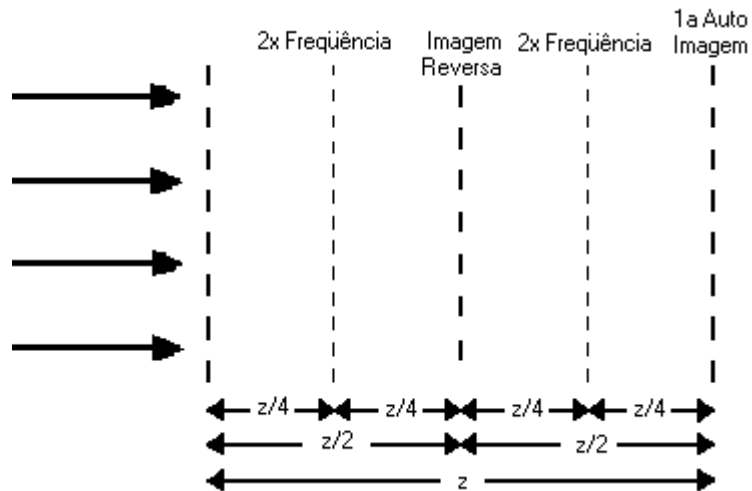


Figura 2 - Disposição das imagens de Talbot

## II) De um modo genérico:

Por 1), 2) e 3), pode-se ver que a primeira imagem reversa aparece na metade da distância da primeira auto-imagem. E a de frequência dobrada ocorre em dois lugares: a  $\frac{1}{4}$  e a  $\frac{3}{4}$  da distância da auto-imagem, atrás da grade, conforme Fig (3). Este pode ser generalizado para outros tipos de máscaras periódicas.



**Figura 3** - Disposição das primeiras auto-imagem, imagem reversa e sub-imagens de frequência dobrada

III) Fórmula da distância da 1ª auto-imagem para uma máscara de hexágonos

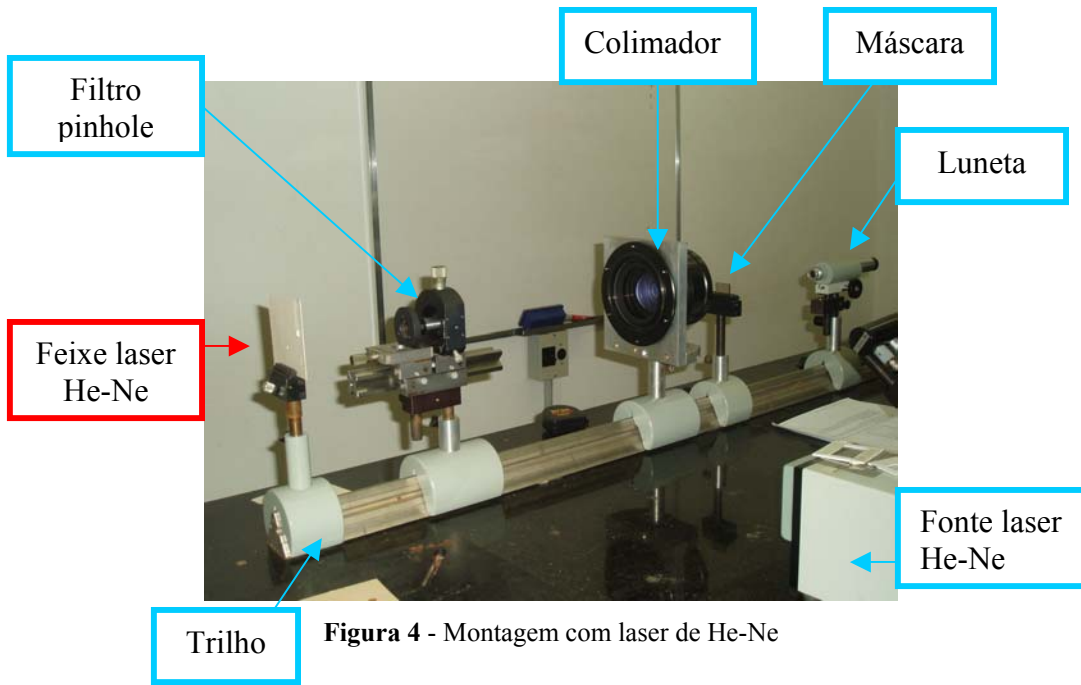
$$z_{hex} = \frac{3d^2}{2\lambda} \quad (16)$$

#### 4. Parte Experimental

Foram feitas as seguintes montagens:

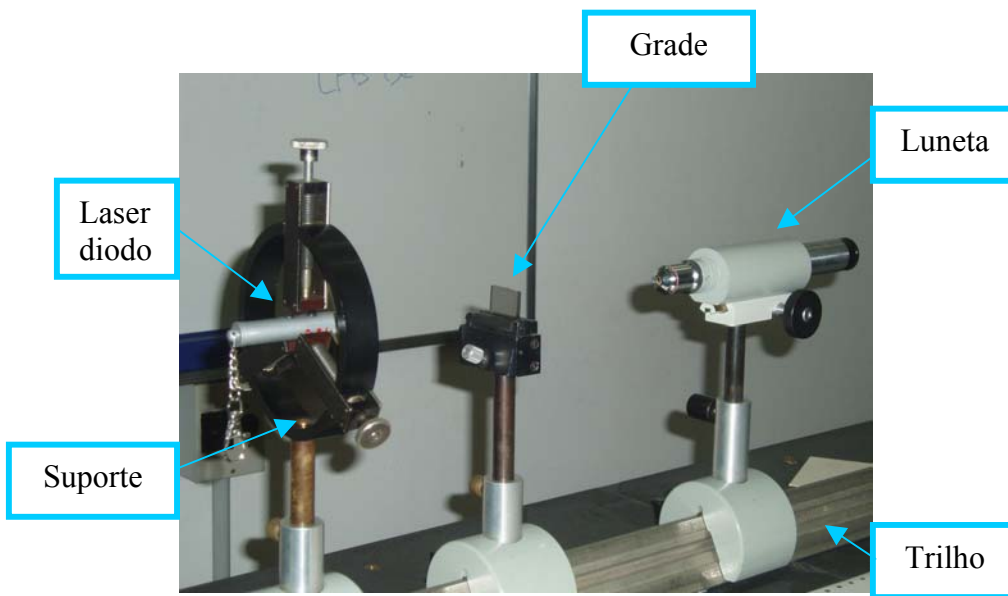
Materiais utilizados:

- 1) Montagem de laboratório do efeito Talbot (ver Figura 4):
  - Laser He-Ne ( $\lambda_{He-Ne} = 632,8nm$ )
  - Luneta
  - Colimador
  - Filtros
  - Grade de difração
  - Máscara de hexágonos ( $d_{grade} = (502,9 \pm 15,3)\mu m$ )
  - Máscara de círculos ( $d_{grade} = (497 \pm 8)\mu m$ )
  - Trilho de suporte dos componentes ópticos



2) Montagem simplificada (ver Figura 5):

- Laser de diodo (laser de caneta) ( $\lambda_{diodo} = (650 \pm 10)nm$ )
- Suporte para a caneta
- Luneta
- Grade de difração ( $d_{grade} = (259 \pm 8)\mu m$ )
- Trilho de suporte dos componentes ópticos
- Filtros (apenas para reduzir intensidade)





Todo o sistema foi alinhado cuidadosamente para evitar que a luz não chegasse na luneta conforme o aumento da distância entre este e a máscara.

Com essas montagens foi possível observar as várias imagens formadas

## 5. Resultados e Análise

---

### 1) Comparando os resultados em uma tabela

Tabela 1: valores obtidos por fórmulas (calculados) e pelo laboratório das distâncias da primeira auto-imagem (z) para a grade e hexágono; e da primeira imagem reversa (z rev) para a grade (para laser de He-Ne).

Máscara	Grade	Hexágono
z calculado (cm)	21.1 ± 0.9	59.9 ± 2.6
z medido (cm)	20.8 ± 0.5	61.2 ± 0.5
z rev. calculado (cm)	10.5 ± 0.9	29,9 ± 2,6
z rev. medido (cm)	10.4 ± 0.5	-

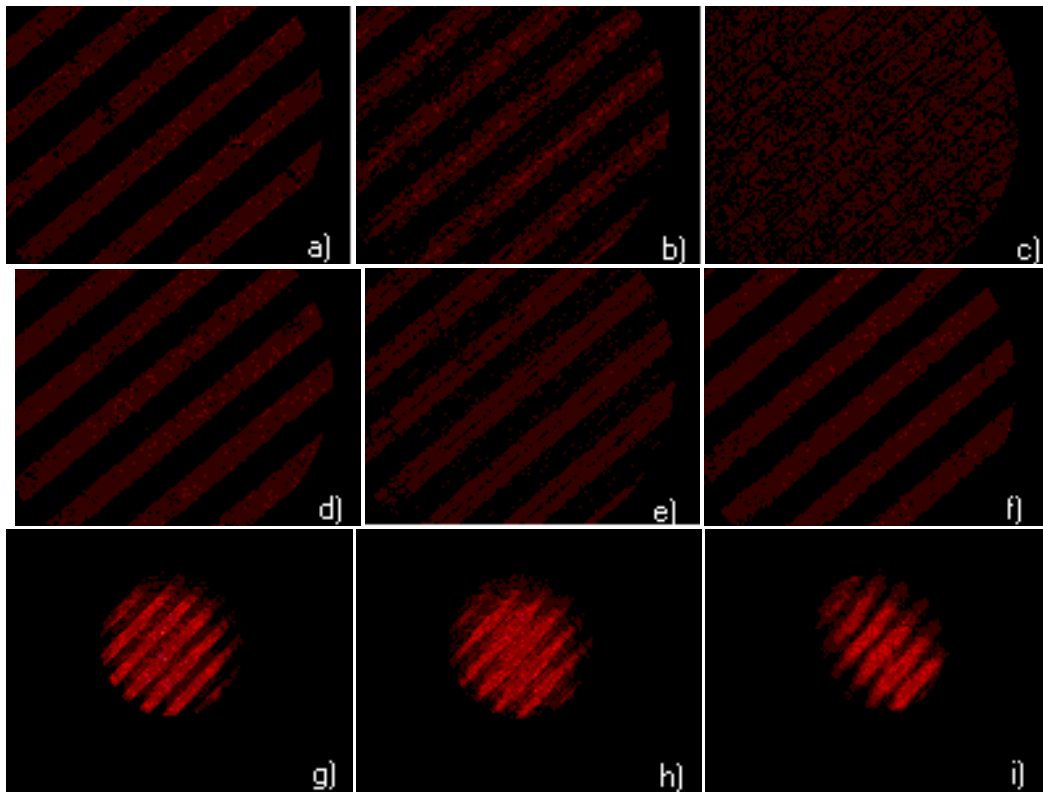
Analisando os valores e comparando-os é fácil de notar que os medidos estão dentro do erro dos calculados. Só não foi possível obter a distância medida da primeira imagem reversa do hexágono, pois esta não pôde ser visualizado experimentalmente.

Tabela 2: valores obtidos por fórmulas (calculados) e pelo laboratório das distâncias da primeira auto-imagem (z) e da primeira imagem reversa (z rev) para a grade (para laser de diodo).

Máscara	Grade
z calculado (cm)	20.6 ± 0.9
z medido (cm)	20.8 ± 0.5
z rev. calculado (cm)	10.3 ± 0.9
z rev. medido (cm)	10.5 ± 0.5

Analisando os valores da Tabela 2, pode-se ver também que os valores medidos estão dentro do erro dos calculados.

2) Fotos do efeito Talbot da grade de difração de ambas as montagens

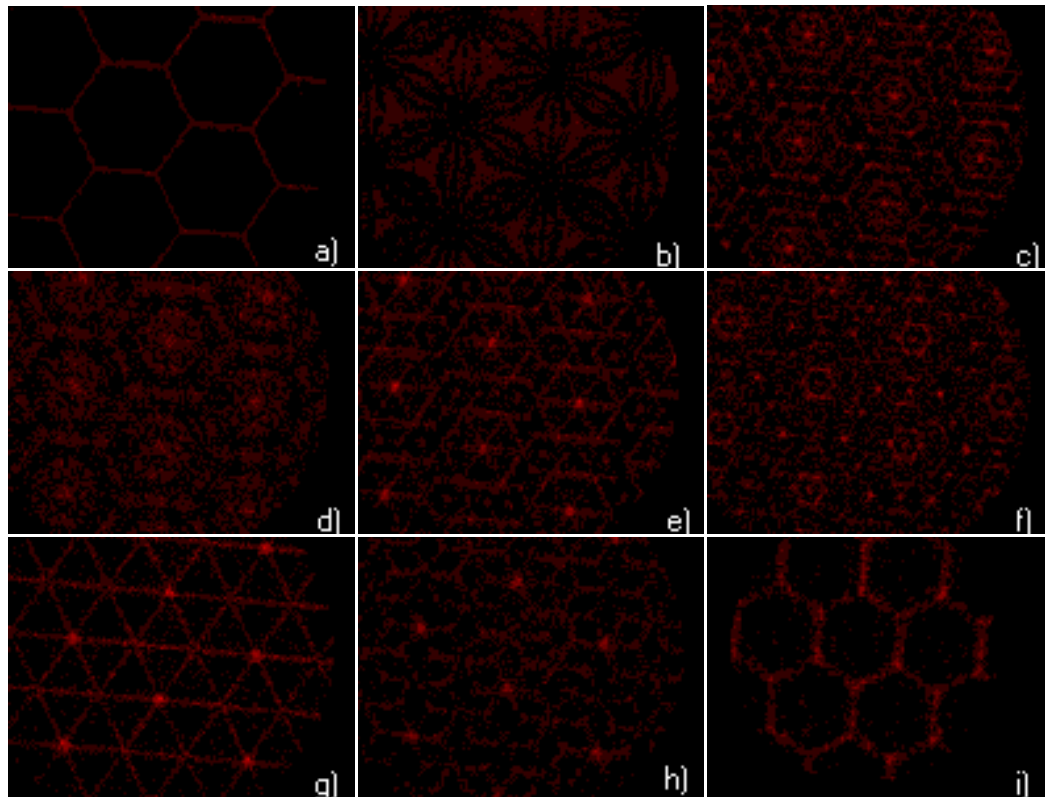


**Figura 6** - Laser de He-Ne: a) imagem da superfície; b), c), e) sub-imagens; d) imagem reversa; f) primeira auto-imagem. Laser de Diodo: g) imagem da superfície; h) sub-imagem; i) primeira auto-imagem.

Observando as imagens obtidas, vê-se a formação de sub-imagens, da imagem reversa e a auto-imagem da grade, tanto do laser de He-Ne como o de diodo. No entanto, as imagens são menos nítidas do laser de caneta, devido ao seu feixe divergente e não uniforme, diferentemente de um feixe de laser He-Ne colimado.

Durante o experimento, infelizmente, não foi possível observar nitidamente a formação da sub-imagem de frequência dobrada.

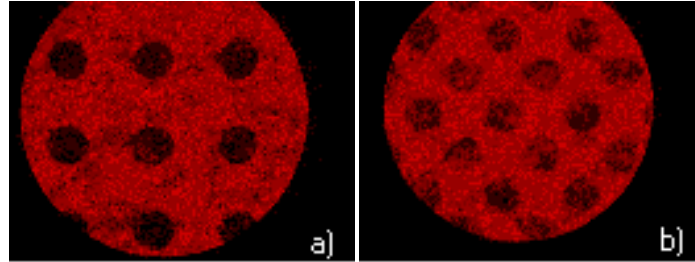
3) Fotos do efeito Talbot da máscara de hexágonos



**Figura 7** – Laser de He-Ne: a) imagem da superfície; b), c), d), e), f), g), h) sub-imagens; i) primeira auto-imagem de Talbot.

Com a máscara de hexágonos é claramente visível as mudanças das sub-imagens conforme o aumento da distância da luneta em relação à máscara. Foram obtidas várias figuras bonitas com padrão geométrico hexagonal até a formação da auto-imagem.

#### 4) A sub-imagem de Talbot com frequência dobrada da máscara de círculos



**Figura 8** – a) imagem da superfície; b) sub-imagem com frequência dobrada.

Foi utilizada a máscara de círculos apenas para mostrar que há sub-imagem de frequência dobrada. Infelizmente a auto-imagem não ficou nítida visualmente.

## 6. Conclusão

---

Os resultados numéricos obtidos foram coerentes com a parte teórica tendo um erro aceitável.

No caso da máscara de círculos não foi possível obter boas sub-imagens, a imagem reversa e a auto-imagem, pois, tendo muita sujeira (gordura, má impressão dos círculos) na própria máscara, houve difração desta, implicando em pouca nitidez das imagens formadas, parecendo mais uns borrões de vermelho e preto.

Mas no geral, no caso da grade de difração e da máscara de hexágono, com o laser de He-Ne, foram obtidas ótimas imagens e sub-imagens. É muito interessante que com apenas o deslocamento da luneta obtêm-se muitas imagens distintas, todos derivados de um conceito sempre presente na óptica: a difração.

A maior dificuldade foi com o laser de diodo que, sendo um feixe de luz divergente, conforme aumenta o distanciamento da luneta, perde muita luz facilmente, chegando apenas uma parcela ou quase nada, impossibilitando a visualização das imagens. Mas como a primeira auto-imagem da grade se forma em torno de 20 cm foi possível observar as imagens.

## 7. Considerações Finais

---

A construção deste experimento é bastante simples, portanto, acessível a escolas de ensino médio e até fundamental. Terá talvez uma dificuldade em arrumar uma lente que aumente as imagens (no caso, a luneta foi utilizada) e as máscaras, que podem ser impressas em transparências.

## 8. Bibliografia

---

- [1] <http://www.diptech.com.br/seminars/difracao/diffraction.html>
- [2] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/grating.html>
- [3] Zhou C., Wang W., Dai E., Liu L. (2004), “*Simple Principles of The Talbot Effect*”, Optics & Photonic News; Optical Society of America.
- [4] J. Goodman, “*Introduction to Fourier Optics*”, McGraw-Hill, Electrical and Computer Engineering Series, 2<sup>nd</sup> Edition.
- [5] “*Talbot Kaleidoscope*” (2006); Annals of Optics; IFGW, Unicamp; Avila, L. F.; de Menezes, J. W.; Cescato, L.

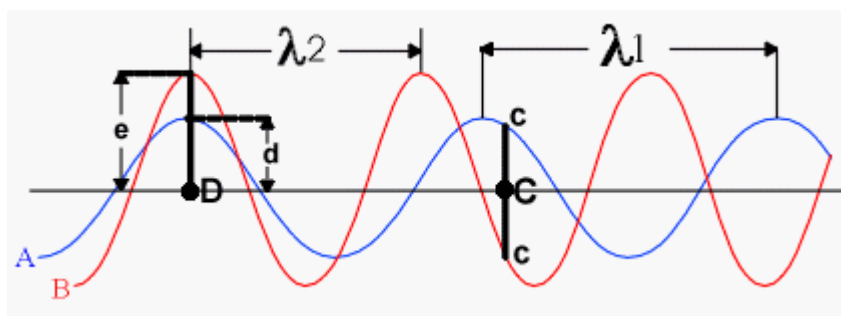
(...)

### 1.3 - Noções de interferência de ondas luminosas

#### 1.3.1 - Introdução

Para que se possa compreender bem como se dá a interferência das ondas luminosas, deve-se antes estudar como se dá a interferência das ondas produzidas na água.

[SAL. 1.955] Suponha que uma pedra seja atirada num ponto **A** da superfície da água tranqüila. Esse ponto se torna a origem de ondas que se propagam em todas as direções na superfície da água. Considere agora que na mesma superfície haja duas fontes de ondas **A** e **B** Figura 4. Em **A** se originam ondas de comprimento de onda  $\lambda_1$ , e em **B** ondas de comprimento de onda  $\lambda_2$ . Analisando a Figura pode-se notar que há pontos, como **C** por exemplo, em que acontece o seguinte: se só houvesse a onda proveniente de **A** o ponto estaria afastado de uma distância **c** acima da linha horizontal; se só houvesse a onda proveniente de **B** ele estaria afastado de uma distância **c** abaixo da linha horizontal. Mas como as duas ondas existem ao mesmo tempo, o ponto **C** fica animado, ao mesmo tempo pelos dois movimentos, um para cima e outro para baixo. A composição destes dois movimentos atribuirá a **C** um afastamento nulo, e o ponto **C** ficará então em repouso. Por outro lado há pontos como **D** em que acontece o contrário: se só houvesse a onda proveniente de **A** ele teria um afastamento máximo **d** acima da linha horizontal; se só houvesse a onda proveniente de **B** ele teria um afastamento máximo **e** acima da linha horizontal. Como existem as duas ondas simultaneamente, há a composição dos dois movimentos, e o ponto **D** terá um afastamento máximo acima da horizontal igual a **d + e**.



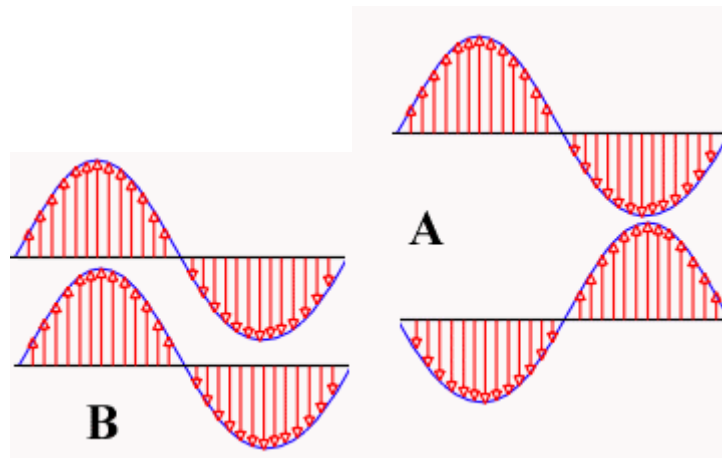
Na Figura foi considerado que as duas ondas são diferentes, isto é, que as amplitudes **d** e **e** são diferentes, os comprimentos de onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  diferentes, as velocidades de propagação diferentes, etc. Nesse caso, a situação de todos os pontos muda de instante para instante. Assim o ponto **C** que está em repouso para a posição das ondas na Figura, sairá do repouso nos instante seguinte; o ponto **D** que está com afastamento máximo na Figura não ficará constantemente com esse afastamento máximo; no instante seguinte o seu afastamento estará diminuído, posteriormente ele ficará em repouso.

Nesta ilustração foram utilizadas duas ondas diferentes, ou seja, diferente comprimento de onda, diferente amplitude etc. Quando se está lidando com interferência de luz porém, é mais apropriado se falar em interferência de ondas coerentes. Uma onda coerente apresenta as seguintes características [SAL. 1.955] :

- 1 - ter o mesmo comprimento de onda  $\lambda$  ;
- 2 - ter a mesma amplitude  $A$ ;
- 3 - ter a mesma frequência.

Isto porque a velocidade da luz é muito grande, e um efeito onde os pontos de mínimo e máximo se alteram a todo instante seria praticamente impossível de ser visualizado nestas circunstâncias.

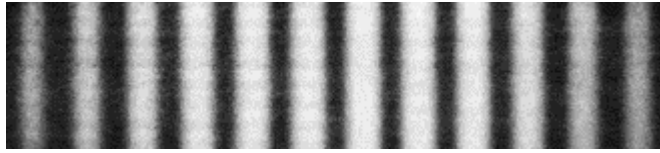
### 1.3.2 - Interferência da luz



[SAL. 1.955] Suponha agora a interseção de duas ondas luminosas coerentes. Essas duas ondas luminosas produzirão interferência. Haverá pontos do espaço, como **A** por exemplo

Figura 5a, em que existirão dois campos eletromagnéticos de mesma amplitude, mesma direção e sentidos opostos. Neste caso esses campos se anularão, de forma que não havendo campo eletromagnético este ponto ficará escuro. E haverá pontos, como **B** por exemplo, em que existirão dois campos eletromagnéticos de mesma direção e sentido, de forma que estes campos terão seus módulos somados e o ponto **B** será iluminado Figura 5b.

Os pontos escuros se dispõem segundo linhas chamadas franjas escuras; os pontos mais luminosos se dispõem segundo linhas chamadas franjas brilhantes. O conjunto de todas as franjas é chamado Figura de interferência, ou frangas de Young Figura 6.

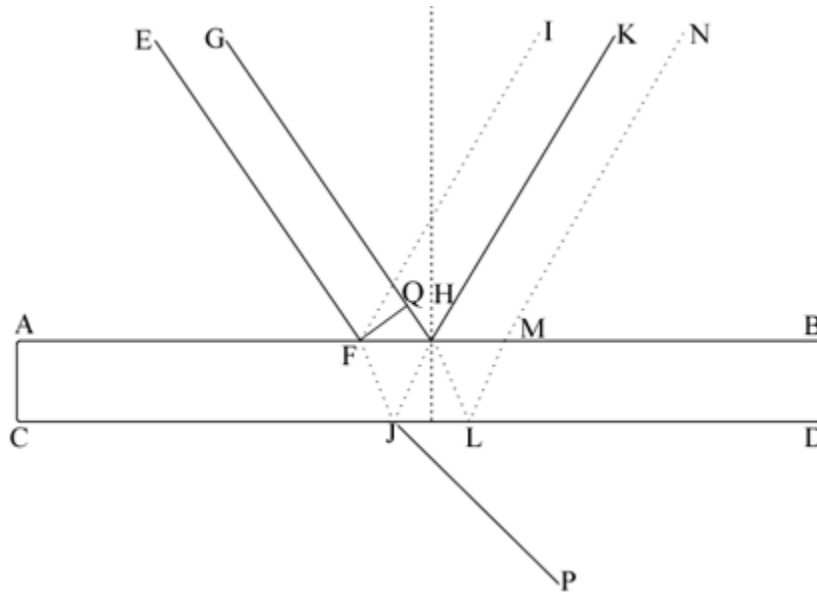


**Figura 6** Franjas de Young

### 1.3.3 - Interferência em lâminas delgadas

#### 1.3.3.1 - Luz monocromática

[SAL. 1.955] Considere que numa lâmina delgada de faces paralelas AB e CD, incida um feixe paralelo de raios monocromáticos como EF e GH Figura 7. O raio incidente EF dá um raio refletido FI e um refratado FJ. Este incidindo na segunda face da lâmina em J dá um raio emergente JP, e um refletido JH, que dá um raio que sai da lâmina segundo HK. Mas no ponto H incide um certo raio GH do feixe, que dá um raio refratado HL e um refletido HK. Logo, na direção HK há sobreposição de duas ondas: uma que proveio de EF, outra de GH. Essas duas ondas têm mesmo período e mesma amplitude, pois os raios EF e GH provém de uma mesma fonte. Mas os caminhos percorridos por estas duas ondas são diferentes, pois enquanto uma percorreu a distância  $FJ + JH$  dentro da lâmina, a outra percorreu  $QH$  fora da lâmina. Se essa diferença de caminho for um número ímpar de meio comprimento de onda, as duas ondas se extinguirão e HK será uma franja escura; haverá interferência. Se for um número inteiro de comprimento de onda será uma franja brilhante.



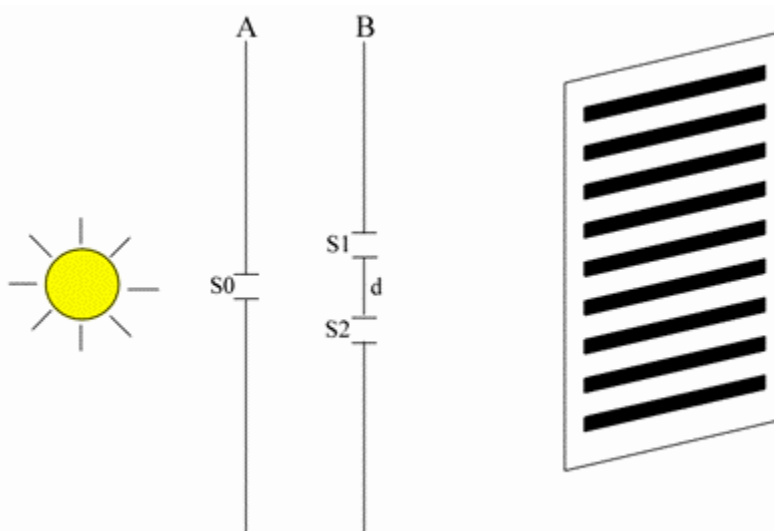
(...)



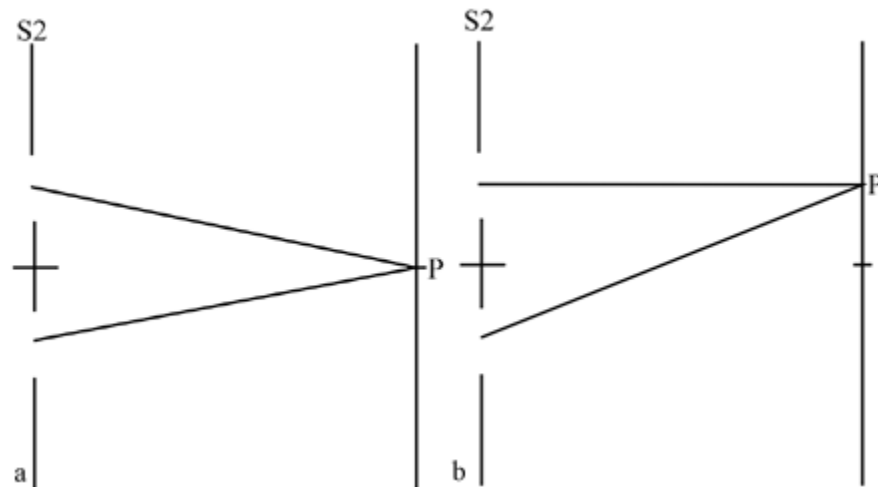
### 1.3.4 - Experiência de Young

O exemplo clássico de um experimento de interferência é creditado a Thomas Young, um físico britânico, no início do século XIX [BLA. 1.993]. Esta demonstração possibilitou o estabelecimento da teoria ondulatória da luz numa firme base experimental. Em suas experiências, Young conseguiu deduzir o comprimento de onda de luz, sendo essa a primeira vez que a medida dessa importante grandeza foi realizada.

Young fez com que a luz incidisse em um pequeno orifício **S0** aberto em um anteparo **A** Figura 8. A luz emergente dispersa-se por difração e incide nos orifícios **S1** e **S2** separados a uma pequena distância **d** no anteparo **B**. Ocorre aí nova difração, propagando-se duas ondas esféricas superpostas, através do espaço, à direita do anteparo **B** [HAL. 1.990].



Primeiramente será examinado o caminho traçado pela luz desde o orifício até o anteparo. Na Figura 9a é mostrado o caminho até o centro do anteparo. Os orifícios do anteparo **S2** estão arranjado simetricamente em relação ao do anteparo **S1**, assim sendo, as fases dos dois anteparos de **S2** são as mesmas. Claramente pode ser observado que ambas as fases são iguais, portanto a iluminação neste ponto será máxima devido ao fato de que não há diferença de fase. Já em uma posição oblíqua, como na Figura 9b, a situação é um pouco diferente. Claramente, os caminhos dos dois orifícios percorrem caminhos diferentes, tendo durações de tempo diferentes para atingir o ponto **P**. Como resultado, a fase relativa das ondas que chegam ao anteparo ao longo desses dois caminhos é diferente e a iluminação no ponto **P** do anteparo dependerá desta diferença de fase [BLA. 1.993]. O resultado disto é que haverá pontos com ausência total de luz provocando franjas escuras, devido à interferência provocado quando duas fases diferem de  $1/2$  comprimento de onda, regiões com concentrações maiores de luz provocando franjas brilhantes, provocada por interferência de duas fases iguais, e regiões intermediárias à brilhantes e escuras. O resultado pode ser observado na Figura 6.



**Figura 9.** Iluminação no anteparo. (a) Simétrica e (b) iluminação oblíqua.

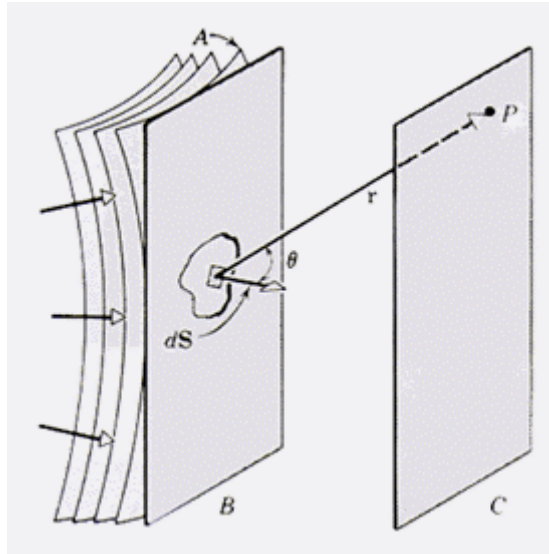
## 2 - Difração

### 2.1 - Introdução

[HAL. 1.990] Denomina-se difração o desvio sofrido pela luz ao passar por um obstáculo, tal como as bordas de uma fenda em um anteparo. Pode-se ver a difração de luz olhando-se para uma fonte luminosa distante, tal como um anúncio de neônio através da fenda formada entre dois dedos, ou observando a luz da rua que se escoia pelo tecido que recobre um guarda-chuva de pano. Usualmente, os efeitos de difração são diminutos, devendo ser procurados cuidadosamente. Além disso, a maioria das fontes de luz abrangem uma área extensa, de modo que a Figura de difração produzida por um dos pontos da fonte se superporá à das outras. Finalmente, as fontes luminosas ordinárias não são monocromáticas, de modo que os espectros dos vários comprimentos de onda se superporão, uma vez mais, o seu efeito se tornará menos evidente.

A difração foi descoberta por Francesco Maria Grimaldi (1.618-1663). sendo um fenômeno conhecido tanto por Huygens (1.629-1.695) quanto por Newton (1.642-1.727). Este último não reconheceu nele nenhuma justificativa a favor da teoria ondulatória da luz, enquanto que Huygens, embora cresse nessa teoria, não acreditava na existência de difração. Acreditava ele que suas ondas secundárias só agiam efetivamente no ponto de tangência com a envolvente comum, negando, pois, a possibilidade de haver difração.

Jean Augustin Fresnel (1.788-1827) usou corretamente o princípio de Huygens para explicar a difração. Naquela época supunha-se que a luz consistia de ondas mecânicas., produzidas em um éter onipresente. Porém Maxwell (1.831-1.879) mostrou que a natureza das ondas luminosas não era mecânica, mas, sim, eletromagnética. Eistein (1.879-1.955) chegou a concepção moderna dessas ondas, eliminando a necessidade de se postular um éter.



A Figura 10 ilustra um caso geral de difração. A superfície **A** é uma frente de onda que incide em um anteparo opaco **B**, contendo uma abertura de fonte arbitrária ; há, ainda, uma tela de difusão **C**, que recebe a luz que atravessa o orifício. Pode-se avaliar o espectro de intensidade luminosa produzido em **C**, subdividindo-se a frente de onda em áreas elementares **dS**, cada uma das quais se torna uma fonte de ondas secundárias de Huygens em expansão. Obtém-se a intensidade luminosa em um ponto **P**, arbitrário, somando-se as perturbações ondulatórias causadas pelas ondas secundárias que ai chegam, vindas de todos esses irradiadores elementares.

As perturbações ondulatórias que atingem o ponto **P**, diferem entre si em amplitude e fase porque (a) os irradiadores elementares estão a diversas distâncias de **P**, (b) a luz sai dos irradiadores formando os mais variados ângulos com a normal à frente de onda e (c) alguns irradiadores são bloqueados pelo anteparo **B** e outros não. Cálculos de difração - simples em princípio - podem tornar-se difíceis na prática. Os cálculos tem que ser repetidos para todos os pontos do anteparo **C** em que se quiser conhecer a intensidade da luz. Adota-se exatamente este processo para avaliar o espectro de intensidade produzida por uma fenda dupla.

[FER. 1.980] Pode-se dividir o estudo do fenômeno de difração em duas classes gerais. Na primeira, chamada difração de Fresnel, a fonte luminosa está a uma distância finita do obstáculo difrator, tem feixes de luz não paralelos e a Figura de difração resultante é estudada em um anteparo próximo ao obstáculo difrator.

Na segunda classe, chamada difração de Fraunhofer, a frente de onda incidente foi colimada por uma lente de modo que os feixes de luz fiquem paralelos. Após do obstáculo difrator é colocada outra lente e a Figura de difração resultante é examinada em um anteparo colocado no ponto focal da lente.

(...)

## 2.3 - Difração de Fresnel

[SER. 1.977] Considere que a luz proveniente de uma fonte pontual distante atinja um anteparo, passando através de uma pequena abertura. De acordo com a ótica geométrica, as bordas da abertura projetam sombras nítidas sobre o anteparo; luz alguma atinge a região de sombra.

Costuma-se distinguir dois casos: quando o anteparo está relativamente próximo à abertura, considerando-se as ondas secundárias que convergem em um ponto determinado, diz-se tratar de difração de Fresnel. Quando o anteparo está muito afastado da abertura, os raios que convergem em um ponto qualquer do anteparo podem ser considerados como paralelos entre si, e consideram-se então as ondas secundárias que se propagam em uma direção determinada; neste caso diz-se tratar de difração de Fraunhofer, a qual já foi abordada. Será tratada com mais detalhes neste momento da difração de Fresnel.

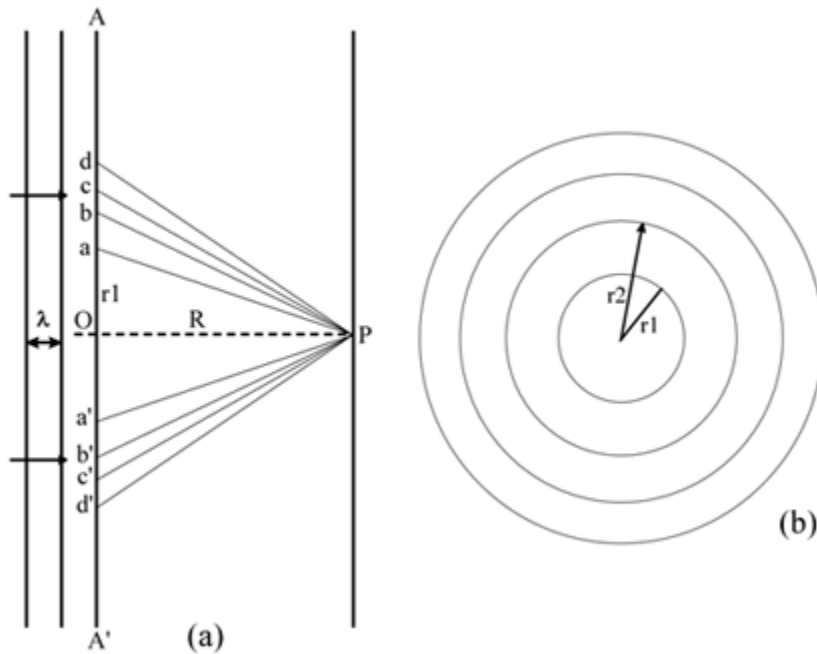
### 2.3.1 - Zonas de Fresnel

[SEA. 1.953] Considerando a Figura 15. Nela se faz que, sobre um anteparo, incidam ondas luminosas, de comprimento de ondas  $\lambda$ , provenientes de uma fonte puntiforme distante. Estando a fonte muito afastada, as superfícies de onda (uma das quais é  $AA'$ ) podem ser consideradas planas. O ponto  $P$  é um ponto qualquer do anteparo;  $R$  é a distância entre esse ponto e a superfície de onda considerada. Considere esferas concêntricas, de centro em  $P$  e raios iguais a

$$R + \lambda/2, R + 2\lambda/2, R + 3\lambda/2, \text{ etc.}$$

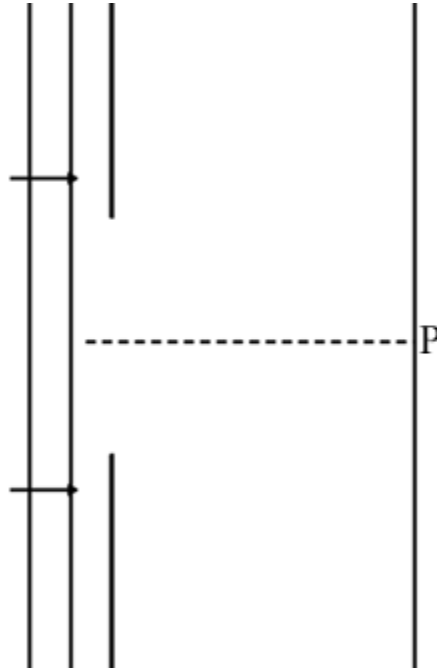
As intercessões dessas esferas com a superfície de onda  $AA'$  determinam circunferências concêntricas, que intersectam o plano da Figura em  $a$  e  $a'$ ,  $b$  e  $b'$ ,  $c$  e  $c'$ , e assim por diante. A superfície de onda fica, assim, dividida em várias regiões, denominadas elementos de meio período, ou zonas de Fresnel, tais que a distância entre o ponto  $P$  e um outro ponto qualquer da circunferência que limita externamente uma zona é meio comprimento de onda maior que a distância entre o ponto  $P$  e um ponto qualquer da circunferência que limita internamente essa zona. A Figura 15b, na qual o plano da superfície de onda  $AA'$  é o plano da Figura, mostra as diversas zonas; a zona central é um círculo, e as demais são coroas circulares. Pode-se calcular o efeito resultante, no ponto  $P$ , considerando-se essas zonas, pequenas porém finitas, como fontes luminosas elementares.

**Figura 15** Zonas de Fresnel em uma superfície de onda plana AA'



### 2.3.2 - Difração de Fresnel por um orifício circular

[SEA. 1.953] A Figura 16, representa um diafragma de abertura circular pequena, à frente de um anteparo pouco afastado; produzindo a difração de Fresnel. A luz que atinge o diafragma provém de uma



**Figura 16** Difração de Fresnel por um orifício circular

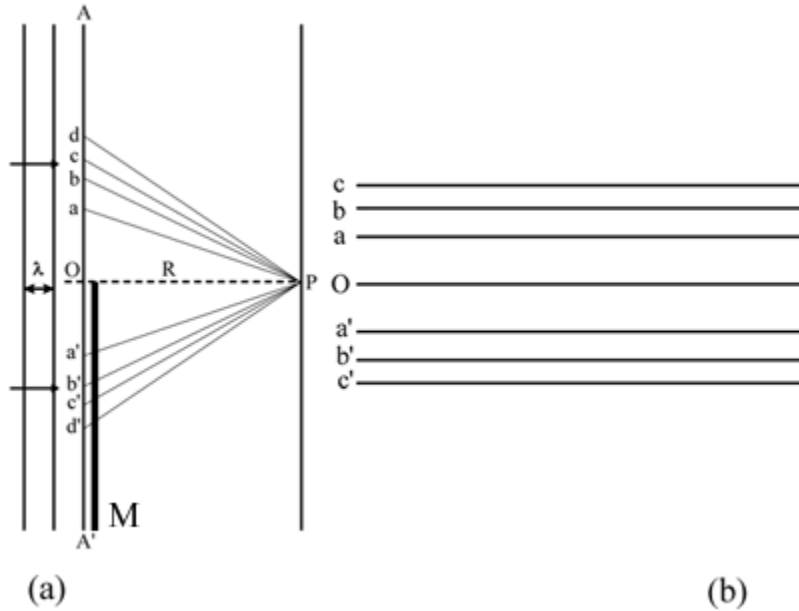
fonte puntiforme muito afastada, situada à esquerda. Considere, inicialmente, a intensidade da luz que atinge o ponto **P**, situado no centro da sombra geométrica, à medida que varia o diâmetro da abertura.

Suponha que o diâmetro da abertura seja tão pequeno que exponha apenas a primeira zona de Fresnel. Seja  $s_1$  a amplitude, no ponto **P**, do trem de ondas originado nessa zona. Aumentando o diâmetro da abertura de modo que seja exibida a segunda zona de Fresnel, a amplitude em **P** será  $s_1 - s_2$ . Como  $s_1$  é aproximadamente igual a  $s_2$ , a amplitude será nula. Aumentando novamente o diâmetro da abertura, a luz que atinge o ponto **P** diminui. Aumentar ainda mais o diâmetro de forma a expor as três primeiras zonas de Fresnel, a amplitude resultante será  $s_1/2 + s_3/2$ , isto é, a amplitude aumentará de novo neste ponto. Em geral quando a abertura expõe um número ímpar de zonas de Fresnel, o ponto **P** aparecerá brilhante, ao passo que quando o número de zonas é par, o ponto **P** permanecerá escuro.

### 2.3.3 - Difração pelas bordas retilíneas de um anteparo

Na Figura 17, **M** representa um anteparo de bordas retilíneas, e **P** é o traço de sua sombra geométrica, projetada sobre um segundo anteparo, e determinada por um trem de ondas planas monocromáticas, que se propaga da esquerda para a direita. A superfície da onda deve ser subdivida em zonas, mas de modo diferente do empregado no caso da difração por orifício circular. Com centro em **P**, e raios  $R + \lambda/2$ ,  $R + 2\lambda/2$ ,  $R + 3\lambda/2$ , etc. traçam

circunferências, que intersectam o traço da superfície de onda em **a** e **a'**, **b** e **b'**, etc.; divide-se então a superfície da onda em zonas de Fresnel, mediante retas passando pelos pontos **a**, **a'**, **b** e **b'**, etc., paralelas à borda retilínea do anteparo. Na Figura 17b é exibida a frente dessas zonas.



**Figura 17** Construção das zonas de Fresnel no caso de um anteparo de bordas retilíneas

Considere vários pontos do anteparo, situados ligeiramente acima e ligeiramente abaixo da borda da sombra geométrica. Em lugar de traçar-se diversos diagramas, um para cada ponto, é mais simples considerar **P** como representando todos esses pontos, e deslizando ligeiramente, para cima e para baixo, o anteparo que determina a sombra; essa também se deslocará para cima e para baixo, e o ponto **P** ficará justamente no interior, ou justamente no exterior, da sombra, como deseja-se.

Suponha que o anteparo seja deslocado para cima, até a altura do ponto **a**; o ponto **P** ficará abaixo do limite da sombra; a primeira zona de Fresnel, situada acima da linha média, bem como todas as zonas situadas abaixo dessa linha, estarão encobertas. No ponto **P** a amplitude será:

$$S = s_2 - s_3 + s_4 - \dots = s_2/2$$

e a intensidade será proporcional a  $(s_2/2)^2$ . Pela Figura vemos que a primeira zona é consideravelmente mais larga que as demais, portanto, **s<sub>2</sub>** é muito menor que **s<sub>1</sub>**. Não é nula, entretanto; embora a amplitude decresça rapidamente à medida que o ponto considerado se afasta do limite da sombra, não se anula subitamente nesse limite.

## 2.4 – Redes de difração

[TIP. 1.991] Instrumento útil para medição de comprimentos de onda de luz é a rede de difração, que é um dispositivo com um grande número de linhas, ou fenda, igualmente espaçadas numa superfície plana. Esta rede pode ser feita pelo corte de ranhuras paralelas, igualmente espaçadas, numa placa de vidro ou de metal, mediante uma máquina fresadora de precisão. Numa rede de reflexão, a luz se reflete nas cristas entre as ranhuras. Um disco fonográfico tem algumas propriedades de uma rede de reflexão. Na rede de transmissão, a luz passa pelos intervalos transparentes entre as ranhuras.

Imagine uma onda plana de luz que incide normalmente numa rede de transmissão. Admitimos que a largura de cada fenda na rede seja muito pequena, de modo que cada fenda forme um feixe amplamente difratado. A figura de interferência da rede num anteparo distante se deve a um grande número de fontes luminosas igualmente espaçadas. Os máximos de interferência estarão nos ângulos  $\theta$  dados por:

$$d \sin \theta = m\lambda \text{ Eq.07}$$

onde o número  $m$  é a ordem do máximo de intensidade. A posição de um máximo de interferência não depende do número de fontes, mas, quanto maior for este número, mais nítido e agudo será este máximo.

O poder de resolução da rede de difração se define como  $\lambda / |\Delta \lambda|$ , onde  $|\Delta \lambda|$  é a menor diferença entre dois comprimentos de onda vizinhos que pode ser resolvido e  $\lambda$  é o comprimento de onda aproximado das raias vizinhas. O poder de resolução é proporcional ao número de linhas da rede que estiverem iluminadas, pois quanto mais numerosas forem as fendas iluminadas, mais nítidos serão os máximos de interferência.

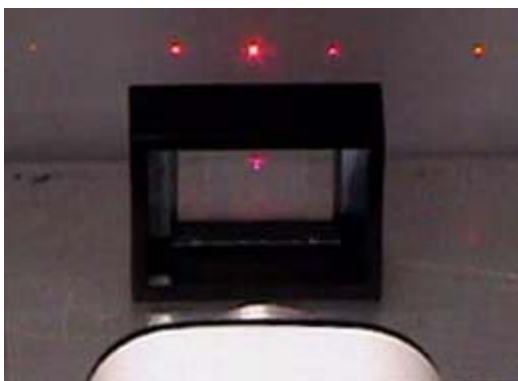
## 2.5 – Aplicações de difração: Holografia

Interessante aplicação das redes de difração é a produção de fotos tridimensionais denominadas hologramas. Numa fotografia comum, a intensidade da luz refletida por um objeto fica registrada num filme. Quando o filme for observado por luz transmitida, observa-se uma imagem bidimensional. Num holograma, um feixe de luz de laser é dividido em dois outros, um feixe de referência e um feixe-objeto. O feixe-objeto é refletido pelo objeto a ser fotografado e a figura de interferência dele com o feixe de referência é registrada num filme fotográfico. Conseguem-se este efeito pois a luz do feixe de laser é coerente, de modo que a diferença de fase relativa entre o feixe de referência e o feixe-objeto se mantém constante durante a exposição. As franjas de interferência registradas no filme fotográfico atuam que se fossem uma rede de difração. Quando o filme for iluminado por um feixe de luz de laser, forma-se uma réplica tridimensional do objeto.



## Diffraction Grating

When there is a need to separate light of different wavelengths with high resolution, then a diffraction grating is most often the tool of choice. This "super prism" aspect of the diffraction grating leads to application for measuring [atomic spectra](#) in both laboratory instruments and telescopes. A large number of parallel, closely spaced slits constitutes a diffraction [grating](#). The [condition for maximum intensity](#) is the same as that for the [double slit](#) or [multiple slits](#), but with a large number of slits the intensity maximum is very sharp and narrow, providing the [high resolution](#) for spectroscopic applications. The [peak intensities](#) are also much higher for the grating than for the double slit.



When light of a single wavelength, like the 632.8nm red light from a [helium-neon laser](#) at left, strikes a diffraction grating it is diffracted to each side in multiple orders. Orders 1 and 2 are shown to each side of the direct beam. Different wavelengths are diffracted at different angles, according to the [grating relationship](#).

[Illustration](#) [Calculation](#)

[Grating diffraction of helium-neon laser](#)

[Index](#)

[Grating concepts](#)

[Diffraction concepts](#)

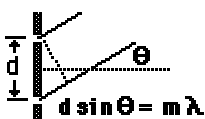
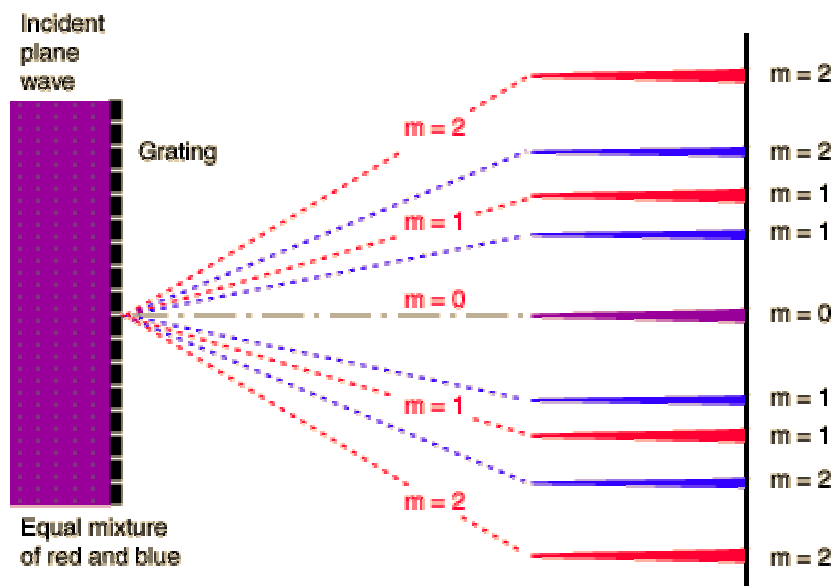
[HyperPhysics](#)\*\*\*\*\* [Light and Vision](#)

*R  
Nave*

[Go Back](#)

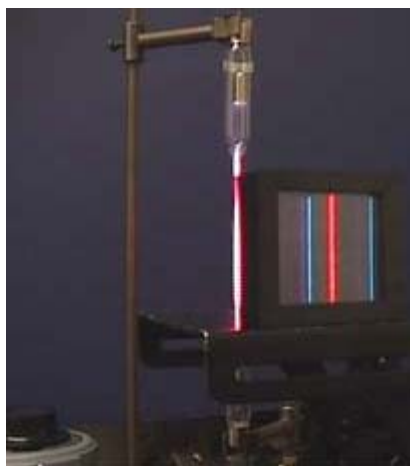
## Diffraction Grating

A diffraction grating is the tool of choice for separating the colors in incident light.



The condition for maximum intensity is the same as that for a [double slit](#). However, angular separation of the maxima is generally much greater because the slit spacing is so small for a diffraction grating.

The diffraction grating is an immensely useful tool for the separation of the spectral lines associated with atomic transitions. It acts as a "super prism", separating the different colors of light much more than the dispersion effect in a prism. The illustration shows the [hydrogen spectrum](#). The hydrogen gas in a thin glass tube is excited by an electrical discharge and the spectrum can be viewed through the grating.



[Index](#)

[Grating concepts](#)



The tracks of a [compact disc](#) act as a diffraction grating, producing a separation of the colors of white light. The nominal track separation on a CD is 1.6 micrometers, corresponding to about 625 tracks per millimeter. This is in the range of ordinary laboratory diffraction gratings. For red light of wavelength 600 nm, this would give a first order diffraction maximum at about  $22^\circ$

[Discussion](#) [Calculation](#)

[HyperPhysics\\*\\*\\*\\*\\* Light and Vision](#)

*R Nave*

[Go Back](#)

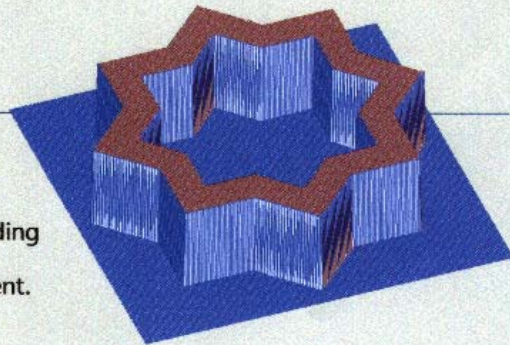


Professor Changhe Zhou (center) and doctoral students Wei Wang (left) and Enwen Dai (right) experiment with micro-optics at the Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, China.

## Simple Principles Of The Talbot Effect

Changhe Zhou, Wei Wang,  
Enwen Dai and Liren Liu

A well known optics phenomenon finds  
new applications in emerging fields, including  
optical computing and optical measurement.



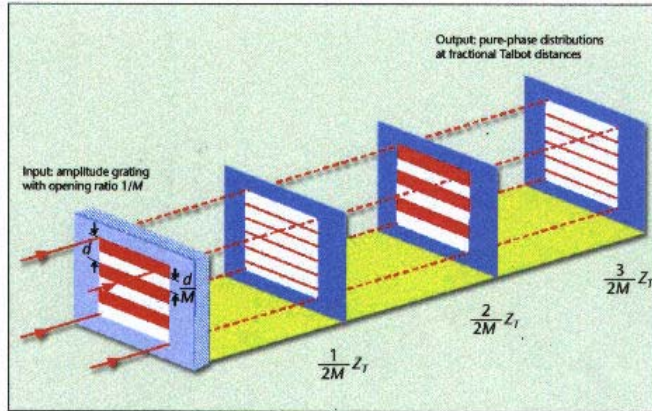
**T**he Talbot effect, the self-imaging of a grating when it is illuminated by a monochromatic plane wave, was discovered about 100 years ago. Recent research has shown that a number of simple principles govern the Talbot effect. They include the symmetry rule, the regularly rearranged neighboring phase rule and the prime number decomposing rule. These simple rules offer us new ways of looking at the Talbot effect which could lead to the design of new diffractive optics devices with practical applications in areas that include optical interconnection, optical computing and optical measurement.

### A bit of history

The Talbot effect was first observed by the English scientist Henry Fox Talbot (1800-1877) about a century ago. The effect Talbot discovered, which is generally described in university texts as an example of Fresnel diffraction, is considered one of the most basic of optics phenomena.

The Talbot effect has received continuous attention since it was first described, not only because understanding it is so fundamental to the study of optics, but also because of its wide ranging applications in fields which include optical measurement, optical array illumination, optical interconnections and matter-wave self-imaging.<sup>1</sup> The Talbot self-imaging effect is observed at the so-called Talbot distance as  $z = nZ_T$ , where  $Z_T = 2d^2/\lambda$ ,  $\lambda$  is the wavelength of the incident light,  $d$  is the period of the grating and  $n$  is a positive integer.

The self-imaging of any type of grating at the Talbot distance can be explained by means of the Fresnel equation. What has puzzled optical scientists until recently has been whether there are simple principles governing diffraction at fractional Talbot distances or, in other words, at distances located between the integer Talbot distances. Recent studies have shown that at some fractional Talbot distances, the frequency-increased self-imaging effect can also be obtained.<sup>2-7</sup> The question is whether there are simple relations between these complex optical diffraction patterns, including not only the intensity pattern but also the phase differences.



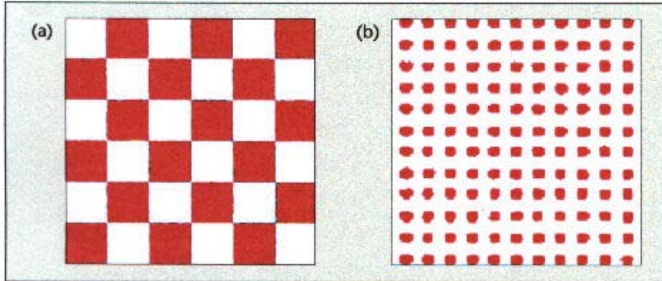
**Figure 1.** For the amplitude grating with an opening ratio  $1/M$  illuminated by monochromatic light, the amplitude and phase distributions at all distances of  $(p/2M)Z_T$  are periodic (where  $p$  and  $M$  are positive integers). There will be pure-phase distribution when  $p$  and  $M$  have no common divisor. If the direction of the illumination light is reversed, the output of the pure-phase distribution is replaced with a phase grating; in this case, the input would be the output in the reversed condition, i.e., an intensity grating with a compression ratio of  $1/M$  would be formed. The Talbot effect can therefore be used for array illumination.

An optical field can be fully characterized by its amplitude and phase. Since our eyes—like a CCD camera—can perceive an object that has intensity difference, but not phase difference, ordinary people are usually not aware of the phase variation of light. In optics labs, of course, phase must always be taken into consideration. Dennis Gabor (1900-1979) was awarded the Nobel prize for the invention and development of holography, a method of reconstructing the wave front—or, in other words, the equal phase front—of an optical field. Frits Zernike (1888-1966) was awarded the Nobel prize for his invention of the phase-contrast method for detecting a transparent bio-object that has a pure-phase variation. In optical binary-phase filtering, pattern recognition based on the Fourier transform of an object and characterization of an ultrashort laser pulse, phase plays a more important role than does the amplitude of an optical field. Phase also plays a key role in describing the fractional Talbot effect. The new rules which we will describe in this article are all concerned with the phase of the Talbot effect as it relates to Talbot array illumination.

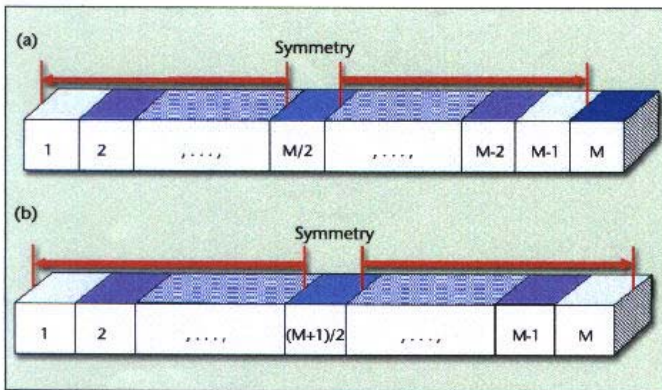
As shown in Fig. 1, Talbot array illumination is based on the fractional Talbot effect: an amplitude grating with an opening ratio  $1/M$  can generate pure-phase distributions at fractional Talbot distances. If we can reproduce this pure-phase distribution and illuminate it with a monochromatic plane wave, the image of the intensity structure with a compression ratio  $1/M$  will emerge at certain planes behind the phase grating. Illumination arrays have been developed on the basis of the principles that underlie the Talbot effect, the subject of extensive research since it has the obvious advantages of high efficiency and excellent uniformity, and can be mass produced at low cost.

In 1988, scientist Adolf Lohmann<sup>2</sup> illustrated Talbot array illumination by means of the pure-phase distributions at fractional Talbot distances that are yielded by amplitude gratings with opening ratios of  $1/2$  and  $1/3$ . Leger and co-workers<sup>3</sup> carried out experiments involving Talbot array illumination. Arrizón and Ojeda-Castaneda<sup>4</sup> derived equations for calculating the fractional Talbot effect. In 1995, Zhou et al.<sup>5</sup> proved that there are symmetries of phase

## THE TALBOT EFFECT



**Figure 2.** Experimental demonstration of Talbot array illumination (a) with an opening ratio of 1/2 yielded by a  $(0, \pi/2)$  phase grating and (b) with a compression ratio of 1/4 yielded by two, one-dimensional crossed  $(0, \pi)$  phase gratings. Both are illuminated with a He-Ne laser at a 633-nm wavelength.



**Figure 3.** Symmetric structures of phase factors within one period for (a) even  $M$  and (b) odd  $M$ .

distribution in the fractional Talbot effect. In 1998, Zhou et al.<sup>6</sup> reported a regularly rearranged rule of the pure-phase distribution at different fractional Talbot distances. On the basis of this rule, a complete set of simple phase equations<sup>7</sup> can be derived to explain the phase distribution for Talbot array illumination. In 2001, the prime number decomposing rule<sup>8</sup> was found to be related to Talbot array illumination. In this article we will summarize these principles of symmetry and number theory which express in simple terms the essential nature of Talbot—or, at a deeper level, Fresnel—diffraction.

### Theory of operation

The phenomenon of Talbot self-imaging is caused by Fresnel diffraction of a grating in the near field. The basic equation used to describe the Talbot effect is the Fresnel diffraction integral. When a grating is illuminated by a monochromatic plane wave, its self-image is produced by the infinite waves that come from the grating with propagation directions that are determined by the basic grating equation. From a purely mathematical point of view, it would be too complex to attempt this calculation by means of the Fresnel equation.

The concept of Fresnel diffraction of a grating can be simplified if we consider the grating as a basic unit function convolved with a comb function. In recent years, many researchers have described simplified equations to describe the Talbot effect. Leger and Swanson<sup>3</sup> supplied an equation for calculating the pure-phase distributions for Talbot array illumination. Arrizón and Ojeda-Castaneda,<sup>4</sup> and Berry and Klein,<sup>9</sup> derived their respective equations to calculate the fractional Talbot coefficients at the distance  $(p'/q')Z_T$ , where  $p'$  is prime to  $q'$ . Since the different values of  $p'$  and  $q'$  refer to the fractional Talbot distances for various gratings, distance-oriented equations are not well suited to explain the self-imaging produced by a grating. In construction of a Talbot illuminator, the challenge faced by researchers is to determine at which input phase distribution and at which diffractive distance we can obtain Talbot array illumination with an arbitrary compression ratio  $1/M$ . The question can be completely answered by the straightforward principles expressed in the following sections.

### Experimental results

We used a lithographic technique to fabricate Talbot array illuminators. To achieve the required phase modulation for Talbot array illumination, the surfaces of glass pieces were etched. Examples of our experiments are shown in Fig. 2. In Fig. 2(a), two-dimensional (2D) Talbot array illumination with a compression ratio of 1/2 is yielded with a binary phase  $(0, \pi/2)$  phase grating at 1/8 fractional Talbot distance<sup>10</sup>; in Fig. 2(b), 2D Talbot array illumination with a compression ratio of 1/4 is derived from two, one-dimensional (1D) crossed binary-phase  $(0, \pi)$  gratings.<sup>11</sup>

### Recent findings

New findings regarding the Talbot effect have emerged in the past few years: in particular, recognition of the symmetry of the Talbot effect was the first step in discovering the other rules which govern it. From here one can derive the number theory of the Talbot effect, which includes the regularly rearranged neighboring phase difference (RRNPD) rule

and the prime number decomposing rule, both of which are related to the Talbot array illuminator.

### The symmetry principle

On the basis of Guigay's equations,<sup>12</sup> Zhou et al.<sup>5</sup> analytically proved that, depending on the fractional Talbot distances involved, there are four kinds of symmetries of pure-phase distribution. These four kinds of symmetries<sup>5</sup> can be reduced to the two in Fig. 3, depending on whether  $M$  is even or odd, where  $1/M$  is the opening ratio of an amplitude grating. The symmetry of the Talbot effect is the basic characteristic of a Talbot array illuminator.

### Regularly rearranged neighboring phase difference rule

When an amplitude grating with an opening ratio of  $1/M$  is illuminated by a monochromatic plane wave, the amplitude and phase distributions at all consecutive distances  $(p/2M)Z_T$  (where  $p$  and  $M$  are positive integers) can be obtained,<sup>7</sup> as shown in Fig. 1. The regularly rearranged neighboring phase difference (RRNPD) rule<sup>6</sup> is illustrated in Fig. 4. The RRNPD rule reflects the essential symmetry of the pure-phase distribution at different fractional Talbot distances.

### A complete set of simple phase equations

With establishment of the RRNPD rule, we obtained a completely new set of analytic phase equations for the description of pure-phase distributions at distances of  $(p/2M)Z_T$  ( $p$  and  $M$  have no common divisor).<sup>7</sup> It has been proved that the Leger and Swanson equation<sup>3</sup> is just a subset of these equations. These analytic phase equations are powerful tools for calculating the phase values of a Talbot array illuminator.

### The prime number decomposing rule

The number of phase levels in a Talbot illuminator is an important factor in fabrication complexity and cost. To our knowledge, we are the first to demonstrate a simple method of predicting the number of phase levels in a Talbot illuminator. The mathematical equations

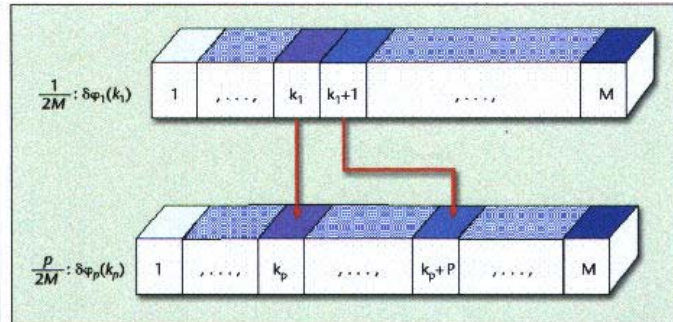


Figure 4. The regularly rearranged neighboring phase difference rule describes the relation of the phase propagation between the fractional Talbot distances of  $(1/2M)Z_T$  and  $(p/2M)Z_T$ , according to  $(k_p = pk_1 \bmod M)$ .

required for a description of pure-phase distribution are, in fact, highly complex. Generally speaking, if an arbitrary number  $M$  can be decomposed into multipliers without common divisors among them and if the number of phase levels of each multiplier is known, then the number of phase levels  $L$  that correspond to  $M$  will be the product of each number of the corresponding phase levels.<sup>8</sup> This principle can be termed the prime number decomposing rule. The simple decomposing relations and the RRNPD rule are generally applicable for an arbitrary  $M$ . We can consider the fundamental cause of the beautiful symmetry between the Talbot effect and number theory to be the nature of Fresnel diffraction with an amplitude grating of opening ratio  $1/M$  at fractional Talbot distances. It is clear that not every grating is characterized by such simple Fresnel diffraction; only gratings with an opening ratio of  $1/M$  are characterized by such a simple relationship.

### Hexagonal Talbot array illumination

A hexagonal array (HA), such as the configuration of a honeycomb, is both a preferred pattern in nature and a popular design for optoelectronic materials and devices. We reported HA Talbot array illumination based on a binary phase grating.<sup>10</sup> The optical setup of HA Talbot array illumination is shown in

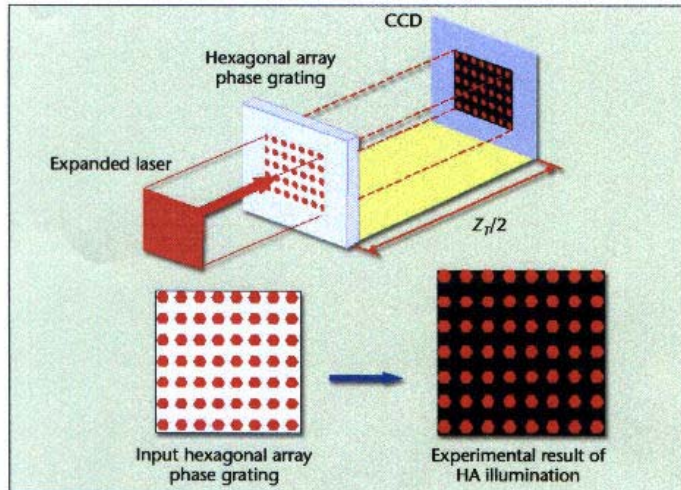
Fig. 5. An expanded He-Ne laser is used as the incident light source. A hexagonal array phase grating is a binary phase grating with an opening ratio of  $1/4$ . In an input array hexagonal grating, a white hexagon corresponds to phase 0 and a red hexagon corresponds to phase  $\pi$ . We analyzed and experimentally verified that HA Talbot illumination can be achieved at  $1/2$  Talbot distance. The experimental image captured by a CCD camera on the half-Talbot plane is also shown in Fig. 5. We used a microlithographic technique to fabricate hexagonal phase plate, doubled-layered computer generated holograms<sup>13</sup> and circular Dammann gratings.<sup>14</sup> New types of diffractive optical elements can be designed and implemented based on the Talbot effect and its relation to symmetry and number theory.

### Two-layered computer-generated holograms

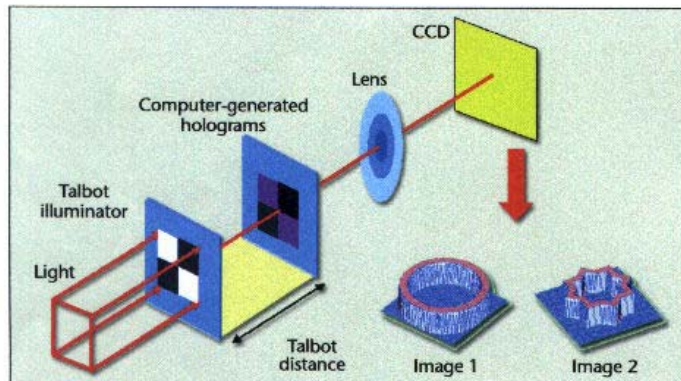
Since German scientist A. W. Lohmann developed computer-generated holograms (CGHs) in the 1960s, they have become an important focus of research in information optics. These holograms also fuel the development of information optics technology in a wide variety of practical applications.

The conventional CGH is single-layered because it is difficult to establish the diffraction coupling between two-layered CGHs. Recently, a two-layered

## THE TALBOT EFFECT



**Figure 5.** Illustration of the optical setup for HA illumination and the experimental result of HA illumination. In an input hexagonal array phase grating, a white hexagon corresponds to phase 0 and a red hexagon corresponds to phase  $\pi$ .



**Figure 6.** Two-layered computer-generated holograms (CGH) with a fractional Talbot distance between them. By shifting the Talbot illuminator or changing the pattern with a spatial light modulator in the Talbot illuminator, one can display the different CGHs (and thus the different optical functions) one by one. This effect can be captured by a CCD camera in the output plane.

CGH—in which the first layer is the encoding layer and the second layer the decoding layer—was described and implemented<sup>13</sup> (see Fig. 6). In the encoding layer, there are space-multiplexed multi-CGHs; in the decoding layer there is a Talbot illuminator. Shifting the decoding layer or changing the patterns

with a spatial light modulator in the Talbot illuminator allows the different CGHs in the first layer to be displayed one by one. The diffraction between two-layered CGHs is connected based on the fractional Talbot effect. Such a device could find applications in the areas of secure optical storage, micro-optical-

electronic systems and dynamic optical switching, to name only a few.

### Conclusions

The Talbot self-imaging effect is a well known optical phenomenon. We developed a new set of simple equations for the calculation of pure-phase distribution of an input amplitude grating with an opening ratio  $1/M$  for Talbot array illumination. The RRNP rule<sup>6,7</sup> reflects the essential symmetry of the Talbot effect. We found that the number of phase levels of a Talbot illuminator is related to the prime number decomposing rule.<sup>7</sup> Hexagonal Talbot illumination can be achieved with a binary phase grating<sup>13</sup> and double-layered computer-generated holograms based on the Talbot effect can be implemented.<sup>10</sup> Symmetry and number theory have been used to demonstrate the beauty of Fresnel diffraction in Talbot array illumination. Familiarity with these principles can expand our understanding of the Talbot effect, and, ultimately, of Fresnel diffraction. These findings should allow us to further explore the Talbot effect and to undertake the design of novel diffractive optical devices for practical applications.

### Acknowledgment

The authors acknowledge support of the National Outstanding Youth Foundation of China (60125512) and Shanghai Science and Technology Committee (03XD14005, 036105013, 0359nm004).

Changhe Zhou (chazhou@mail.shcnc.ac.cn) and Liren Liu are research professors and Wei Wang and Enwen Dai are doctoral students at the Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai, People's Republic of China.

### References

1. S. Nowak et al., *Opt. Lett.* **22**, 1430-2 (1997).
2. A. W. Lohmann, *Optik* **79**, 41-5 (1988).
3. J. R. Leger and G. J. Swanson, *Opt. Lett.* **15**, 288-90 (1990).
4. V. Arrixón and J. Ojeda-Castaneda, *Appl. Opt.* **33**, 5925-31 (1994).
5. C. Zhou and L. Liu, *Opt. Commun.* **115**, 40-4 (1995).
6. C. Zhou et al., *Opt. Commun.* **147**, 224-8 (1998).
7. C. Zhou et al., *Appl. Opt.* **38**, 284-90 (1999).
8. C. Zhou et al., *Appl. Opt.* **40**, 607-13 (2001).
9. M. V. Berry and S. Klein, *J. Mod. Opt.* **43**, 2139-64 (1996).
10. E. Dai et al., *Opt. Lett.* **28**, 1513-15 (2003).
11. S. Zhao et al., *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 103-7 (2001).
12. J. P. Guigay, *Opt. Acta* **18**, 677-82 (1971).
13. P. Xi et al., *Opt. Lett.* **27**, 228-30 (2002).
14. C. Zhou et al., *Opt. Lett.* **28**, 2174-6, (2003).



## Talbot Kaleidoscope

Luis Fernando Avila, Jacson Weber de Menezes and Lucila Cescato

Laboratório de Óptica, IFGW, Unicamp  
e-mail

### Abstract

*In this paper we report and analyze the formation of multiples figures along the z direction of propagation when an array of hexagons is illuminated by coherent light. Due to the symmetry of the hexagons and their different periodicity in the different directions, the Talbot images of this structure exhibit an interesting visual effect. By moving a screen along the z direction beautiful different geometric figures, with hexagonal symmetry, are formed, similar to that obtained in a Kaleidoscope.*

### Introduction

When a periodic object, such as a diffraction grating, is illuminated by coherent light, self-images of the object will appear at certain periodic distance from the object. This effect is called Talbot Effect and it can be explained by Fresnel diffraction of periodic structures [1]. Other intermediate images also do occur along the z axis: the phase reversed Talbot image and the Talbot subimages [1]. If instead of a one-dimensional periodic structure we have a two-dimensional periodic structure, this effect also occurs, but at generalized distances [2], that depend on the two-dimensional periodicity of the object.

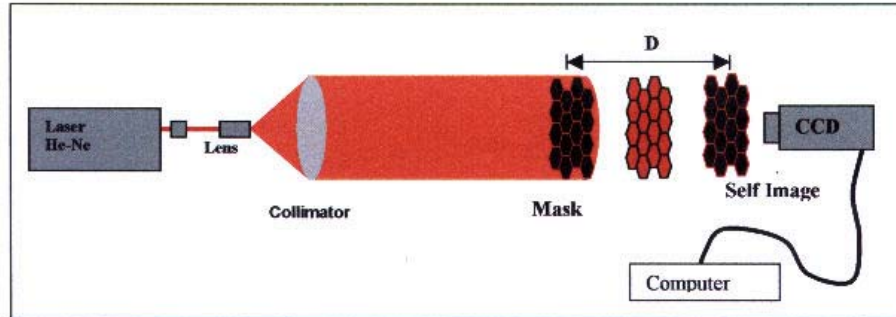
By the other hand, hexagonal arrays are basic structures found in many different systems in Nature, from biological to crystals. Bees construct honeycombs in order to optimize the space occupation as well as the atoms self assemble in benzene radicals or graphite crystals. More recently hexagonal arrays have been employed in optical and mechanical devices, such for example photonic crystal optical fibers [3]. In this paper we describe and analyze the formation of images when a periodic array of hexagons is illuminated by coherent light.

### Experimental Setup

Figure 1 shows a scheme of the array of hexagons, used as the periodic object in our experiment while Figure 2 shows a scheme of the simple experimental setup used for observation of the Talbot images of the array. We used a He-Ne laser expanded and collimated by an objective with magnification of 10 X and collimated by a lens with focal length of about 20 cm. This setup provides a plane coherent illumination of the periodic object. In the z-axis we observed the self-images through a CCD coupled to a computer.



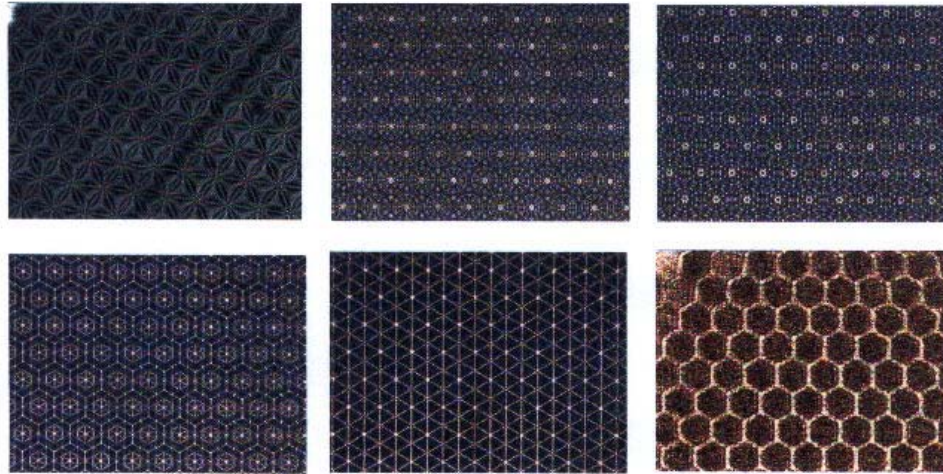
**Figure 1:** Scheme of the array of hexagons used as a mask transparency for observation of the Talbot images. The lateral side of each hexagon was  $250 \mu\text{m}$  and the total area of the array was a circular spot of about 5 mm of diameter. The mask was printed in a photo-lithe.



**Figure 2:** Scheme of the experimental setup used to observe the Talbot self images of the array of hexagons.

### Results and Discussions

Figure 3 shows some examples of the different images observed at defined distances ( $D$ ) in the  $z$ -axis from the periodic object. Note that the images are focalized in certain defined distances.



**Figure 3:** Photographs obtained in the  $z$ -axis for the following distances ( $D$ ) of the CCD from the object (mask): 2 cm; 7 cm; 10.1 cm; 11 cm; 20.3 cm and 61 cm respectively.

Note that all the observed images present the same hexagonal symmetry of the object because they are diffraction patterns of the object, but only the last image (obtained at 61 cm from the object) corresponds to the first self-image of the object. The distance of the first self-image agrees with the theoretically expected value [4]:

$$D_T = \frac{3t_x^2}{2\lambda}$$

with  $\lambda$  being the laser wavelength and  $t_x$  the periodicity of the array in the  $x$  direction that is equal to  $\sqrt{3}L$  (side of the hexagons). However, in order to explain the position of the intermediate images that appear at distances much smaller than Talbot distance  $D_T$ , a rigorous calculation of the Fresnel diffraction pattern of the object must be done.



### Conclusion

We described the formation of interesting images when an array of hexagons is illuminated by coherent light. These images are similar to Kaleidoscope figures and could be used for application in visual entertainment devices. We call such images Talbot subimages but in order to prove this and to explain the distances in which they appear, a rigorous Fresnel diffraction calculation of the object must be done.

### Acknowledgements

The authors thank the **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)**, **Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq)** and **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)** for the financial support of this work.

### References

- [1] Goodman J. W., Introduction to Fourier Optics, Mc Graw Hill, second edition
- [2] Winthrop J. T. and Worthington C. R., Theory of Fresnel Images I. Plane Periodic Objects in Monochromatic Light, *J. of the Optical Society of Am.*, 55(4), 373 (1965). –
- [3] Knight JC, Broeng J, Birks TA, et al., Photonic band gap guidance in optical fibers, *SCIENCE* 282 (5393): 1476-1478 (1998).
- [4] Xi P., Zhou C, Dai E. and Liu L., Generation of near field hexagonal array illumination with a phase grating, *Optics Letters*, 27(4), 228-230 (2002).