

RELATÓRIO FINAL F- 609

Universidade Estadual de Campinas



Tábua De Galton

Aluno: Roni Gasolla RA: 064347

Orientador: Maurício U. Kleinke

Introdução

Esse projeto baseia-se no estudo da distribuição normal, também conhecida como gaussiana, por meio da tábua de galton. Observe o gráfico abaixo que ilustra a forma da gaussiana:

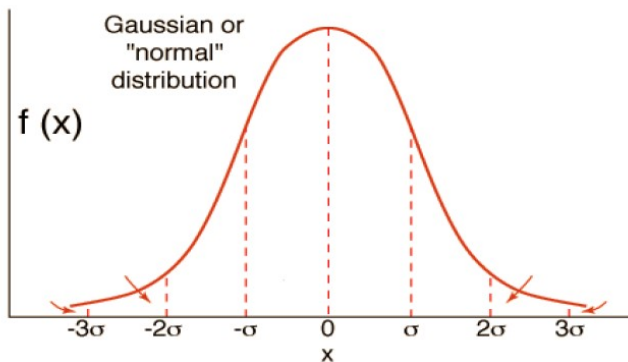


Figura 1: Gráfico da gaussiana ou distribuição normal

Para a obtenção da curva acima por meio da Tábua De Galton, pregamos os pregos na tábua de acordo com o arranjo mostrado abaixo:

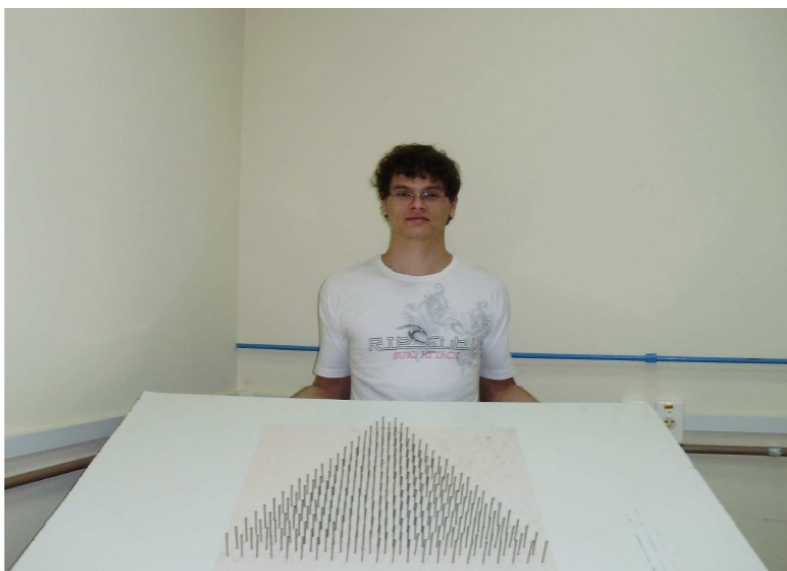


Foto 1: Projeto em andamento

Os pregos, como podemos observar na foto acima, foram colocados de modo a obtermos um arranjo triângular (triângulo equilátero). Para visualizarmos a curva na base da tábua, soltamos algumas esferas de gude no topo da tábua e observamos a queda de cada uma delas ao longo desse arranjo. As fotos abaixo ilustram esse processo:

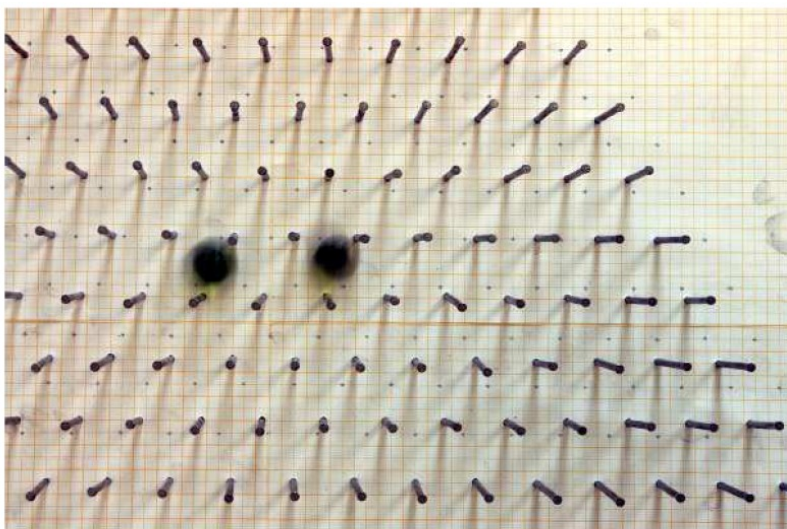


Foto 2: Esferas de gude caindo do topo da Tábua

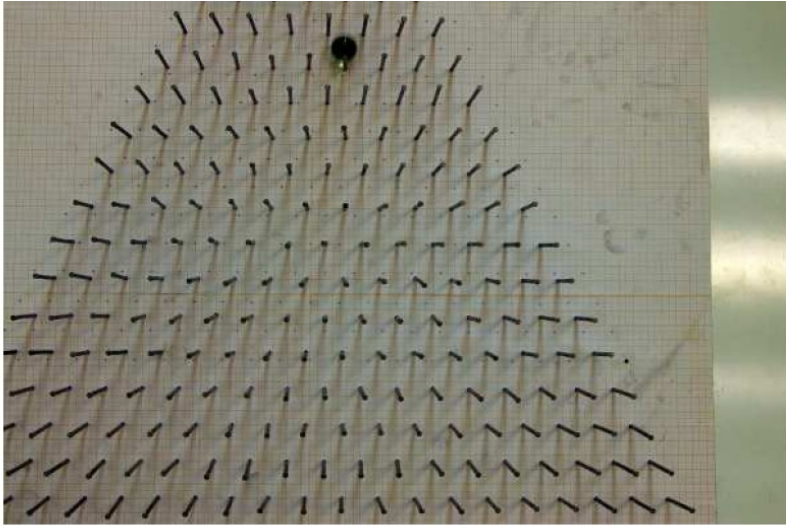


Foto 3: Esferas de gude caindo do topo da Tábua

No final da tábua, foram construídas colunas para armazenar as bolinhas que foram soltas do topo da tábua. Cada uma delas é constituída por pregos, que possuem um espaçamento suficiente para não deixar as bolinhas “vazarem” pelas laterais. Observe a foto abaixo já com as esferas na base:

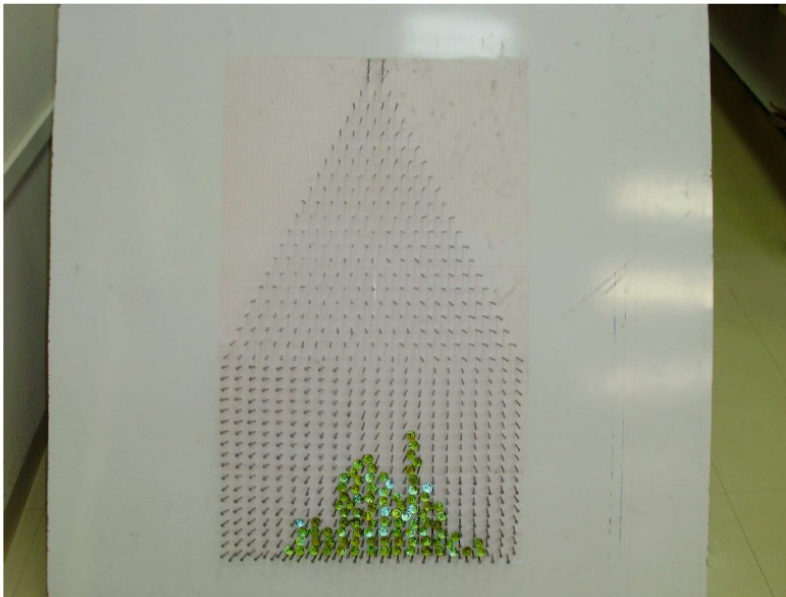


Foto 3: A gaussiana observada na base as Tábua

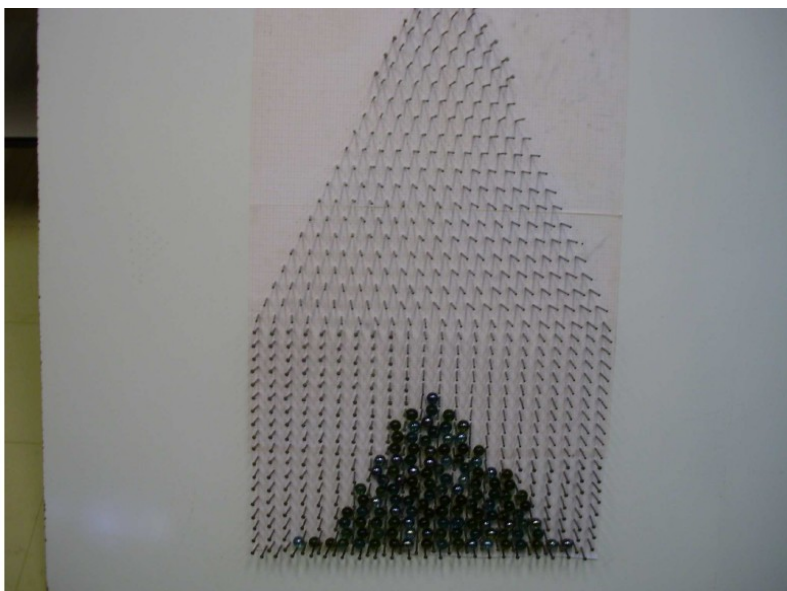


Foto 4: A gaussiana observada na base as Tábua

Quando comparamos o gráfico da figura 1 com as “curva” obtida com as esferas de gude na base tábua, observamos que ela se aproxima do modelo teórico apresentado na figura 1, com um número maior de esferas nas colunas centrais e um número menor nas colunas mais afastadas do centro da tábua.

Esse resultado é de se esperar, pois soltamos cada uma das esferas na parte central do arranjo e como consequência, há uma maior probabilidade delas se concentrarem no centro da tábua, como explicaremos abaixo.

É importante ressaltar que este experimento foi feito completamente por um amador! Desta forma os erros e incertezas são muito grandes.

- Os pregos não ficaram dispostos na vertical como era de se esperar;
- A madeira utilizada estava com uma pequena inclinação central;
- As esferas de gude não são homogêneas.

Mesmo tomando todos os cuidados necessários, não obteremos na Tábua uma curva que fique idêntica à teórica. Isso ocorre porque estamos lidando com probabilidades, e uma vez ou outra obteremos uma curva diferente. Dessa forma, se obtivermos curvas parecidas com as esperadas, podemos concluir que o projeto obteve êxito. De acordo com a foto 3, esse êxito foi alcançado.

Material Utilizado

- Martelo
- Esferas de gude (diâmetro de 18mm)
- Tábua de 1,2m por 1,2m
- Papel quadriculado

- Pregos (3,0mm de diâmetro)
- Cola

Dificuldades encontradas

Para a realização do Projeto Tábua de Galton, foi necessário a compra várias bolinhas de gude e vários pregos. Comprar as bolinhas de gude não foi uma tarefa tão simples.

Em primeiro lugar, procurei em uma loja próxima da moradia, mas não consegui realizar a compra, pois todas elas já haviam sido vendidas. Então, mandei um amigo procurar em uma loja no centro de Campinas, loja que ele sabia que vendia. Mas também não foi possível. Por fim consegui encontrar-las na avenida Santa Isabel em uma papelaria que fica em frente ao Banco Banespa.

Comprei aproximadamente 100 bolinhas de gude, por um preço acessível. Com isso, o experimento contou com mais de 100 bolinhas para a obtenção da Gaussiana.

A compra dos pregos foi muito mais fácil. O projeto começou com pregos da Gerdau cuja medida é difícil de encontrar no mercado. Para o término do projeto, foram utilizados pregos diferentes. Essa mudança não alterou o objetivo do projeto, pois esses pregos foram utilizados na construção das colunas na base da tábua, que serviriam apenas para estocar as bolinhas de gude.

Modelo Teórico

Agora, vamos mostrar de uma maneira simples, porque a concentração das bolinhas é maior nas colunas centrais. Considere a figura abaixo:

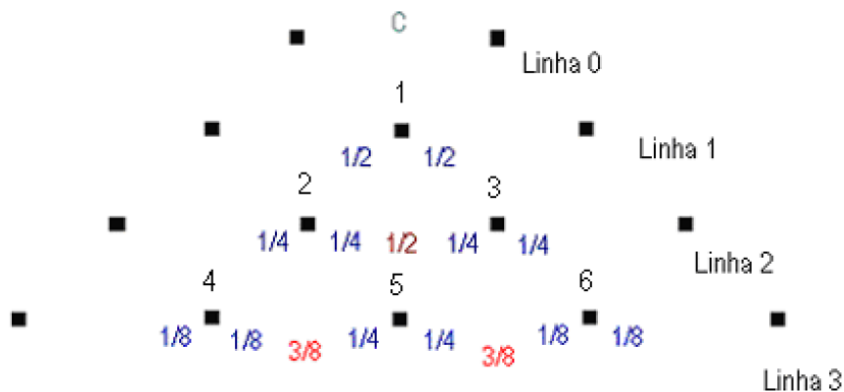


Figura 2: Desenho esquemático da Tábua de Galton

Os pontos marcados de preto representam a posição de cada prego na tábua. Os números 1,2,3,4,5 e 6 numeram cada prego e ao lado temos a numeração de cada linha horizontal.

Quando liberamos a esfera no ponto central C, ela colide com o prego 1 tendo 50% (1/2) de chance de ir para a direita e mais 50% (1/2) de chance de ir para a esquerda. Isto está representado pelos números em azul na linha 1.

Ao colidir com o prego 2 ou com o prego 3, ela terá agora, 25% (1/4) de chance de ir para a esquerda e mais 25% (1/4) de chance de ir para a direita em relação a cada prego. Representamos tais valores em azul na linha 2 da tábua. Esse padrão se repete em cada colisão da esfera com o prego seguinte.

O que devemos observar é a probabilidade “resultante” da esfera se deslocar para a posição central da linha 2. Esse valor igual a 1/2 é o resultado da soma dos valores 1/4 do lado direito do prego 2 com 1/4 do lado esquerdo do prego 3. Esse valor nos mostra que a probabilidade da esfera passar ali é maior.

O mesmo ocorre nas duas posições localizadas mais ao centro da linha 3. Esses valores (3/8), estão representados pela cor vermelha. Esse raciocínio é prolongado até a base da tábua, fornecendo sempre maiores valores nas posições centrais. Observe que a soma das probabilidades em cada linha é igual a um:

- Linha 1 : (1/2)+(1/2)
- Linha 2 : (1/4)+(1/4)+(1/4)+(1/4) = 1
- Linha 3 : (1/8)+(1/8)+(1/4)+(1/4)+(1/8)+(1/8) = 1

Esse raciocínio está totalmente de acordo com o observado na foto 3, ou seja, para qualquer esfera lançada, a probabilidade de cada uma se encontrar nas colunas centrais é maior. Obtemos assim, a gaussiana na tábua.

A equação matemática que descreve o comportamento de uma gaussiana é:

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]; \text{ em que } \mu \text{ é o valor médio da variável}$$

x dado por $\mu = \sum \frac{x_i}{n}$, e σ^2 é a variância da variável x dada por

$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 / n$, onde n é o número total de lançamentos e x_i é a posição da i-ésima esfera lançada.

A largura da Gaussiana depende do valor de σ^2 , ou seja, quanto maior o valor da variância, mais larga é a curva da gaussiana e, quanto menor o valor da variância mais estreita é a curva da gaussiana. O gráfico abaixo ilustra diferentes formas adquiridas por ela.

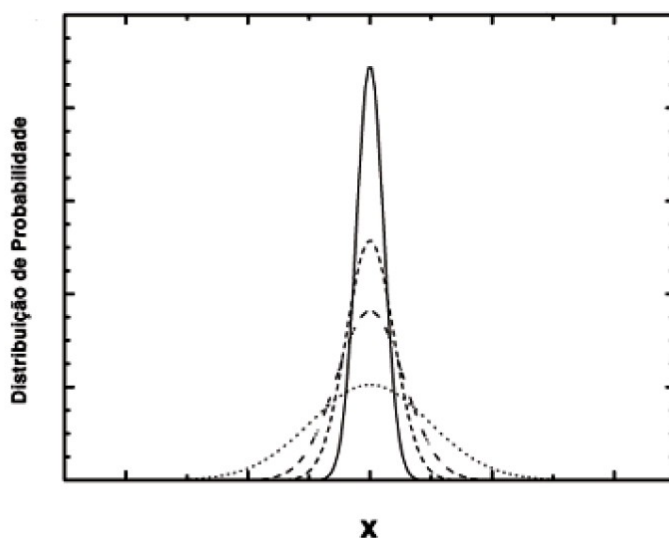


Figura 3: Gráfico da Gaussiana para diferentes valores de variância

A curva “cheia” representa uma gaussiana com um baixo valor para a variância, já a curva mais “larga” observada no gráfico possui um valor maior para a variância. Em todas elas, a área abaixo da curva é igual a 1, assim como a soma dos valores encontrados em cada linha da figura 2.

Conclusão

Observando os “gráficos” obtidos a partir das fotos e comparando com a curva teórica da gaussiana, notamos que os resultados estão próximos do esperado. Podemos dizer que o projeto obteve êxito e pode ser amplamente utilizado para despertar a curiosidade dos alunos do ensino médio, ampliando seus horizontes no estudo de probabilidades.

Referências:

- SALINAS, Silvio R.A. em “Introdução à física estatística”, Ed. da Universidade de São Paulo, 1997
- Mlodinow, Leonard em O Andar do Bêbado: como o acaso determina nossas vidas; Ed. Zahar; 2009
- GUIMARÃES, Wladimir O.N. e ROVERSI, José A. em “Problemas experimentais em Física” Volume I, 2ª edição, Ed. da Unicamp, 1988