



Pêndulo Invertido

Claiton Pimentel de Oliveira, Kyoko Furuya (*orientadora*)

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas

(Campinas, 21 de Junho de 2006)

Resumo

Esse experimento ilustra o movimento caótico de um pêndulo invertido forçado e sua transição entre os regimes linear, não-linear periódico e caótico. Um segundo fenômeno não linear característico, resposta subharmônica do sistema, também pôde ser observado. Fizemos uma investigação numérica de forma que previsões qualitativas do movimento do pêndulo pudessem ser feitas, desenvolvendo para isso um modelo teórico, de onde obtivemos uma equação de movimento aproximada.

Sumário

1	Introdução	2
2	Montagem Experimental	2
3	Modelo Teórico	3
4	Simulações e Resultados	7
5	Conclusão	13

1 Introdução

Nos cursos tradicionais de física ensina-se somente osciladores harmônicos, aqueles produzidos por forças restauradoras que são proporcionais ao deslocamento x da condição de equilíbrio e por forças dissipativas proporcionais à velocidade dx/dt . Tais sistemas ideais representam oscilações *livres* cujo período não depende da amplitude e oscilações *forçadas* cuja curva de ressonância é quase simétrica com relação à frequência de ressonância.

No mundo real, muitos sistemas incluem não-linearidades em forças restauradoras ou dissipativas, e *não-linearidades* levam a comportamentos completamente diferentes.

Nesse experimento pretendemos ilustrar comportamentos não-lineares de um oscilador forçado, nesse caso um pêndulo invertido, e suas transições entre os vários regimes de comportamento, desde o regime quase-harmônico até o regime caótico. Para isso é interessante utilizar um sistema que segue, pelo menos aproximadamente, um potencial de Duffing, pois esse sistema apresenta uma gama de fenômenos não-lineares característicos. Veremos que o movimento do pêndulo invertido em questão pode ser descrito aproximadamente por uma equação de Duffing.

2 Montagem Experimental

O experimento consiste de um pêndulo invertido, ou seja, um certo objeto massivo sobre uma haste flexível, onde a força gravitacional sobre a massa e a força elástica da haste se opõem, e um sistema de molas acoplado a esse e a um outro pêndulo, que aplica uma força periódica aproximadamente harmônica sobre a haste. Um diagrama do experimento pode ser visto na figura (1).

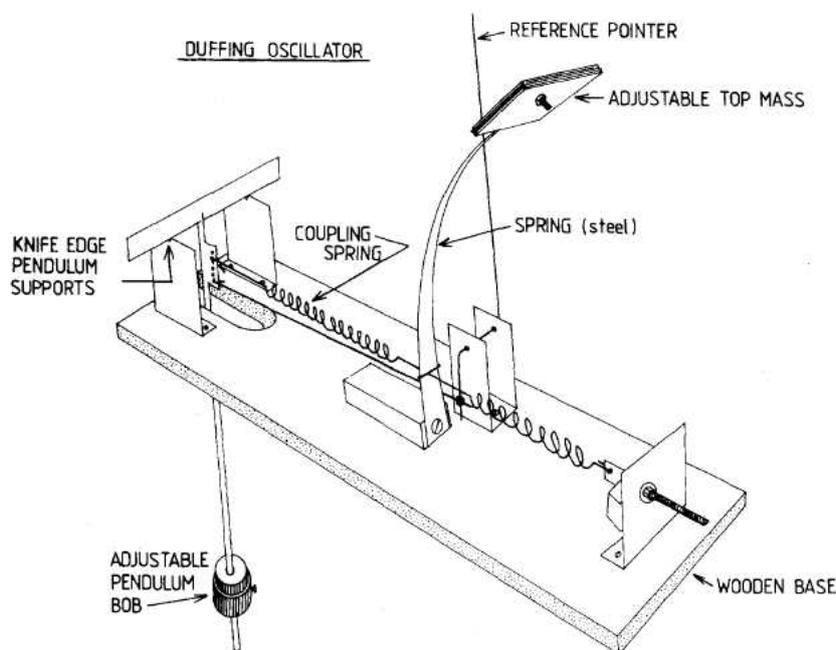


Figura 1: Diagrama do pêndulo invertido forçado.

Com um objeto leve a haste se equilibra verticalmente sobre a base, sustentando-o. Porém, com um objeto massivo o suficiente (mais adiante veremos o quão massivo deve ser), a haste não mais sustentará a posição vertical e penderá para um dos lados gerando dois pontos de equilíbrio estável, em ambos os lados, onde os torques devido às forças gravitacional e elástica se igualam.

Ao se retirar o pêndulo de sua posição de equilíbrio as forças gravitacional e elástica não mais se cancelam, forçando assim o pêndulo em um movimento oscilatório. Devido a forças dissipativas, nesse caso a resistência do ar, o movimento diminuirá sua amplitude até que o pêndulo retorne novamente a um dos seus pontos de equilíbrio estável.

O sistema forçante consistirá de duas molas presas à base da haste, sendo uma delas com a extremidade fixa e a outra presa próxima ao eixo de rotação de um outro pêndulo (esse com uma haste rígida). O acoplamento desse pêndulo ao sistema é ajustável movendo-se o ponto onde a mola se prende ao pêndulo forçante, modificando assim a amplitude da força aplicada.

Ao movimentarmos esse pêndulo a mola presa a ele forçará a haste flexível em movimentos aproximadamente harmônicos. Regulando a posição da massa nesse pêndulo podemos ajustar a frequência com que ele oscilará, porém dentro de um pequeno intervalo de frequências possíveis devido à limitação do comprimento de sua haste. O objeto nesse pêndulo forçante deve ter massa muito maior do que as massas da haste flexível e do objeto sustentado por ela, para que o movimento da haste flexível não altere significativamente a oscilação do pêndulo forçante.

O experimento foi montado de forma a se ter alguns parâmetros ajustáveis, como a frequência e o acoplamento do pêndulo forçante já citados. A posição em que as molas se prendem à haste flexível também é variável, e altera o torque exercido por elas sobre a haste.

A massa do objeto na extremidade da haste flexível será fixa. Porém podemos ajustar a altura em que ele será fixado sobre a haste de forma que podemos ter ambos, um ou dois pontos de equilíbrio estável, mesmo com uma massa fixa.

Por último podemos ainda ajustar a distância da extremidade fixa de uma das molas com relação à haste flexível. Dessa forma podemos ajustá-la para que o ponto de equilíbrio da haste sem a massa em sua extremidade seja exatamente na vertical, ou seja, para que as forças entre as duas molas sobre essa haste estejam equilibradas.

3 Modelo Teórico

Desenvolveremos um modelo simplificado para o movimento do pêndulo invertido para que previsões possam ser feitas através de simulações computacionais da equação obtida.

Pela segunda lei de Newton sabemos que o torque total τ aplicado sobre a massa M na extremidade da lâmina flexível é igual à derivada temporal do seu momento angular l ,

$$\tau = \dot{l} = ML^2\ddot{\theta}, \quad (1)$$

com $l = MV L = M(L\dot{\theta})L = ML^2\dot{\theta}$. Usamos L como o comprimento da lâmina e θ o ângulo que a reta tangente ao ponto superior da lâmina faz com a vertical, como visto na figura (2). Nesse modelo simplificado estamos desprezando a massa da haste e a sua curvatura no cálculo do momento angular total do sistema.

O torque e momento angular totais são definidos com relação à origem O fixa na

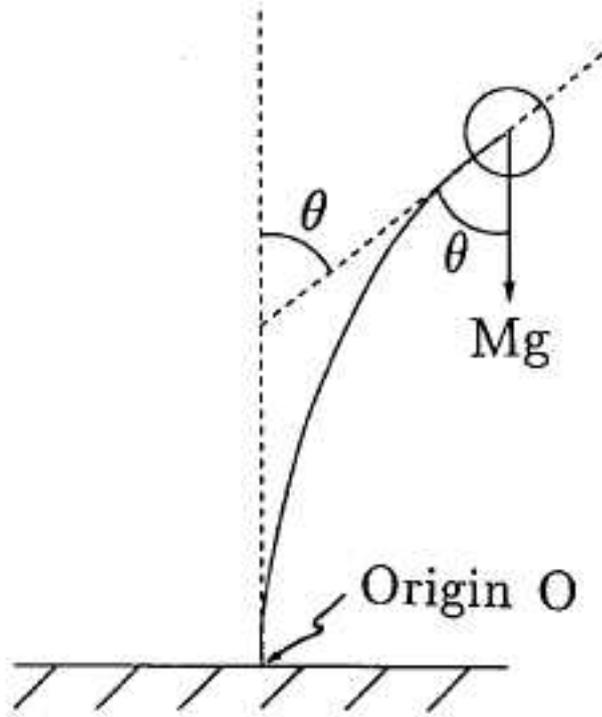


Figura 2: Deflexão da lâmina: θ é o ângulo que a reta tangente ao ponto superior da lâmina faz com a vertical.

base da lâmina. Nesse caso o campo gravitacional gera um torque

$$\tau_{grav} \cong (Mg \sin \theta)L, \quad (2)$$

pois para curvaturas não muito grandes da lâmina, L é uma boa aproximação da distância do ponto de aplicação da força peso à origem (figura (2)).

A elasticidade da lâmina também gera um torque restaurador que tende a levar o pêndulo para o ponto de menor curvatura, ou seja, $\theta = 0$. Para derivar o torque elástico τ_{elas} recorreremos à teoria de materiais^[4], que nos diz que esse torque é inversamente proporcional ao raio de curvatura ρ da lâmina, e é dado por $\tau_{elas} = -(EI/\rho)$. A constante de proporcionalidade depende do módulo de Young E e do segundo momento da lâmina I , definido por uma integral sobre sua seção transversa, $I = \int y^2 dx dy$, com x e y sendo coordenadas cartesianas no plano da seção transversa da lâmina. Para seção transversa retangular, como é o caso, com largura a na direção x , espessura b na direção y e origem no centro do retângulo, I é dado por $I = ab^3/12$.

Precisamos ainda estimar o raio de curvatura ρ . Para isso aproximamos o arco de curvatura da lâmina por um arco circular, veja figura (3). Da geometria do diagrama tiramos que $\theta = L/\rho$. Isolando ρ nessa relação e retornando à expressão para o torque elástico obtemos

$$\tau_{elas} \cong -\frac{EI}{L}\theta. \quad (3)$$

Por último temos ainda o torque de amortecimento $\tau_{amor} = -\gamma\dot{\theta}$ devido à resitência do ar e outras dissipações de energia, e o torque periódico $\tau_{peri} = \tau_0 \cos(\omega t)$ aplicado pela mola acoplada à lâmina e ao pêndulo forçante. γ é a constante de amortecimento, ω é frequência angular e $\tau_0 = F_0 d$ é o valor máximo do torque periódico aplicado, sendo F_0

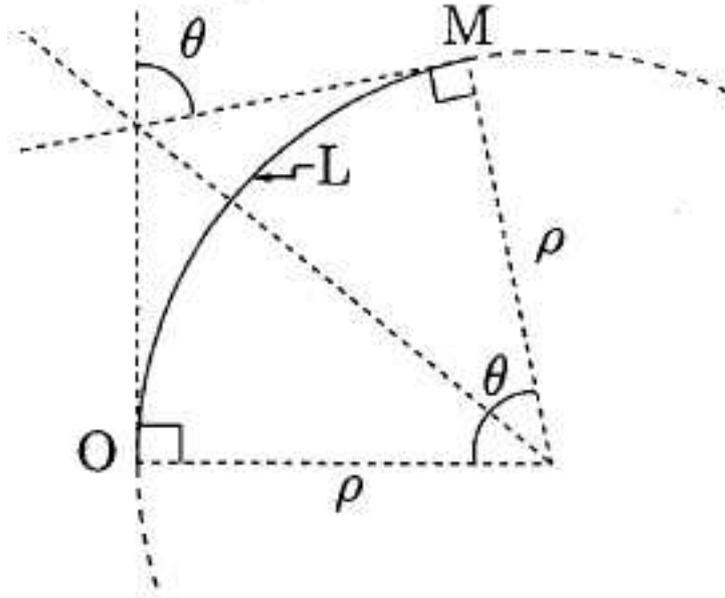


Figura 3: Diagrama do arco circular (simplificado) da lâmina. ρ é o raio do círculo.

o valor máximo da força devido às molas horizontais e d a distância da base da haste ao ponto de aplicação dessa força.

Substituindo o torque total $\tau = \tau_{elas} + \tau_{grav} + \tau_{amor} + \tau_{peri}$, soma de todos os torques aplicados sobre o pêndulo, na equação [1], obtemos a equação de movimento aproximada para o nosso pêndulo invertido

$$ML^2\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + k\theta - MgL\sin\theta = \tau_0\cos(\omega t), \quad (4)$$

onde usamos $k \equiv EI/L$.

Os dois torques conservativos nessa equação são os torques devidos às forças elástica e gravitacional. A soma τ_{cons} desses torques pode ser derivada de um potencial $V(\theta)$ de acordo com a relação $\tau_{cons} = -\partial V/\partial\theta$, onde

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + MgL(\cos\theta - 1), \quad (5)$$

escolhendo a constante arbitrária em V de forma que $V(0) = 0$. Para valores pequenos de θ podemos aproximar $\cos\theta$ por $1 - \theta^2/2 + \theta^4/24$, resultando em

$$V(\theta) \cong \frac{1}{2}(k - MgL)\theta^2 + \frac{1}{24}(MgL)\theta^4. \quad (6)$$

Esse é o potencial de um oscilador não-linear de Duffing. Para $k \geq MgL$, esse potencial tem um único ponto de mínimo (figura (4)), ou ponto de equilíbrio estável, igual a $\theta_{equi} = 0$. Para $k < MgL$ tem dois pontos (figura (5)),

$$\theta_{equi} = \pm\sqrt{6\left(1 - \frac{k}{MgL}\right)}, \quad (7)$$

que obtemos derivando o potencial acima com relação a θ e igualando a 0. Dessa relação podemos obter experimentalmente o valor da constante $\frac{k}{MgL}$ medindo o ângulo

de deflexão da lâmina no ponto de equilíbrio, ou simplesmente verificando qual o comprimento limite L_{lim} para o qual o potencial tem um único ponto de mínimo, ou seja, o comprimento onde $k = MgL_{lim}$. Essa medida remedia o fato de não sabermos o módulo de Young da lâmina para usarmos em nossas simulações. As outras quantidades que entram na equação [4], com exceção de γ , são facilmente mensuráveis. γ será estimado pelo tempo que o movimento se mantém na ausência da força excitadora.

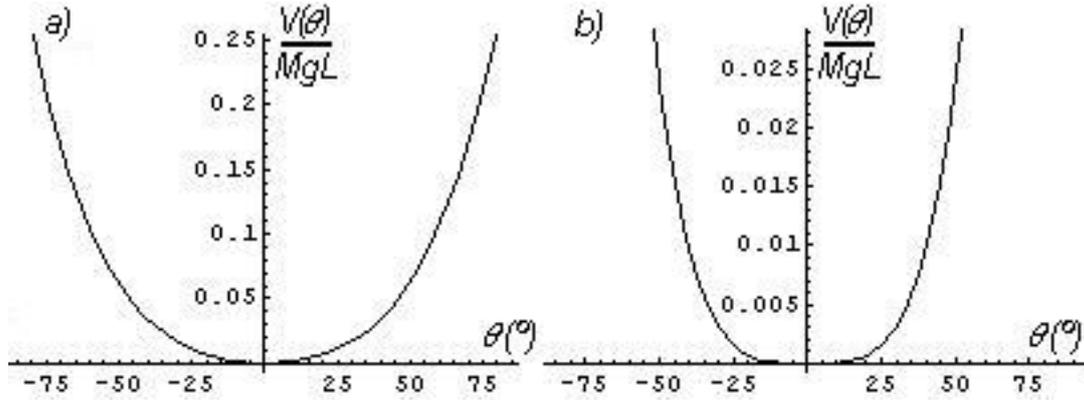


Figura 4: Potencial de Duffing para $k \geq MgL$. a) $k/MgL = 1,10$; b) $k/MgL = 1,00$.

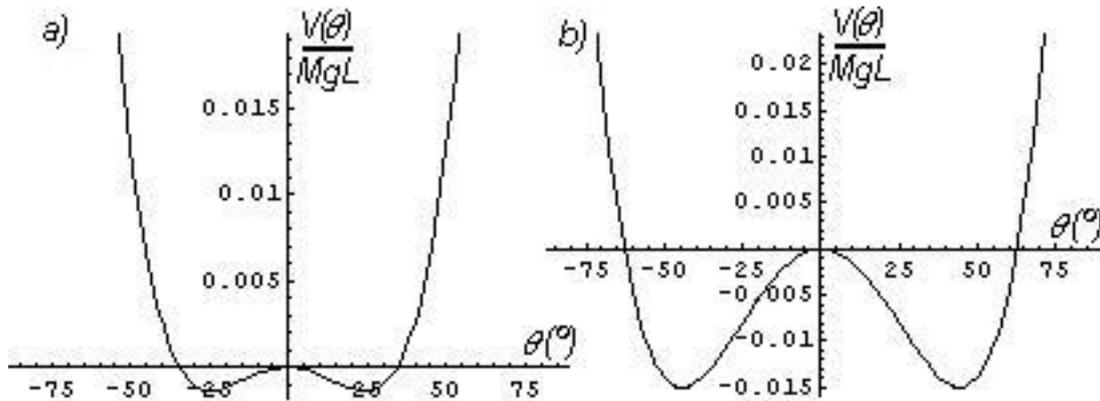


Figura 5: Potencial de Duffing para $k < MgL$. a) $k/MgL = 0,97$; b) $k/MgL = 0,90$.

Devido às simplificações feitas esperamos que a equação [4] nos dê uma descrição apenas qualitativa do movimento do pêndulo. Em particular, esperamos obter experimentalmente as transições entre o movimento regular e caótico previstas pelas soluções numéricas dessa equação.

Movimento regular é aquele movimento periódico ou quase-periódico. Um movimento caótico depende sensivelmente das condições iniciais e não apresenta periodicidade. Existem algumas maneiras de se determinar a caoticidade de um sistema, das quais a obtenção de um espectro de potência contínuo para uma das variáveis dinâmicas talvez seja o mais simples de se implementar como um critério experimental, como descrito em B. Duchesne^[1]. Porém nesse experimento apenas faremos uma verificação visual da sua não periodicidade.

4 Simulações e Resultados

Em nossa montagem os parâmetros, que entram na equação [4] e são usados para as simulações, têm os seguintes valores aproximados: $M = 110g$, $d = 5cm$, $L \in [25cm, 35cm]$, $f \in [0, 56Hz, 1Hz]$, $F_0 \cong 0, 5N$, $k \cong 0, 359Nm$ e $\gamma \cong 6.10^{-4}Nms$.

A massa M e o braço do torque d são fixos. A distância entre a massa e a base da haste, L , será variável, sendo que os valores efetivamente usados são dados no intervalo acima. A frequência f é limitada pelo comprimento do pêndulo. A força máxima F_0 aplicada pela mola é um valor aproximado pois conforme o movimento do pêndulo forçante vai sendo amortecido esse valor decresce. As constantes elástica k e de amortecimento γ foram obtidas experimentalmente.

Primeiramente analisemos o sistema em uma configuração de poço de potencial único como visto na figura (4), que se aproxima de um potencial de um oscilador harmônico. Queremos ressaltar suas principais características pois teremos também um comportamento semelhante no caso do duplo poço de potencial da figura (5) com força excitadora de baixa intensidade. A seguir temos os gráficos de algumas simulações feitas, que estão em “*ângulo (em graus) versus tempo (em segundos)*”, ($\theta^\circ \times s$).

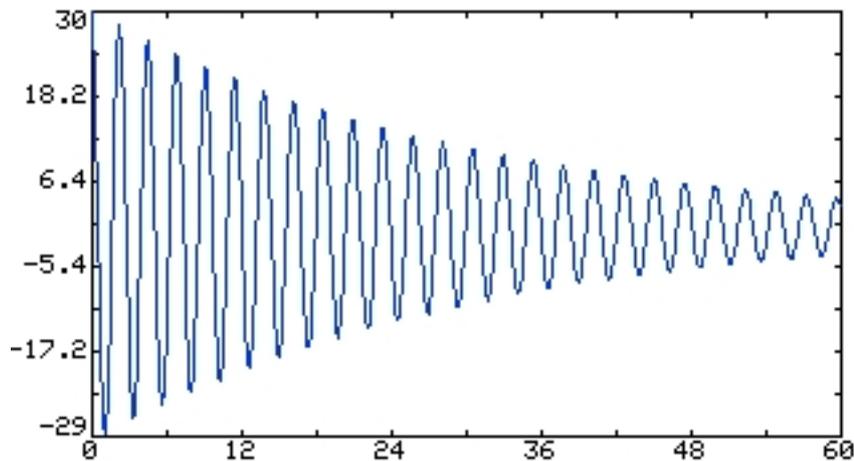


Figura 6: Movimento amortecido.

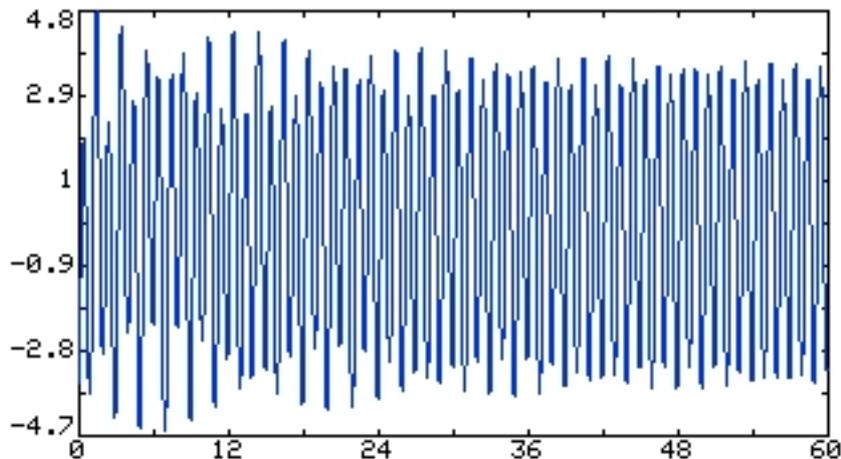


Figura 7: Movimento quase-harmônico.

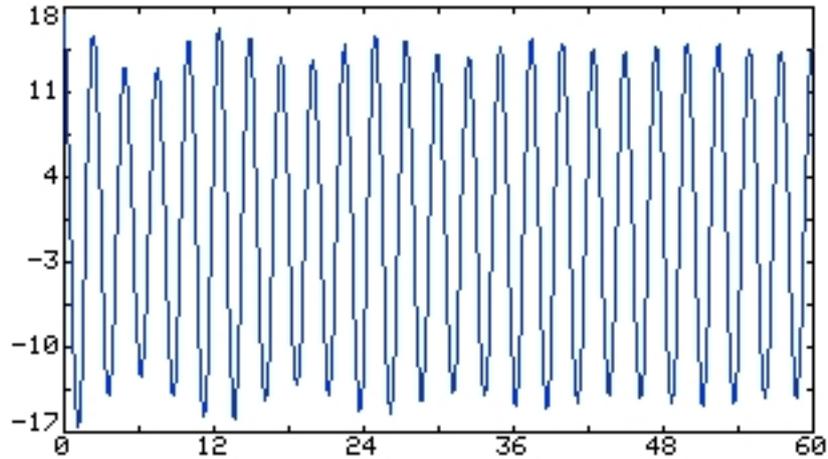


Figura 8: Movimento quase-harmônico.

Ao se retirar o pêndulo de sua posição de equilíbrio, ele descreve uma oscilação amortecida até voltar ao estado de equilíbrio (figura(6)). Ao se aplicar uma força periódica temos um movimento harmônico com a mesma frequência da força do excitadora, após passado o transiente. Nas figuras (7, 8) temos dois gráficos da oscilação do pêndulo com a mesma configuração, excitado em frequências diferentes, onde observa-se também o transiente antes do estabelecimento do movimento harmônico.

Para uma dada configuração o pêndulo, na ausência de forças excitadora e resistiva, oscila em uma frequência característica, chamada frequência natural de oscilação. Na figura (6) vemos o pêndulo em sua frequência natural de oscilação para o caso amortecido.

No caso forçado, a amplitude do movimento varia com a frequência excitadora. Quanto mais próxima da frequência natural de oscilação do sistema, maior será essa amplitude. No caso em que elas coincidem dizemos que o sistema entrou em *ressonância*, onde a amplitude do movimento será máxima.

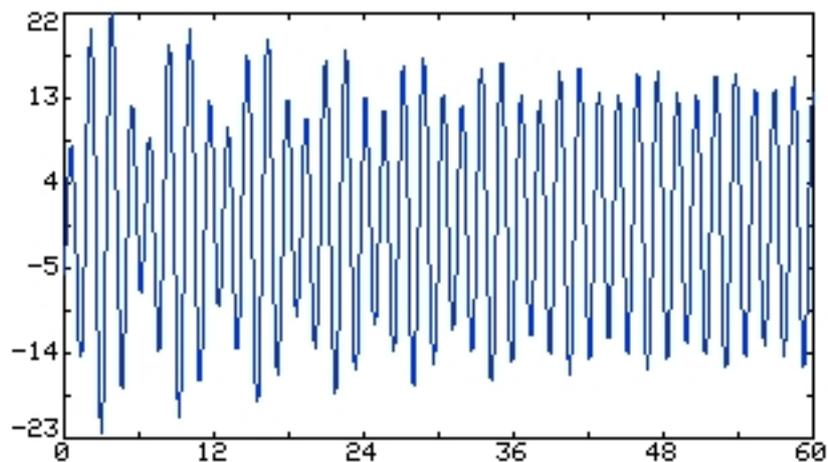


Figura 9: $f = 0,64Hz$.

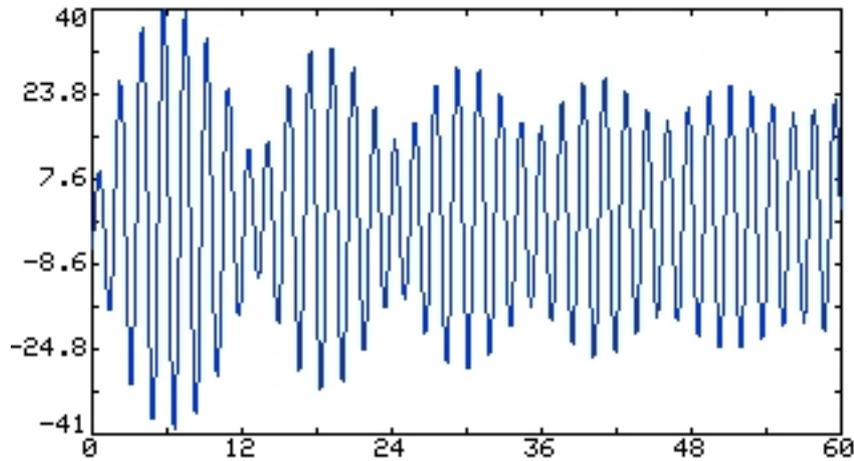


Figura 10: $f = 0,60Hz$.

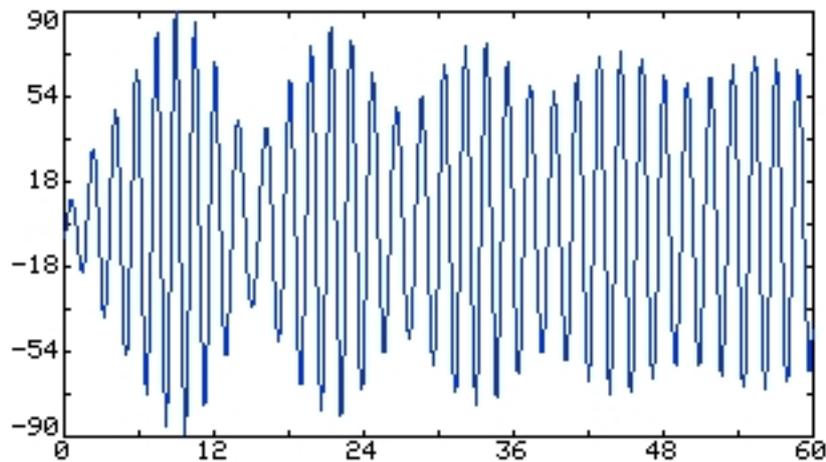


Figura 11: $f = 0,56Hz$. Oscilação próxima da ressonância, onde ocorre também o fenômeno de batimentos.

Nas figuras (9, 10, 11) vemos o pêndulo sendo forçado, com a mesma intensidade, em três frequências diferentes se aproximando da ressonância, onde observamos a variação drástica de sua amplitude de movimento. Observamos ainda o fenômeno de *batimentos*, que é a oscilação da amplitude do movimento, e ocorre quando há osciladores fracamente acoplados oscilando em frequências próximas.

Passemos agora ao caso de dois poços de potencial (figura(5)), alterando o parâmetro L de $27cm$ para $34cm$. Para oscilações relativamente pequenas do ponto de vista experimental, onde o pêndulo mantém uma pequena distância do ponto de equilíbrio, o pêndulo se comporta da mesma maneira como no caso de um único potencial pois ali ele “enxerga” apenas um potencial aproximadamente harmônico. Conseguimos então reproduzir todos os fenômenos citados anteriormente nesse caso. Em particular vemos a oscilação amortecida para esse caso na figura (12).

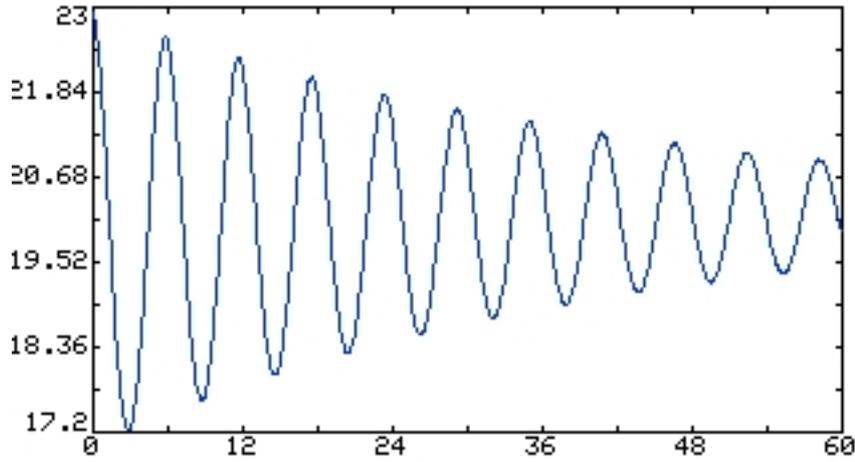


Figura 12: Oscilação amortecida dentro de um dos poços de potencial partindo de $\theta(0) = 23^\circ$.

No entanto, quando as condições iniciais contêm uma quantidade maior de energia mecânica, $\theta(0) = 30^\circ$ nesse caso, efeitos não-lineares da força restauradora da haste flexível se tornam notáveis. Na figura (13) vemos que o período não se mantém, portanto o período é dependente da amplitude. Observamos ainda uma assimetria na força elástica, no entanto ainda podemos ver esse movimento como sendo qualitativamente igual ao anterior, caracterizado por uma período natural um pouco maior que no caso de resposta linear para pequenas amplitudes.

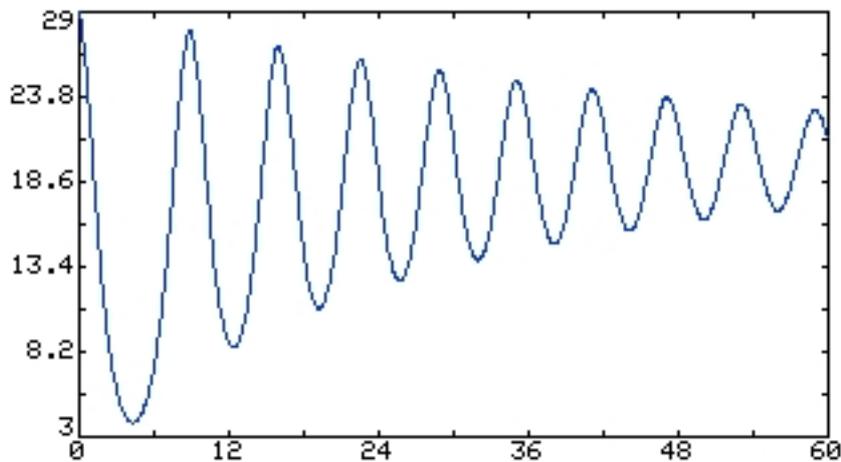


Figura 13: Oscilação amortecida dentro de um dos poços de potencial partindo de $\theta(0) = 29^\circ$.

Se continuarmos a aumentar a energia do sistema, ele terá energia suficiente para escapar do poço de potencial e cair no outro. Aumentando-se ainda mais, o pêndulo poderá atravessar várias vezes de um poço a outro até finalmente cair em um deles. Na figura (14) há duas trajetórias superpostas partindo de posições vizinhas, enfatizando a dependência com as condições iniciais.

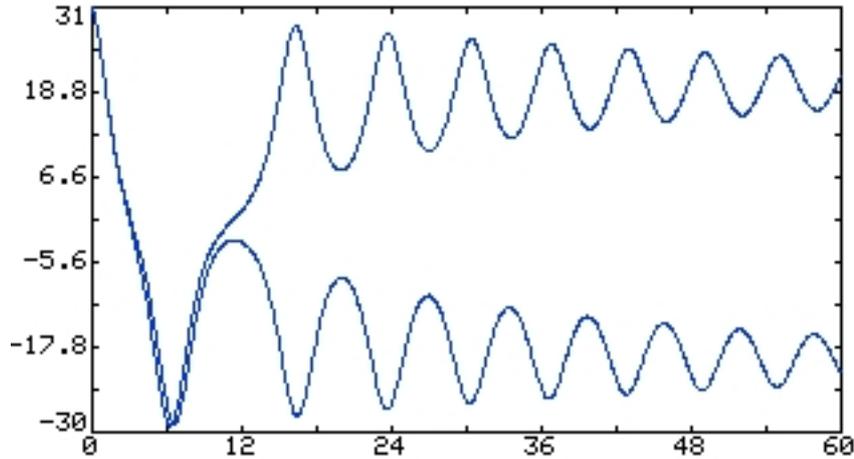


Figura 14: Oscilações partindo de $\theta(0) = 30,4^\circ$ e $\theta(0) = 30,7^\circ$ superpostos. Ilustra sensibilidade às condições iniciais.

Para energias maiores o pêndulo pode alcançar um movimento periódico sem que permaneça em um único poço. Esse caso é ilustrado na figura (15).

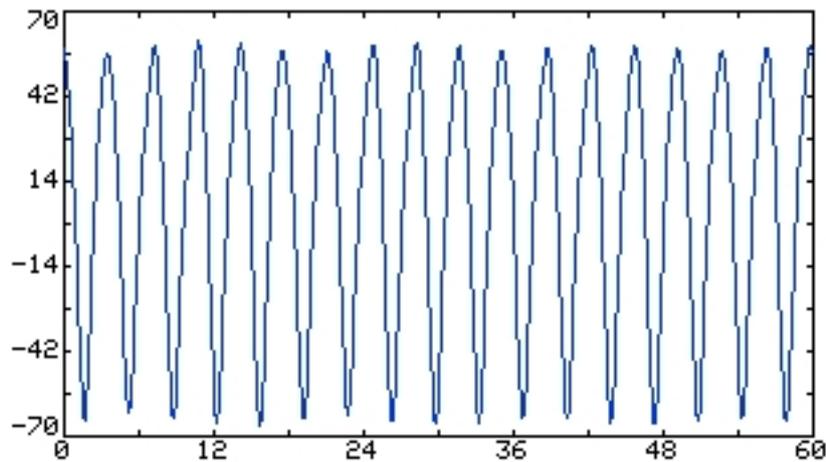


Figura 15: Movimento periódico não limitado a um único poço de potencial.

No entanto uma característica mais interessante geralmente encontrada em sistemas não-lineares é a ocorrência de um sub-harmônico, isto é, um período com n oscilações que leva n períodos completos da excitação para completar um ciclo (figuras (16 e 17)). A partir da oscilação vista na figura (15), aumentando a força excitadora foi encontrado o sub-harmônico de ordem $\frac{1}{3}$, visto na figura (16).

Características não-lineares aparecem quando não se aplica mais o regime essencialmente linear de pequenas oscilações forçadas com baixa intensidade. Sub-harmônicos surgem da instabilidade gerada no sistema ao variarmos um parâmetro, como no caso o crescimento da amplitude da força excitadora. Continuando com esse aumento da força comportamentos não-lineares significativos são cada vez mais favorecidos, de forma que o sistema se torna caótico (figura(18)).

Todas as simulações aqui descritas correspondem a comportamento obtidos experimentalmente.

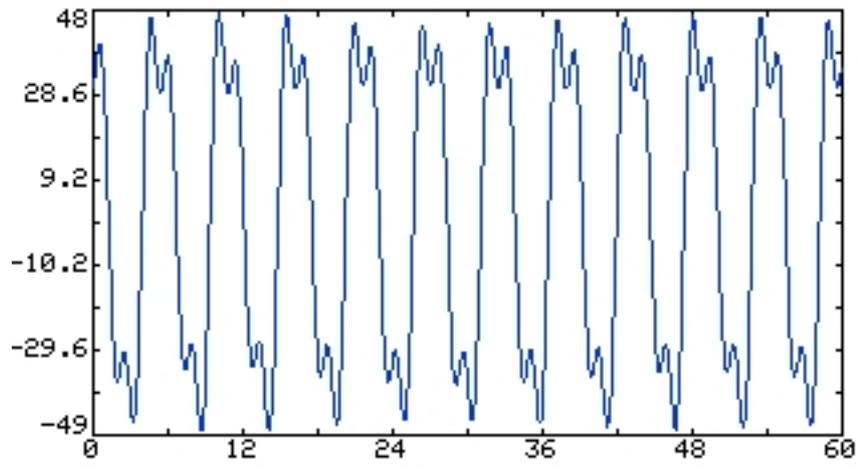


Figura 16: Sub-harmônico de ordem $\frac{1}{3}$.

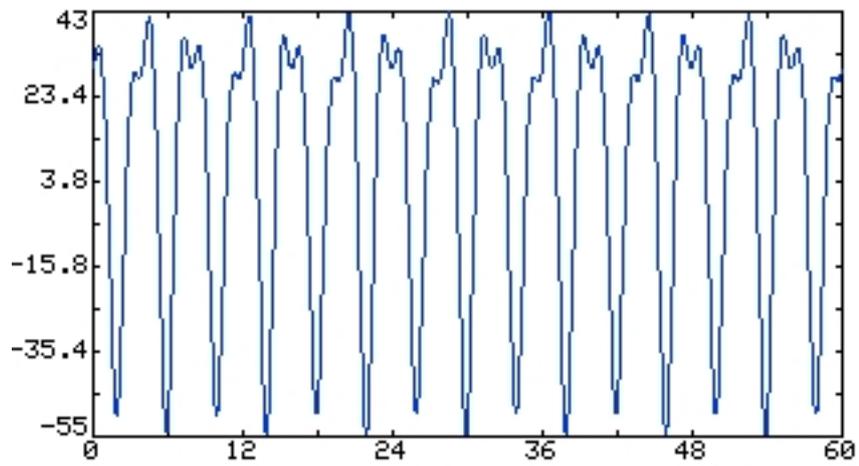


Figura 17: Sub-harmônico de ordem $\frac{1}{4}$.

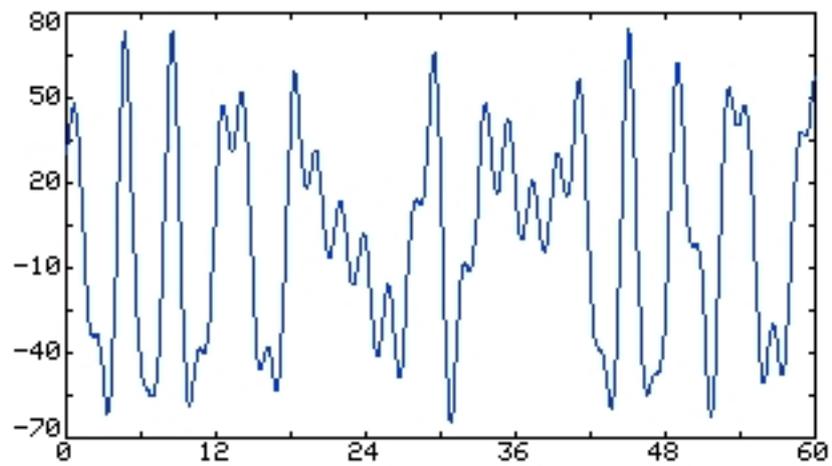


Figura 18: Oscilação não periódica, ou caótica.

5 Conclusão

Nesse experimento mostramos algumas características de um oscilador de Duffing apresentando não-linearidades em acordo, pelo menos qualitativamente, com o modelo desenvolvido. Em especial ilustramos o seu movimento caótico e a transição do sistema entre alguns regimes de comportamento.

Percebemos uma grande sensibilidade do sistema com relação aos parâmetros e às condições iniciais, sendo os comportamentos regulares com períodos múltiplos e sub-múltiplos do período da força excitadora (harmônicos e sub-harmônicos) difíceis de serem obtidos. Mesmos assim o sub-harmônico ordem $\frac{1}{3}$ foi encontrado experimentalmente.

Referências

- [1] Duchesne, B., Fischer, C. W., Gray, C. G., Jeffrey, K. R., *Chaos in the motion of an inverted pendulum: An undergraduate laboratory experiment*, Am. J. Phys. **59** (1991).
- [2] Briggs, K., *Simple Experiments in chaotic dynamics*, Am. J. Phys. **55** (1987).
- [3] Virgin, L. N., *Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics: A Case Study in Mechanical Vibration* (Cambridge University Press, 2000).
- [4] Cottrell, A. H., *The Mechanical Properties of Mater* (Wiley, New York, 1964), p. 125.