

## **Pêndulo balístico**



**Aluno: Fernando Alves Ferreira**  
**nando.feral(a)yahoo.com.br**

**Orientador: Professor Doutor Fernando Iikawa**  
**iikawa(a)ifi.unicamp.br**

## **Resumo:**

Neste relatório iremos apresentar um projeto de construção de um pêndulo balístico, este pêndulo consiste em um conjunto lançador pêndulo que funciona como um medidor de velocidade de projéteis, pois o projétil lançado pelo lançador colide com o pêndulo que devido a esta colisão sofre certo deslocamento o que possibilita que a velocidade do projétil que foi lançada seja calculada. Este projeto sofreu várias modificações durante o decorrer de sua elaboração, pois este é um experimento que apresenta certas dificuldades como serão mostradas e discutidas no decorrer do relatório.

## **Introdução:**

Este tipo de pêndulo foi elaborado e utilizado com o intuito de se calcular a velocidade de projéteis que sofrem uma colisão inelástica ao colidir com o pêndulo no caso este anteparo. Este experimento foi escolhido por possibilitar aos alunos uma visualização de uma aplicação das leis de conservação da quantidade de movimento linear, além da conservação da quantidade de energia mecânica do sistema. Mostrando isso de uma forma interessante e didática para estes alunos.

## **Resultados atingidos:**

Neste experimento encontramos muitas dificuldades que de forma direta interferiram nos resultados atingidos. Porém estas dificuldades também foram de grande ajuda na simplificação e montagem deste experimento.

A primeira grande dificuldade foi o planejamento da montagem do experimento de forma geral, onde coletar e quais materiais coletar, A parte do pêndulo que mais Du trabalho foi o próprio pêndulo que em um primeiro momento foi pensado como sendo manufaturado, mas depois de conversas com o orientador para o planejamento do experimento chegamos à conclusão que uma substituição de partes do experimento por uma série de materiais recicláveis e reaproveitados, como lata de cerveja e até mesmo uma barra roscada, reduzindo o que seria uma peça toda manufaturada em apenas uma parte manufaturada como poderá ser visualizado pelas fotografias do experimento.

O objetivo de se colocar os problemas anteriores aos resultados alcançados vem no intuito de que nesses tropeços é que melhoramos nossos resultados. A montagem do experimento pode ser classificada como sendo bem sucedida no sentido de que todo o aparato foi montado, pêndulo e lançador, sendo que este aparato também apresentou os resultados esperados, ou seja, o sistema funciona como esperávamos, ao lançarmos uma esfera com o lançador esta colide de forma inelástica com o sistema do pêndulo, possibilitado uma conservação da quantidade de energia mecânica do sistema, o que através de uma medição do ângulo de inclinação do pêndulo podemos quantificar a quantidade de energia mecânica do sistema e assim consequentemente a velocidade do projétil.

Melhorias sempre são possíveis e bem vindas, este projeto necessita de certa precisão em sua montagem, nada milimétrico, porém temos de realizar sua montagem com certa precisão, pois o projétil tem de atingir o alvo (Pêndulo) de forma a aperfeiçoar o processo e evitar a perda de energia por atrito e por oscilações do pêndulo fora do plano desejado o que acarreta em perda de energia e aumento da imprecisão do

instrumento. Logo uma montagem um pouco mais precisa com a inserção de um sistema que se possibilita a regulagem do lançador como um ajuste de mira seria muito bem vindo, neste experimento foi tentado algo do tipo com parafusos, porém não foi tão eficaz, acarretando na inserção de ajustes que não são bem vindos e prejudicam a apresentação do experimento.

Lembrando que as pesquisas realizadas principalmente na internet foram cruciais para a realização do experimento, estas referências estão comentadas abaixo:

Para a realização desse projeto a internet foi a minha principal fonte de informações, foram várias buscas por informações e dados utilizando palavras-chave como: Pêndulo balístico, colisões, Ballistic Pendulum, entre outras variações dessas mesmas palavras.

As principais referências encontradas são as citadas acima no projeto além de mais algumas que nos ajudaram para a manipulação dos dados para a explicação do Pêndulo balístico.

- I. <http://www.defi.isep.ipp.pt/site/normas/0020.pdf>

Este é o site do Instituto Superior de Engenharia de Porto, e fornece um roteiro e breve explicação dos conceitos envolvidos no funcionamento de um pêndulo balístico, se mostrando importante por relatar a presença desse também no exterior.

- II. [www.feiradeciencias.com.br/sala05/05\\_43.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala05/05_43.asp)

O site feira de ciências é um famoso site que possibilita que pessoas tenham acesso as informações como teoria e materiais necessários para a montagem de determinadas experiências, este site também serviu para meu embasamento teórico e ajuda na busca do modelo de pêndulo que eu vou montar, uma vez que a várias possibilidades e formatos possíveis para o pêndulo balístico.

- III. <http://www.fsc.ufsc.br/cbef/port/02-3/artpdf/a6.pdf>

- IV. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de Física, vol I, editora LTC, 7ª edição

Este livro oferece uma análise sobre pontos do pêndulo balístico como a parte de colisões, centro de massa e momento de inércia que serão de fundamental importância para o andamento e análise do projeto.

- V. Aluna C. Orsi; Orientador D. Soares; Pêndulos de Newton. [www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/.../962020\\_Carla\\_pendulo\\_newton.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/.../962020_Carla_pendulo_newton.pdf)

- VI. Aluna N. de Nadai; Orientador M. de Aguiar; Transferência de energia e momento em processos de colisão. [www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530.../NataliaD-Aguiar\\_F609\\_RF2.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530.../NataliaD-Aguiar_F609_RF2.pdf)

As referências V e VI são de fundamental importância uma vez que essas são referências de trabalhos que dessa disciplina que lidaram com pontos comuns aos que estou lidando em meu trabalho, que ajudam na busca por materiais e métodos de análise do meu projeto/experimento facilitando minha familiarização com os métodos utilizados, dificuldades encontradas e objetivos alcançados.

- VII. [www.sc.ehu.es/sbweb/fisica](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica)

Este site já faz uma análise mais sofisticada da parte algébrica do experimento, o que me ajudou a levantar pontos que eu ainda não havia pensado e com isso talvez meu experimento não surtisse o efeito esperado.

Este experimento tem duas formas de ser explicado, sempre tendo como ponto de referência o público alvo do experimento, por isso para a apresentação deste experimento para um público de ensino médio eu recomendo uma análise um pouco menos criteriosa, apenas por conservação de energia mecânica sem que se leve em conta o momento de inércia do corpo, pois este é um assunto não pertinente ao currículo deste nível de ensino.

O que acarretaria em uma apresentação matemática como a dada abaixo:

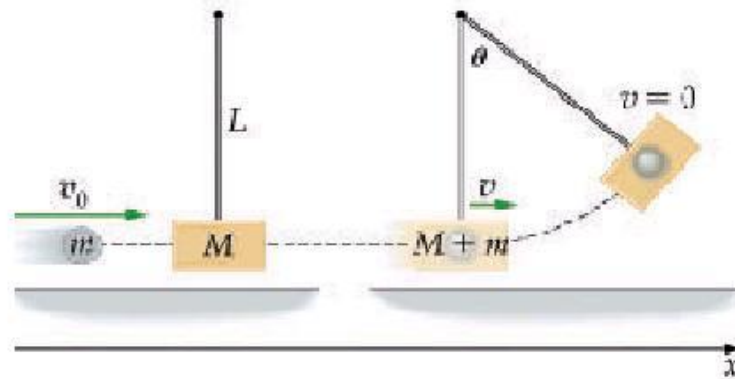


Figura 1(Pêndulo balístico diagrama de colisão)

Como vemos ilustrado na figura 1 o projétil tem uma velocidade  $V_i$  antes da colisão, que o coloca com um momento linear:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{V}_i \quad (1)$$

Onde  $m$  é sua massa e  $V_i$  sua velocidade, após a colisão temos um novo sistema de massa  $M+m$  e velocidade dada pela conservação da quantidade de movimento:

$$\vec{V}_F = \frac{m}{m+M} \times \vec{V}_i \quad (2)$$

Onde  $V_F$  é a velocidade do sistema após a colisão e  $M$  é a massa do sistema pós colisão.

Como o sistema adquiriu velocidade  $V_F$  após a colisão, este também adquiriu energia cinética dada por:

$$E_c = \frac{(M+m) \times V_F^2}{2} \quad (3)$$

Pelo princípio da conservação da quantidade de energia mecânica de um sistema podemos escrever que a energia cinética é igual à energia potencial:

$$E_c = E_p \quad (4)$$

$$E_c = \frac{(M+m) \times V_F^2}{2} = (M+m)gh$$

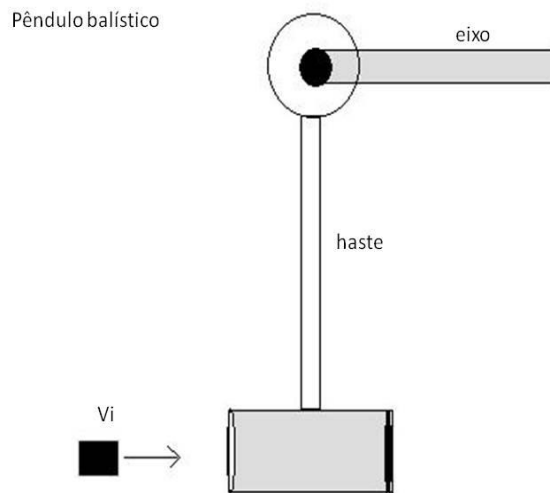
Onde  $g$  é aceleração da gravidade,  $h$  é a altura máxima que o sistema pêndulo atingiu e  $E_p$  é a energia potencial. Disso podemos tirar através de manipulações matemáticas que:

$$V_i = \frac{M+m}{m} \times \sqrt{2gh} \quad (5)$$

Essa equação (5) nos dá aquilo que desejávamos no início da análise que é a velocidade do projétil em função da altura que o sistema atingiu após a colisão.

Lembrando que para essa análise desprezamos a resistência do ar e entre o pêndulo e seu eixo de rotação, e consideramos que houve uma colisão totalmente inelástica entre o projétil e pêndulo sendo ainda que para essa análise consideramos a massa da haste desprezível, sendo que esta resultou em uma conservação total do momento linear do sistema ou conservação da quantidade de movimento.

Porém assim como já foi anunciado essa análise é um pouco mais pobre do que se espera de um problema desses, logo uma análise um pouco mais sofisticada se faz necessária como apresentada abaixo:



**Figura 2**

O Pêndulo balístico pode ser analisado pelo princípio da conservação da quantidade de movimento linear e energia mecânica e uma análise com relação ao seu centro de massa e momento de inércia.

Para iniciarmos a análise temos de considerar que o sistema após a colisão se tornará um só, ou seja, projétil+ Pêndulo, essa consideração é necessária no sentido de que a energia mecânica do sistema se conserva.

Após a colisão o sistema irá entrar em movimento com uma energia cinética, nesse caso uma energia cinética de rotação dada por:

$$E_c = \frac{IW^2}{2} \quad (6)$$

Onde I é o momento de inércia do sistema, W é a velocidade angular dada por  $W=Vr$ , onde v é a velocidade do pêndulo e r o raio de giro do pêndulo.

O momento de inércia do sistema é dado pela soma do momento de inércia de cada um dos elementos do pêndulo, que se resumem em três partes Disco, Haste e Cilindro.

O momento de inércia das partes é dado pelo teorema dos eixos paralelos, dada por:

$$I = I_{cm} + Mh^2 \quad (7)$$

Onde I é o momento de inércia do sistema,  $I_{cm}$  é o momento de inércia devido a um eixo pelo centro de massa da peça, M a massa da peça e h é a distância do centro de massa até o eixo de rotação.

Aplicando esta expressão para cada uma das partes do pêndulo chegamos a:

$$IH = \frac{1}{12}M(3Ra^2 + 4L^2) \quad (8)$$

$$Ic = \frac{m}{2}(Rc^2 + 2L^2) \quad (9)$$

$$ID = \frac{Md}{2} Rd^2 \quad (10)$$

Onde IH é o momento de inércia da haste, M é a massa da haste, ra é o raio da haste, e L é a distância entre o centro de massa e o eixo de rotação, Ic é o momento de inércia do cilindro, m a massa do cilindro, Rc o raio do cilindro, ID é o momento de inércia do cilindro, Md a massa do cilindro e Rd o raio do cilindro. Com estes valores em mãos o momento de inércia do sistema é dado pela soma desses valores.

$$It = ID + Ic + IH \quad (11)$$

Com estes valores em mão podemos analisa a conservação da quantidade de energia mecânica do sistema:

$$Ep = Ec$$

$$\frac{ItW^2}{2} = (Mt + mb)gh$$

$$It(Vr)^2 = 2(Mt + mb)gh$$

$$V = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2(Mt+mb)gh}{It}} \quad (12)$$

Onde Mt é massa total do sistema do pêndulo e mb é massa do projétil, g é a aceleração da gravidade, h a altura que o pêndulo se moveu, V a velocidade linear do sistema, r o comprimento do sistema pêndulo e W a velocidade angular do sistema.

V é do sistema pós colisão que é adquirida pelo sistema por conservação da quantidade de movimento, que me Possibilita a análise da velocidade do projétil pelo movimento do sistema:

$$\vec{Pi} = \vec{Pf}$$

$$mb \times \vec{Vb} = (Mt + mb) \times \vec{V}$$

$$\vec{Vb} = \frac{(Mt+mb) \times \vec{V}}{mb}$$

$$Vb = \frac{(Mt+mb)}{mb} \times \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2(Mt+mb)gh}{It}} \quad (13)$$

Essa análise encerra o processo de compreensão do sistema do pêndulo balístico, fornecendo a velocidade do projétil anterior a colisão.

Lembrando que a Altura do projétil vai ser dada pelo deslocamento angular do pêndulo em seu ponto de energia potencial máxima, logo se consideramos a posição do centro de massa do sistema como sendo c teremos:

$$h = c(1 - \cos\theta) \quad (14)$$

Logo a equação 13 ficaria como sendo:

$$Vb = \frac{(Mt+mb)}{mb} \times \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(2(Mt+mb)gc(1-\cos\theta))}{It}} \quad (15)$$

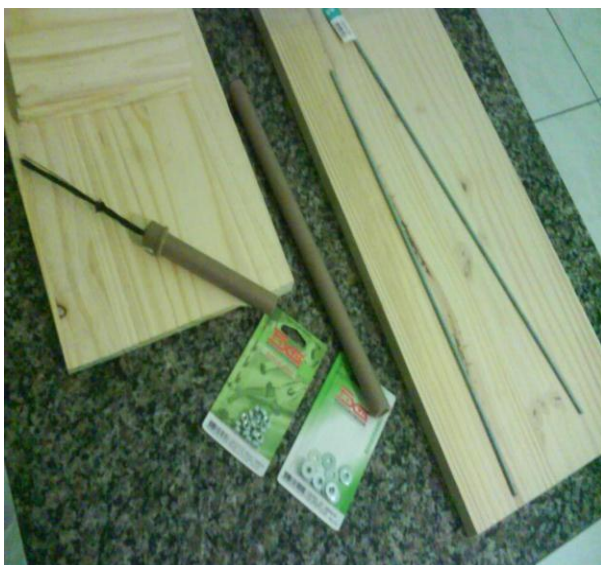
Mesmo assim como temos ainda um sistema que mesmo com as aproximações acima apresenta uma dificuldade que é o cálculo do momento de inércia do sistema, porém este teve de ser calculado através do período de oscilação médio do pêndulo que é dada pela equação abaixo:

$$\frac{1}{2} * I\omega^2 = Mg * h \quad (16)$$

Que me forneceu um valor médio de 0,064Kgm<sup>2</sup> para o sistema.

Lembrando que como este não é um experimento cujo objetivo seja a exatidão das medidas e sim a aplicação de um conceito físico de forma experimental para alunos do ensino médio, logo uma análise de erros e instrumentos de precisão não foram aplicados nessas medidas o que acarreta em valores aproximados, e que entram em uma possível melhora do experimento em uma reprodução, onde recomendamos uma análise qualitativa e quantitativa maior deste valor para uma maior precisão do experimento.

Abaixo se encontram algumas fotos do experimento durante sua montagem:



## Conclusão:

Posso concluir sobre este experimento que ele me foi de grande valia, pois me ajudou a ter experiência na elaboração e planejamento de um experimento desde sua escolha, elaboração, execução e análise matemática, além da apresentação destes dados para outras pessoas. Posso concluir que este experimento superou minhas expectativas com relação ao seu desempenho, pois por vezes me perguntei se ele realmente funcionaria, além de se apresentar como uma ferramenta de grande utilidade para uma análise de um sistema de conservação de energia bem didático e maleável, sendo que se bem montado, no sentido de minimizar erros, este é um experimento com potencial para análise tanto no ensino médio como também no ensino superior em laboratórios de física básica. Com isso finalizo colocando este como um experimento bem interessante e recomendável para a análise e aplicação didática.

## Parecer do Orientador:

O aluno concluiu o seu trabalho sobre pêndulo balístico no prazo e obteve êxito no seu funcionamento. É um sistema simples, porém suficiente para passar os conceitos básicos de mecânica em uma aula no curso fundamental.

## Referências:

- I. [www.sc.ehu.es/sbweb/fisica](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica)  
Este site fornece uma série de análises sobre pêndulos e colisões, contudo esse que me ajudou na análise matemática do pêndulo balístico.
- II. <http://www.defi.isep.ipp.pt/site/normas/0020.pdf>  
Este é o site do Instituto Superior de Engenharia de Porto, e fornece um roteiro e breve explicação dos conceitos envolvidos no funcionamento de um pêndulo balístico, se mostrando importante por relatar a presença desse experimento também no exterior.
- III. [www.feiradeciencias.com.br/sala05/05\\_43.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala05/05_43.asp)  
O site feira de ciências é um famoso site que possibilita que pessoas tenham acesso as informações como teoria e materiais necessários para a montagem de determinadas experiências, este site também serviu para meu embasamento teórico e ajuda na busca do modelo de pêndulo que eu vou montar, uma vez que a várias possibilidades e formatos possíveis para o pêndulo balístico.
- IV. <http://www.fsc.ufsc.br/cbef/port/02-3/artpdf/a6.pdf>  
Este cita o desenvolvimento de um pêndulo balístico por alunos de graduação, em uma de suas disciplinas, o que ajudou no planejamento físico do pêndulo e sua estrutura.
- V. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentos de Física, vol I, editora LTC, 7ª edição



Este livro oferece uma análise sobre pontos do pêndulo balístico como a parte de colisões, centro de massa e momento de inércia que serão de fundamental importância para o andamento e análise do projeto.

VI. Aluna C. Orsi; Orientador D. Soares; Pêndulos de Newton.  
[www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/.../962020\\_Carla\\_pendulo\\_newton.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/.../962020_Carla_pendulo_newton.pdf)

VII. Aluna N. de Nadai; Orientador M. de Aguiar; Transferência de energia e momento em processos de colisão.  
[www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530.../NataliaD-Aguiar\\_F609\\_RF2.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530.../NataliaD-Aguiar_F609_RF2.pdf)

As referências VII e VI são de fundamental importância uma vez que essas são referências de trabalhos que dessa disciplina que lidaram com pontos comuns aos que estou lidando em meu trabalho, que ajudam na busca por materiais e métodos de análise do meu projeto/experimento facilitando minha familiarização com os métodos utilizados, dificuldades encontradas e objetivos alcançados.

VIII. [www.sc.ehu.es/sbweb/fisica](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica)

Este site já faz uma análise mais sofisticada da parte algébrica do experimento, o que me ajudou a levantar pontos que eu ainda não havia pensado e com isso talvez meu experimento não surtisse o efeito esperado.