

**Relatório Final**  
**Tópicos do Ensino de Física I – F 609**  
**14/06/2009**  
**Pêndulo Duplo de Airy - Blackburn**



**Aluno:** Bruna Graziela Martins, **RA:** 059260

**E-mail:** [brunagmartins@yahoo.com.br](mailto:brunagmartins@yahoo.com.br)

**Orientador:** Prof. Dr. Ennio Peres da Silva

**E-mail:** [lh2ennio@ifi.unicamp.br](mailto:lh2ennio@ifi.unicamp.br)

**Coordenador da Disciplina:** Prof. Dr. José Joaquim Lunazzi

## Índice

1 – Projeto: Pêndulo Duplo de Airy - Blackburn .....	3
1.1 Descrição.....	3
1.2 Importância Didática do Trabalho.....	4
1.3 Originalidade.....	4
1.4 Referências.....	5
1.5 Lista de Materiais .....	5
2 – Resultados atingidos .....	6
3 – Fotos da Experiência.....	8
4 – Dificuldades Encontradas.....	11
5 – Pesquisa Realizada.....	12
6 – Descrição do Trabalho .....	12
7 – Declaração do Orientador .....	15
Apêndices.....	16

# 1 – Projeto: Pêndulo Duplo de Airy - Blackburn

## 1.1 Descrição

Este projeto se baseia em um Pêndulo de Areia idealizado por Airy e Blackburn para o estudo das composições de formas de ondas e da visualização das Figuras de Lissajous.

Neste projeto, pretende-se remontar tal experimento do Pêndulo de Airy-Blackburn, como é conhecido, onde o pêndulo não oscila apenas em uma direção (Pêndulo Simples), mas sim em uma combinação de movimentos oscilatórios com direções de deslocamento perpendiculares. O objetivo é estudar o período deste pêndulo e a forma com que as variáveis **comprimento do fio** e **distância entre a massa e o ponto de bifurcação** interferem no mesmo. Pode-se estudar também a trajetória característica (conhecida como “Curvas ou Figuras de Lissajous”) percorrida pelo pêndulo de acordo com cada comprimento do fio e distância da bifurcação.

Este pêndulo será montado utilizando peças de madeira que servirão como suporte para que o pêndulo possa ser fixado, estando o barbante que suspenderá a massa preso neste suporte. Uma presilha será colocada entre a massa e o suporte, de tal forma que o fio possua um ponto de bifurcação, conforme ilustrado na Figura 01 abaixo.

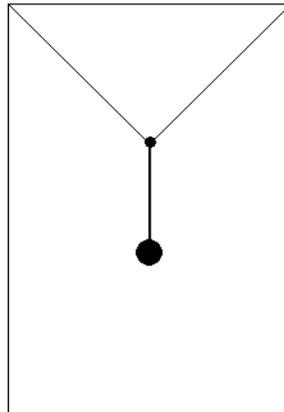


Figura 01: Esboço da Montagem Experimental para o Pêndulo de Airy-Blackburn

## 1.2 Importância Didática do Trabalho

Este experimento pode ser facilmente realizado em ambientes escolares, pois pode ser confeccionado com materiais de baixo custo (considerados sucata), permitindo ao aluno do Ensino Médio entrar em contato com o tema das Oscilações Mecânicas de uma forma de fácil compreensão. Tal experimento permite que o aluno possa visualizar na prática o mecanismo das oscilações e as variáveis que interferem no mesmo.

## 1.3 Originalidade

Como dito anteriormente, este projeto se baseia em um pêndulo idealizado por Airy e Blackburn, e consiste em uma reconstrução de seu trabalho utilizando materiais de baixo custo e fáceis de encontrar. Diversos trabalhos desenvolvidos na disciplina F609 (Tópicos do Ensino de Física I) do Instituto de Física da Unicamp – IFGW tinham como principal tema os pêndulos, inclusive o pêndulo com dois modos de vibração. Entretanto, nenhum foi realizado com tal montagem experimental e nem com o propósito de demonstrar a combinação dos movimentos oscilatórios através da visualização das Figuras de Lissajous, obtidas durante o movimento do pêndulo.

## 1.4 Referências

<http://www.fis.unb.br/gefis/exper/prolego/ondula/airy.htm>

[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_28.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_28.asp)

[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_31.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_31.asp)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas\\_de\\_Lissajous](http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas_de_Lissajous)

## 1.5 Lista de Materiais

- Peças de Madeira;
- Barbante;
- Uma porca para ser a massa do pêndulo;
- Presilha para “prender” os dois fios, deixando um ponto de bifurcação no pêndulo;
- Areia ou caneta, para demarcar a trajetória do pêndulo;
- Funil de abertura fina;
- Lousa ou bandeja onde possa ser formada a figura da trajetória do pêndulo.

Estes materiais podem ser modificados durante a montagem do experimento, caso isso seja necessário para a obtenção de melhores resultados experimentais.

O orientador, o Prof. Ennio Peres da Silva, concorda com os termos aqui estabelecidos para o projeto e declara que poderá dispor de todos os elementos necessários a menos de exceções indicadas embaixo.

Exceções: O aluno obterá o material necessário, fará as montagens e medidas necessárias.

Sigilo: Não solicita.

## **2 – Resultados Atingidos**

- **Montagem Experimental**

Em relação à lista de materiais descrita no projeto, foram feitas pequenas alterações para que a montagem do pêndulo fosse realizada da melhor maneira possível. Na montagem, foram utilizados materiais reaproveitados.

A montagem consiste de um suporte, construído utilizando três peças de madeira unidas através de pregos. Neste suporte, foram fixados em cada uma de suas extremidades um pedaço de barbante, sendo que foram utilizadas para a fixação do mesmo pequenas peças de metal em formato de gancho. A união dos dois pedaços de barbante foi feita utilizando um pequeno botão, substituindo a presilha que havia sido utilizada anteriormente, isso pelo fato de o botão poder se mover livremente no barbante podendo alterar de forma simples o ponto de bifurcação do fio. Na extremidade do barbante foi preso um pequeno funil (o qual funcionará como a massa do pêndulo). Neste funil foi colocada areia fina que escoou do mesmo em uma bandeja, feita utilizando-se papel cartão, que foi colocada embaixo do suporte do pêndulo, a fim de formar uma figura que representa a trajetória descrita pelo pêndulo.

A montagem já foi totalmente terminada, não restando nada a fazer; dessa forma o experimento se encontra completo no que diz respeito à montagem experimental. As fotos do aparato experimental em sua versão final podem ser encontradas no item 3 (Fotos da Experiência) deste Relatório.

- **Dados Obtidos**

Os resultados obtidos com este experimento são qualitativos. Este pêndulo não foi estudado de forma quantitativa. Realizou-se uma análise qualitativa procurando entender o porquê ele oscila em duas direções que são perpendiculares entre si e como a distância da massa ao ponto de bifurcação interfere no período e na trajetória do pêndulo.

Verificou-se que, ao se colocar o pêndulo para oscilar em um plano perpendicular ao plano do pêndulo (entende-se perpendicular ao plano da Figura 01), vê-se que este apresenta uma oscilação que se aproxima bastante daquela realizada por um pêndulo simples; entretanto, quando colocado para oscilar a partir de um ponto que apresenta um certo ângulo em relação ao plano que passa pelo ponto de bifurcação do pêndulo, este apresenta uma oscilação bastante significativa em duas direções perpendiculares entre si e é visível que sua trajetória é composta da combinação destes dois movimentos oscilatórios (o que está mostrado nas figuras do item 3, adiante).

Outro resultado obtido foi quanto à repetição da trajetória do pêndulo; verificou-se que esta trajetória, à medida que a amplitude da oscilação diminui, se repete formando a mesma figura em diversos tamanhos.

Observou-se também que alterando-se a distância da massa ao ponto de bifurcação a figura formada pela trajetória do pêndulo fica diferente, o que evidencia uma variação do período da oscilação descrita pelo pêndulo.

É importante ressaltar que ao utilizar areia, a massa do pêndulo varia; entretanto, não verificou-se nenhuma influência significativa nas características da oscilação (período e trajetória descrita pelo pêndulo), o que está de acordo com o esperado, uma vez que o período dos pêndulos simples não dependem de sua massa.

### 3 – Fotos da Experiência



**Figura 02:** Aparato Experimental



**Figura 03:** Visão do ponto de bifurcação do pêndulo



**Figura 04:** Visão da massa do pêndulo



**Figura 05:** Pêndulo em Funcionamento



**Figura 06:** Exemplo de Figura de Lissajous formada pela trajetória do pêndulo

#### **4 – Dificuldades Encontradas**

A maior dificuldade encontrada foi quanto à representação da trajetória do pêndulo, visto que se teve que ajustar o tamanho da abertura do funil por onde a areia passa, para que esta escoasse do mesmo com a velocidade apropriada, nem rápida nem lenta demais.

Outro problema é que a areia em determinados momentos permanece grudada no funil e não escoar. Uma das providências tomadas quanto a isso foi coar a areia de forma a eliminar pequenas pedrinhas que pudessem estar coibindo a passagem da mesma pelo funil. Tentou-se outros tipos de materiais como farinha de rosca, que também é bem fina, mas os resultados se mostraram mais satisfatórios com a utilização da areia fina.

Uma outra dificuldade encontrada foi quanto às referências, já que durante a pesquisa foram encontrados apenas trabalhos que expunham o referido projeto e nenhum que tivera sido publicado por nenhum de seus idealizadores, que como indicado no texto deste projeto, foram Airy e Blackburn, o que tornou difícil uma compreensão maior sobre a forma como ele foi idealizado.

## 5 – Pesquisa Realizada

Utilizou-se as seguintes palavras-chave para a realização da pesquisa na Internet: Pêndulo duplo de Airy – Blackburn, Pêndulo de Airy – Blackburn, Pêndulo de dois modos de oscilação, Airy e Blackburn, Lissajous, Figuras de Lissajous, Curvas de Lissajous, Blackburn pendulum, Airy pendulum.

Pesquisou-se também outros trabalhos já apresentados na disciplina de F609, sendo estes:

- Pêndulo Duplo;
- Pêndulo de Dois Modos de Oscilação;

As referências bibliográficas do tema são as mesmas já citadas no texto do projeto, reproduzidas abaixo, além de uma nova referência acrescentada, também relacionada abaixo.

<http://www.fis.unb.br/gefis/exper/prolego/ondula/airy.htm>

[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_28.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_28.asp)

[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_31.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_31.asp)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas\\_de\\_Lissajous](http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas_de_Lissajous)

[http://museo.liceofoscarini.it/museoreale/db/scheda\\_uk.phtml?Inv=763](http://museo.liceofoscarini.it/museoreale/db/scheda_uk.phtml?Inv=763)

## 6 – Descrição do Trabalho

**Resumo:** Utilizando materiais simples, montou-se um pêndulo que pode oscilar em duas direções. O que se pretende é estudar a trajetória deste pêndulo de forma a verificar a interferência destes movimentos oscilatórios entre si.

**Descrição:** Utilizando materiais reaproveitáveis, montou-se um pêndulo que pode oscilar em duas direções (dois eixos), sendo o comprimento desse pêndulo diferente em cada uma delas, cujo movimento oscilatório resultante é uma combinação dos movimentos oscilatórios nas duas direções. O objetivo é estudar de que maneira estas duas formas de oscilação interferem uma na outra, estudando a trajetória do pêndulo durante sua oscilação. Outro aspecto que se quer estudar é a forma como a distância da massa ao ponto de bifurcação interfere na trajetória descrita pelo pêndulo.

**Apêndices:** No apêndice 1 é descrito o experimento original no qual foi baseado este trabalho. Nele tem-se uma descrição da montagem experimental do pêndulo e também de seu funcionamento.

Nos apêndices 2 e 3, o Professor Luíz Ferraz Netto faz uma descrição do Pêndulo de Airy-Blackburn, trazendo uma comparação deste com outros tipos de pêndulos conhecidos, bem como uma alternativa na demarcação da trajetória do pêndulo, além de trazer uma discussão sobre a relação entre os períodos de oscilação do pêndulo em cada uma de suas direções.

Já no apêndice 4 tem-se uma breve explicação sobre as Curvas de Lissajous, curvas estas obtidas quando se tem uma combinação de movimentos oscilatórios em duas ou mais direções perpendiculares entre si. Neste experimento, a trajetória do pêndulo fornece uma Figura de Lissajous, uma vez que sua oscilação é uma combinação de movimentos oscilatórios em duas direções perpendiculares, com períodos (frequências) diferentes.

No apêndice 5 tem-se uma descrição do estudo das Figuras de Lissajous e a motivação da criação deste pêndulo, bem como a época em que foi estudado por Airy.

## **7 – Declaração do Orientador**

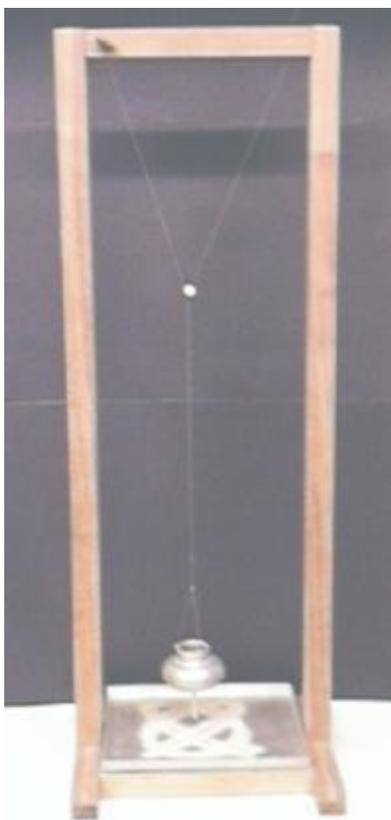
O orientador concorda com o expressado na versão prévia deste relatório final e deu a seguinte opinião:

O experimento idealizado pela aluna é excelente para ser utilizado em aulas de física no Ensino Médio. Fácil de construir e de ser demonstrado em salas de aula, evitando o deslocamento dos alunos a salas especiais ou laboratórios, quase inexistentes hoje em dia. O arranjo permite ao professor desenvolver o conceito de oscilações, muito importante pois é a base de explicação para todos os fenômenos oscilatórios, que além da mecânica envolvem eletricidade e magnetismo, ótica, física moderna, etc. Além disso, são também conhecidas as dificuldades dos professores em explicar corretamente esses fenômenos. Em se tratando de cursos mais avançados, pode-se utilizar esse experimento para cálculos matemáticos mais aprofundados, envolvendo trigonometria, com a combinação das equações características dos movimentos presentes.

O trabalho da aluna foi muito bom e necessitou de pouquíssima orientação, tendo-o realizado praticamente sozinha. As dificuldades encontradas foram superadas também com pouca ajuda do orientador, o que significa um bom entendimento do que está sendo realizado, além de iniciativa e dedicação da aluna.

## Apêndices

### Apêndice 1:



### Pêndulo Duplo de Airy

Esse se parece muito com o pêndulo simples a única diferença é que ele é preso não por uma linha em um único ponto e sim por uma linha que se bifurca ficando presa em dois

pontos. A consequência é que quando se dá uma amplitude inicial a esse pêndulo sua oscilação não ficará presa a apenas uma direção, mas sim a uma combinação de movimentos oscilatórios com direção de vibração mutuamente perpendiculares.

Aqui, o período do pêndulo dependerá não só do comprimento do fio, mas também da distância entre a massa e o ponto de bifurcação. Podemos observar também que cada comprimento do fio e distância da bifurcação faz com que o pêndulo percorra uma trajetória característica no seu plano de oscilação. Essas trajetórias são conhecidas como "curvas de Lissajous", e são equivalentes à soma de dois movimentos harmônicos de frequências diferentes e direções perpendiculares.

Para podermos observar a trajetória do pêndulo, um recipiente com um orifício é colocado no lugar da massa do pêndulo, permitindo o escoamento de areia fina que cai em uma bandeja enquanto o pêndulo oscila, deixando um "rastro" que desenhará a curva de Lissajous característica da configuração que o pêndulo tiver no momento. Para variar a distância da bifurcação usamos uma espécie de presilha, que prende os dois fios; variando a altura da presilha, aumentamos ou diminuímos o tamanho da bifurcação e, conseqüentemente, a relação de frequência nos modos de vibração.

<http://www.fis.unb.br/gefis/exper/prolego/ondula/airy.htm>

## Apêndice 2:

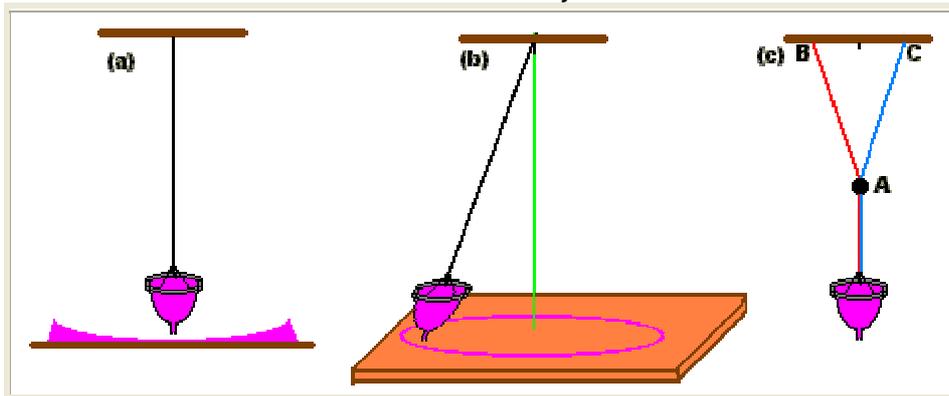
### Pêndulo duplo de Airy-Blackburn

Prof. Luiz Ferraz Netto  
[leobarretos@uol.com.br](mailto:leobarretos@uol.com.br)

#### Apresentação

O 'pêndulo de areia', tradicional é simplesmente um pêndulo que tem como massa pendular (lente) um funil. Colocando-se areia colorida dentro dele, a trajetória da extremidade do pêndulo fica marcada numa folha de papel, pela areia fina que escoia.

Se esse pêndulo é posto em movimento no plano vertical que contém a suspensão, o movimento é pendular, o centro de massa do pêndulo e, portanto a extremidade do funil, efetua um movimento harmônico se a amplitude das oscilações é pequena. Qualquer que seja esse plano vertical o movimento é sempre harmônico. Em (a), na ilustração abaixo, mostramos essa situação. Observe a areia derramada. Por que a areia acumulou-se mais nas extremidades da trajetória?



Quando se lança o pêndulo com uma velocidade que não está no plano vertical definido pela posição inicial do centro de massa pendular e pelo ponto de suspensão, então o movimento é elíptico (elipse de Lissajous). Em (b), na ilustração acima, mostramos a elipse desenhada pela areia que escoia. Observe agora, que a areia se distribui uniformemente pela trajetória toda; não há 'montículos'.

Pode-se agora suspender o pêndulo por dois fios que vão juntos até certo ponto **A** e depois se separam indo fixar-se a dois pontos **B** e **C** de um suporte horizontal. Na prática, **A** é uma pequena esfera de madeira perfurada que pode deslizar ao longo dos dois fios, determinando assim, onde ocorrerá a separação deles. Se o pêndulo oscila em torno do ponto **A**, no plano vertical que contém **BC**, ele tem um movimento harmônico de certo período  $T_1$ :

$$x = a \cdot \cos 2\pi(t/T_1) = a \cdot \cos \omega_1 \cdot t$$

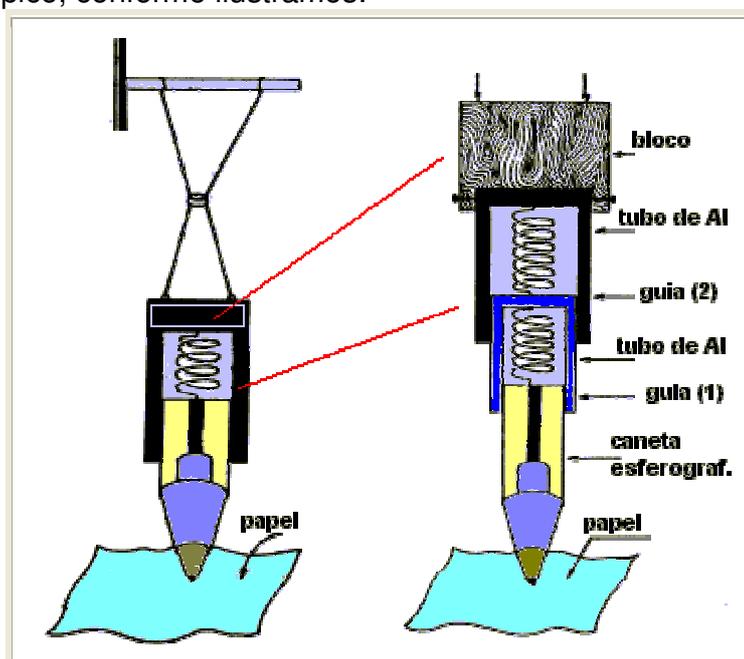
Se oscila em torno da reta **BC** no plano que contém **A** o pêndulo efetua outro movimento harmônico de período  $T_2$  diferente de  $T_1$  pois num caso e noutro são diferentes as distâncias do baricentro pendular até o ponto ou eixo de suspensão:

$$y = b \cdot \cos [2\pi(t/T_2) + j] = b \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + j)$$

Quando o pêndulo é lançado com uma velocidade que não está no plano vertical de **A** então seu movimento corresponde ao caso mais geral das **figuras de Lissajous**. Pode-se regular a altura do ponto **A** (ajustando a posição da esfera de madeira), de modo que os períodos  $T_1$  e  $T_2$  sejam comensuráveis, e neste caso as figuras correspondem a casos clássicos, sobretudo quando  $n_1$  e  $n_2$ , são números inteiros baixos ( $<4$ , digamos). [ $f_1/f_2 = T_2/T_1 = n_1/n_2$ ].

### Uma sugestão

O conhecido pêndulo de areia para o traçado das curvas de Lissajous pôde ser atualizado com técnica do sistema telescópico para a caneta esferográfica ou hidrográfica (e dispensar a fina areia). Basta construir a lente pendular com duplo sistema telescópico, conforme ilustramos:



Quer saber? Particularmente prefiro ver a areia fina, colorida, escoando pelo funil.

[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_28.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_28.asp)

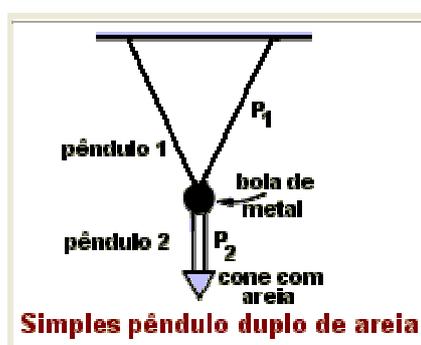
### Apêndice 3:

## O bom 'Airy-Blackburn'

Prof. Luiz Ferraz Netto  
[leobarretos@uol.com.br](mailto:leobarretos@uol.com.br)

### Apresentação

**Airy** e **Blackburn** foram os idealizadores do pêndulo de areia para o estudo das composições de formas de ondas e visualização das figuras de Lissajous. Na sua forma mais simples, esse pêndulo é constituído por um funil bem afilado (bico curto e bem fino), suspenso por dois cordéis que são fixados num suporte horizontal. Uma bola munida de dois orifícios é colocada intermediando o funil e o suporte, com os cordéis passando por seus orifícios, como se ilustra:



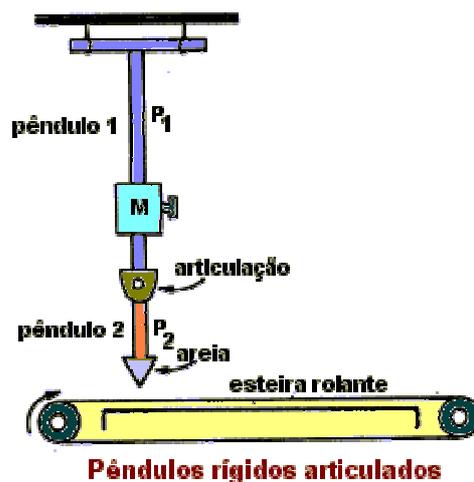
Desse modo, temos na verdade dois pêndulos acoplados; da suspensão até a bola temos um, da bola até o funil temos outro. O pêndulo superior pode oscilar apenas num plano vertical que passa pelo ponto médio dos dois pontos de suspensão. O inferior pode oscilar, independentemente, em qualquer plano vertical que contém a bola.

Coloca-se areia bem fina no funil e uma folha de papel sobre a mesa. A seguir, pode-se estudar composições de movimento harmônicos de mesma direção ou de direções ortogonais. Isso dependerá apenas das escolhas das posições iniciais de cada pêndulo.

Por exemplo, deslocando-se a bola para fora do plano da figura acima e o funil para dentro do plano da figura, teremos dois movimentos harmônicos de mesma direção, oscilando em oposição de fase.

Deslocando-se a bola para fora do plano da figura e o funil para a direita, ainda na figura anterior, teremos dois movimentos harmônicos ortogonais, em concordância de fases. Nessa situação, se os períodos dos dois pêndulos são iguais (distância bola suporte igual distância bola funil) a areia traçará uma reta inclinada sobre a folha de papel.

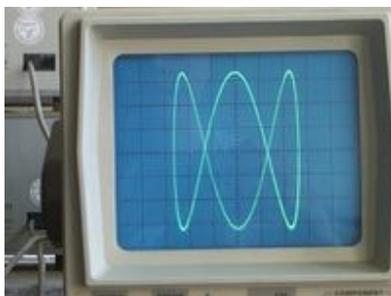
Para melhorar substancialmente o desempenho do pêndulo de Airy-Blackburn, sugerimos a montagem de dois pêndulos compostos, com hastes metálicas e ligados por articulação. Essa articulação pode girar e ser travada, de modo que o pêndulo inferior tenha seu plano de oscilação ajustável. Na haste superior, maior que a inferior, pode deslizar a massa  $M$  (há um parafuso de travamento, na posição escolhida). O copo afunilado contendo areia fina poderá oscilar, graças ao devido ajuste da articulação, em qualquer plano, relativo ao plano vertical fixo de  $M$ . Eis a ilustração:



[http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10\\_31.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_31.asp)

## Apêndice 4:

### Curvas de Lissajous



Curva de Lissajous num osciloscópio

Na matemática, a **curva de Lissajous** (**figura de Lissajous** ou **curva de Bowditch**) é o gráfico produzido por um sistema de equações paramétricas:

$$x = A \cdot \sin(a \cdot t + \delta), \quad y = B \cdot \sin(b \cdot t),$$

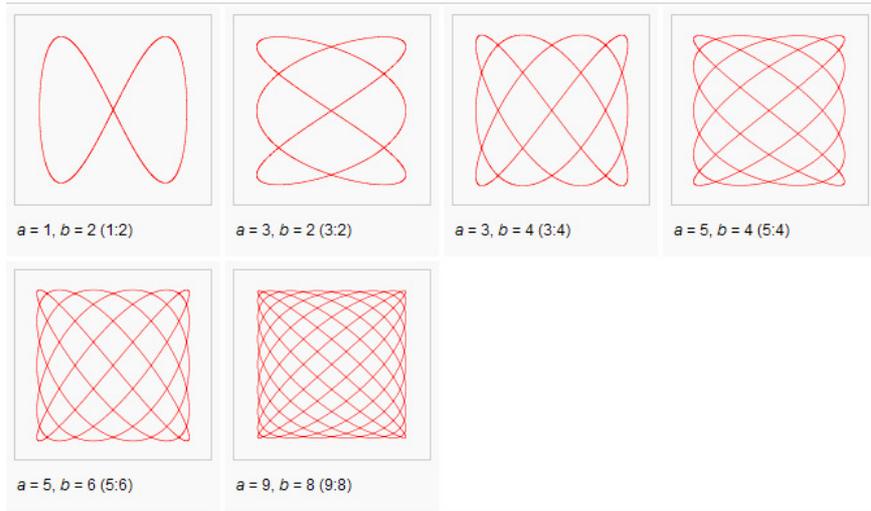
que descreve um complexo movimento harmônico. Essa família de curvas foi estudada por Nathaniel Bowditch em 1815, e mais adiante por Jules Antoine Lissajous, em 1857.

A aparência do gráfico é altamente sensível à razão  $a/b$ . Quanto a razão é 1, o gráfico produzido é uma elipse, podendo também formar círculos quando  $A = B$ ,  $\delta = \pi/2$  radianos e retas, quando  $a = b$ ,  $\delta = 0$ . Outro gráfico simples de Lissajous é uma parábola, quando  $a/b = 2$ ,  $\delta = \pi/2$ . Outras razões produzem gráficos mais complicados; os gráficos de Lissajous são estáticos (ou seja, se fecham numa figura visível) apenas quando a razão  $a/b$  é um número racional.

Curvas de Lissajous com  $a=1$ ,  $b=N$  (número natural) e  $\delta = \frac{N-1}{N} \frac{\pi}{2}$  são Polinômios de Tchebychev de primeira ordem e grau  $N$ .

Antes dos computadores modernos, as curvas de Lissajous eram tipicamente geradas por um osciloscópio (conforme ilustrado). Dois sinais senoidais de fases diferentes eram aplicados nas entradas do osciloscópio no modo X-Y. Desse modo, suponha que  $x$  alimenta o canal CH1 e  $y$  o canal CH2;  $A$  é a amplitude do CH1 e  $B$  é a amplitude do CH2,  $a$  é a freqüência de CH1 e  $b$  a freqüência CH2, assim  $a/b$  é a razão das freqüências entre os dois canais; finalmente,  $\delta$  é a diferença de fase entre CH2 e CH1.

Seguem alguns exemplos de curvas de Lissajous com  $\delta = \pi/2$ ,  $a$  ímpar,  $b$  par,  $|a - b| = 1$ .



[http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas\\_de\\_Lissajous](http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvas_de_Lissajous)

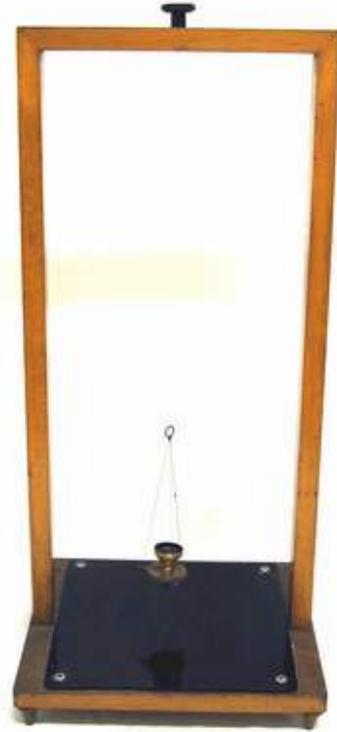
## Apêndice 5

# Airy's pendulum

### Dating

May 1915

The so-called perpendicular simultaneous pendular movements (the composition of two perpendicular sinusoidal movements) was first investigated in 1815 by the astronomer Nathaniel Bowditch (1773-1838) and then studied in 1857 by the physicist Jean Antoine Lissajous (1822-1880), of whom homonymous figures (obtained by changing the oscillation periods' ratio) are well-known. The tool, invented by George Biddell Airy (1801-1892), is a double pendulum with which is possible to produce with the sand the Lissajous' figures in a real simple way. These same figures can be obtained in acoustics using some special diapasons with mirrors and a luminous source (this is known as Lissajous' experience).



[http://museo.liceofoscarini.it/museoreale/db/scheda\\_uk.phtml?Inv=763](http://museo.liceofoscarini.it/museoreale/db/scheda_uk.phtml?Inv=763)