

Aluno: Carlos Kenichiro Yoshino RA: 881776

Email: yoshino@asga.com.br



Orientador: Alberto Saa

Email: asaa@ime.unicamp.br



Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas

F609: Tópicos de Ensino de Física I

Data de finalização: 15/06/2010.

PÊNULO INVERTIDO

Resumo

A proposta é mostrar as condições de estabilidade de um pêndulo invertido. Um pêndulo apoiado em uma haste que está em contato com o cone do alto-falante vibrará com a alimentação de uma fonte de tensão senoidal, para diversas amplitudes e frequências. Com isso, estudaremos as condições de estabilidade do pêndulo. O curioso desta experiência é que encontraremos uma frequência onde o equilíbrio está na posição do pêndulo invertido.

Sumário

1	Introdução	2
2	Fundamentação teórica	3
3	Montagem experimental	8
4	Resultados e Conclusões	10
5	Comentários do orientador	11
6	Horário e dia da apresentação do painel	11
7	Referências	11

1) INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido é um conceito muito difundido na área de automação e robótica. Um dos algoritmos de controle amplamente aplicado nesta área é fazer o movimento do carro em conformidade com a estabilidade do pêndulo invertido. Existem diversas experiências com pêndulos, alguns tradicionais como o Wilberforce e o duplo (já desenvolvidos na Unicamp com o Prof. Saa), que mostram conceitos de mecânica diferentes do Pêndulo Invertido, sendo o primeiro o fenômeno do “batimento”, e o segundo o movimento caótico. Na visão do orientador, a grande motivação deste trabalho é que “o estudante de ensino médio ainda não tem condições de entender todas as sutilezas do fenômeno mecânico envolvido do Pêndulo Invertido, mas por se tratar de algo inesperado, o aluno fica quase sempre muito curioso e motivado para estudar mais”. Pesquisando referências de Pêndulo Invertido desenvolvido na Unicamp, encontrei um trabalho do aluno Claiton Pimentel de Oliveira orientado pela Professora Kyoko Furuya do dia 21/06/2006⁽¹⁾. Nesta referência em particular, o pêndulo foi montado já na posição invertida, e o seu estudo seria de verificar as condições de estabilidade e instabilidade com as mudanças nos parâmetros do pêndulo e do movimento. No nosso caso, o pêndulo iniciará na posição de repouso, e com a oscilação do cone do auto-falante, o pêndulo movimentará até atingir a estabilidade com o pêndulo invertido, ou seja, apesar dos conceitos físicos estudados serem bastante semelhantes, a montagem é bem diferente.

Na minha visão e do orientador, a importância didática do trabalho é aplicar os conhecimentos de mecânica para compreender o movimento do pêndulo. A idéia também é apresentar um banner com as explicações das equações de movimento envolvidas no experimento e como encontrar as condições de estabilidade. A opção por este trabalho foi pelo desafio desta experiência. Segundo o professor Alberto Saa, ele acredita que seja um dos mais complexos na matéria de pêndulo, e nunca viu este tipo de montagem sendo realizada na Unicamp, apesar de ter sugerido para diversos alunos. Entretanto, o estudo proposto é amplamente divulgado dentro das Instituições de Ensino, com experiências feitas no Brasil e no mundo.

2) FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O centro de massa de um pêndulo invertido está acima do seu ponto de suspensão. Se este ponto é estacionário, o sistema é instável. Se, entretanto, o ponto de suspensão é dado por uma oscilação de alta frequência na direção vertical, o pêndulo torna-se estável. Com o pêndulo na posição invertida, se for feito pequenos toques para o deslocamento lateral, de novo, o pêndulo se ajusta e volta para a posição vertical. A equação que descreve este movimento está apresentada a seguir:

$$\ddot{\alpha} - [(g + \ddot{h})/l] \text{sen}\alpha = 0$$

(1)

Onde:

- α Desvio da posição vertical;
- \ddot{h} Aceleração vertical do ponto de suporte
- l Comprimento do pêndulo
- g Aceleração da gravidade

O movimento da equação (1) é derivado da figura abaixo:

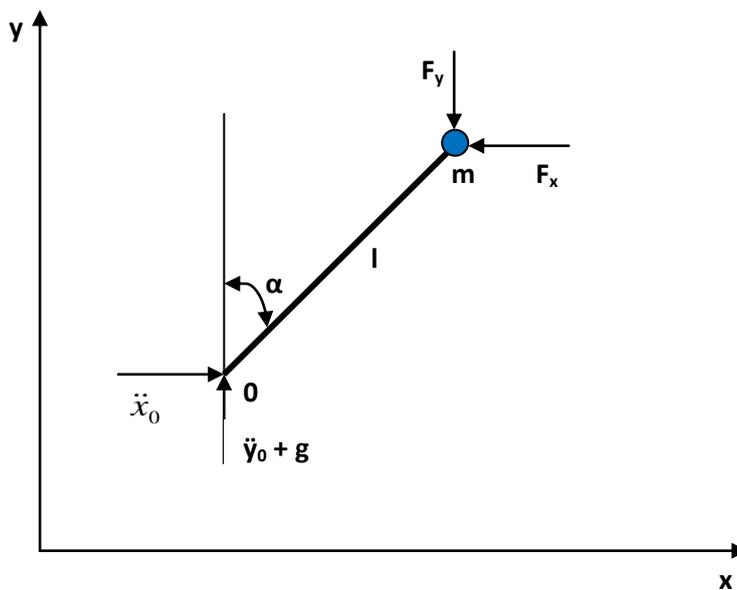


Figura 1 – Pêndulo Invertido

Tomando o ponto de suspensão 0 como referência e temos as componentes de aceleração \ddot{x}_0 e \ddot{y}_0 devido a condição inercial. A força de gravidade g está agindo na massa m . A aceleração positiva \ddot{x}_0 produz uma força inercial na direção negativa na massa m :

$$F_x = -m\ddot{x}_0 \quad (2)$$

e similarmente,

$$F_y = -m(\ddot{y}_0 + g) \quad (3)$$

O sistema está no equilíbrio se a soma do torque T_1 produzido por F_x e F_y e o torque inercial T_2 é zero. O momento de inércia do pêndulo é dado por:

$$T_2 = -I_0\ddot{\alpha} \quad (4)$$

O Torque T_1 é dado por:

$$T_1 = -F_y l \sin\alpha + F_x l \cos\alpha = m(\ddot{y}_0 + g)l \sin\alpha - m\ddot{x}_0 l \cos\alpha \quad (5)$$

Para $T_1 + T_2 = 0$, nós obtemos

$$I_0\ddot{\alpha} = m(\ddot{y}_0 + g)l \sin\alpha - m\ddot{x}_0 l \cos\alpha \quad (6)$$

ou

$$(I_0 / ml)\ddot{\alpha} + \ddot{x}_0 \cos\alpha - (\ddot{y}_0 + g) \sin\alpha = 0 \quad (7)$$

No nosso caso, $\ddot{x}_0 = 0$ e $I_0 = ml^2$. A aceleração $\ddot{y}_0 = \ddot{h}$. Assim,

$$\ddot{\alpha} - [(g + \ddot{h}) / l] \sin\alpha = 0 \quad (8)$$

Ou seja, a equação (1) do movimento do pêndulo invertido apresentada inicialmente.

Desenvolvendo a equação do pêndulo, obtemos:

$$\ddot{\alpha} = [(g + \ddot{h})/l] \text{sen} \alpha = -(a/l) \text{sen} \alpha$$

(9)

Onde:

$a = -(g + \ddot{h})$: aceleração em função do tempo

Considerando a aplicação da aceleração segundo a figura abaixo:

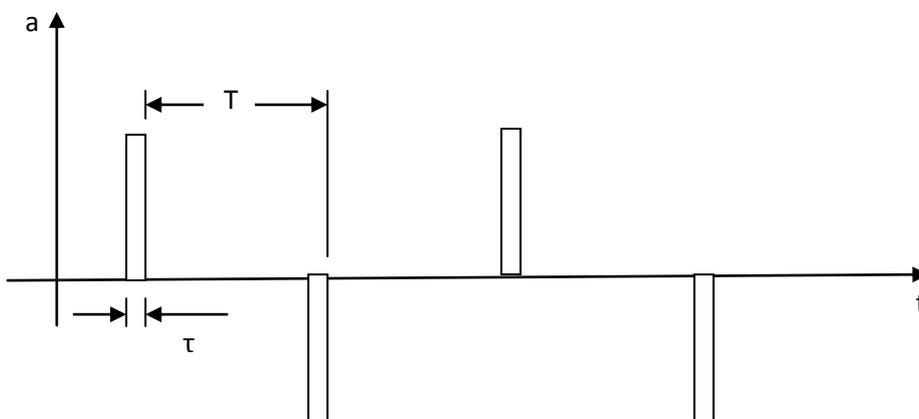


Figura 2 – Aceleração versus tempo

O resultado do deslocamento será dado pela seguinte figura:

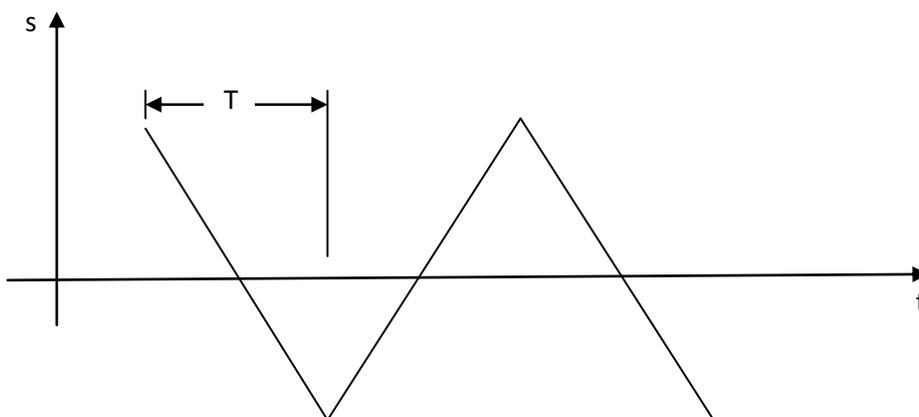


Figura 3 – Deslocamento versus tempo

Aplicando “a” somente para um tempo muito curto τ onde $\text{sen}\alpha$ fica praticamente constante, a integração fica

$$\dot{\alpha} = -\int_0^{\tau} \frac{a}{l} \text{sen}\alpha dt = -a\tau \text{sen}\alpha / l \quad (10)$$

Note que $\dot{\alpha}$ é proporcional a $\text{sen}\alpha$, e a figura 2 mostra um deslocamento triangular considerando pulsos estreitos (tempo τ muito curto), ou seja, muito similar para um suporte dirigido por onda senoidal.

No tempo zero, um impulso é aplicado e uma velocidade angular é produzida conforme a equação (10). Assim,

$$\dot{\alpha}_0 = -a\tau \text{sen}\alpha_0 / l \quad (11)$$

$\dot{\alpha}$ é a inclinação da função α versus tempo. Após o intervalo tempo T, a posição α_1 é alcançada e um pulso na direção oposta é aplicada. A nova velocidade angular é dada por

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_0 + a\tau \text{sen}\alpha_1 / l \quad (12)$$

Devido α_1 é menor que α_0 , $\dot{\alpha}_1$ é menor que $\dot{\alpha}_0$ e ainda negativo. De novo, após um intervalo de tempo T, a posição α_2 é alcançada e pode ser visto que o pêndulo é conduzido passo a passo para uma posição onde $\alpha=0$ (Posição do pêndulo invertido). A figura a seguir ilustra este processo de ajuste do pêndulo até encontrar o equilíbrio na posição invertida:

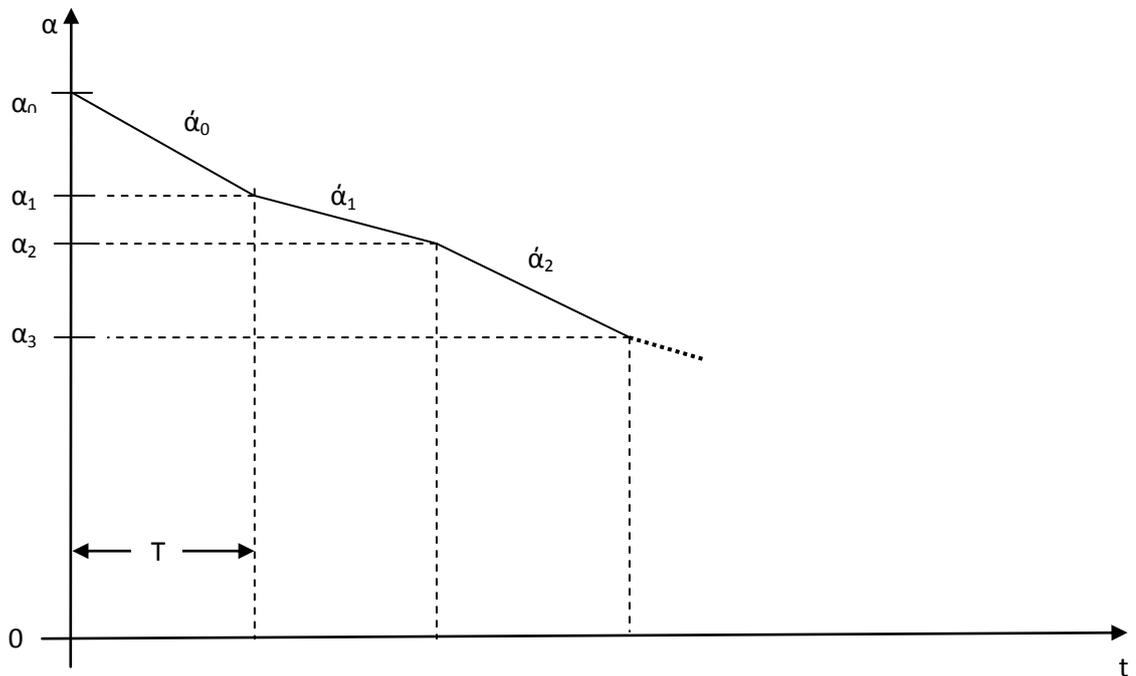


Figura 4 – Método de encontrar o ângulo α após muitos impulsos

A partir da análise anterior, podemos deduzir uma região de instabilidade do pêndulo invertido. Se aumentarmos a aceleração “a” tal que o ângulo α torna-se negativa após o primeiro impulso, o segundo impulso aumentará o ângulo negativo, ou seja, conduzindo para um ângulo α maior, com isso, distanciando da posição do pêndulo invertido, e assim, ocorre à instabilidade do sistema.

3) MONTAGEM EXPERIMENTAL

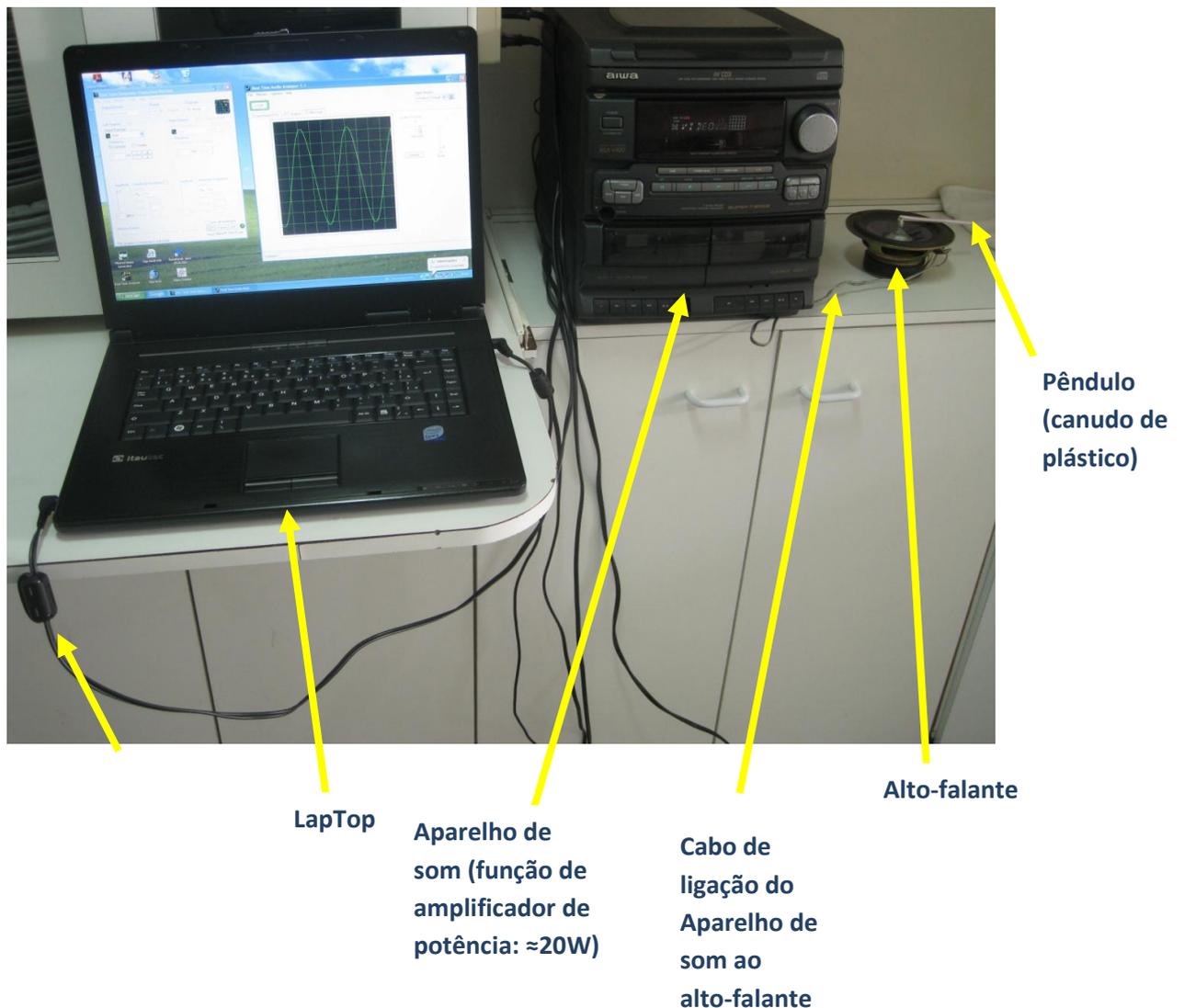
A pesquisa teórica foi feita a partir das referências apresentadas no Projeto, principalmente, o artigo da referência (2).

Para montar o gerador senoidal a partir de um microcomputador, instalamos um software que tinha o gerador de onda (senoidal, quadrada, triangular, etc) e um analisador com a função do osciloscópio. O software para download (opção 1 da lista de materiais) está disponível no site abaixo:

<http://www.audioware.com.br/download-69-multitone-generator.html>

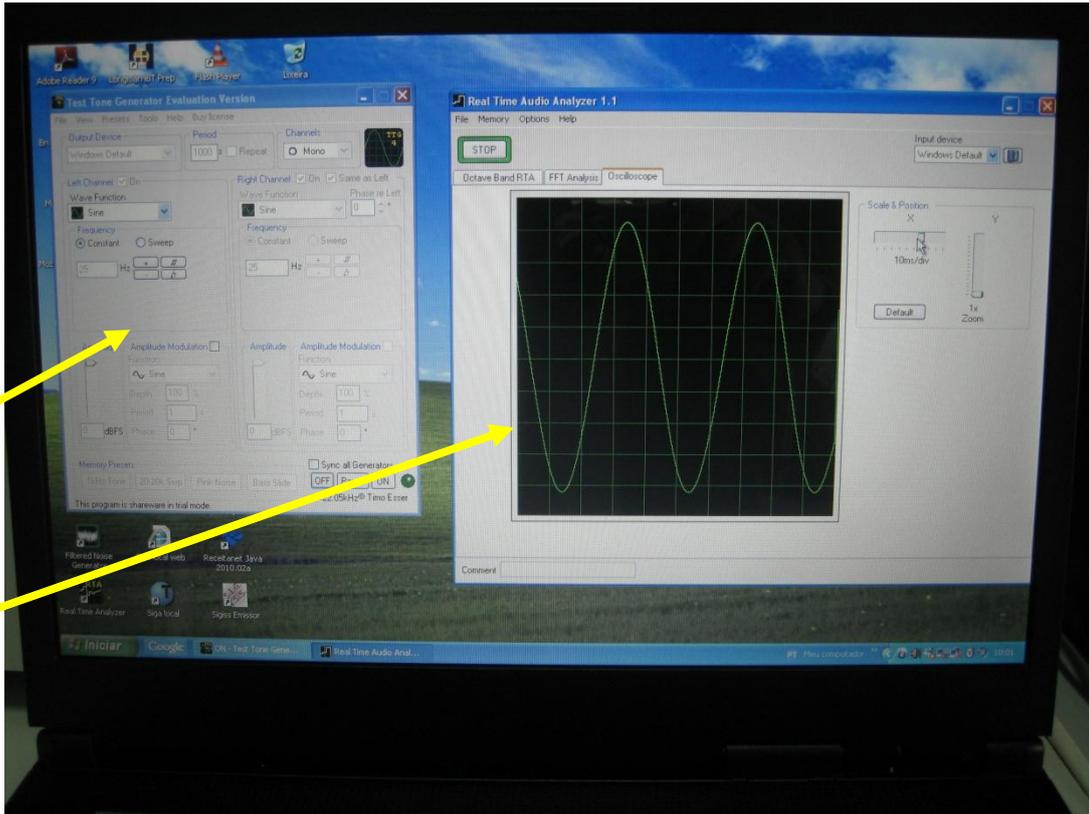
Para a montagem do aparato foi necessário conhecimentos básicos de eletricidade e dos equipamentos envolvidos, para ligar o circuito do LapTop ao aparelho de som para amplificar o sinal do gerador, e em seguida, alimentar o alto-falante.

Segue abaixo, as fotos da montagem do aparato:



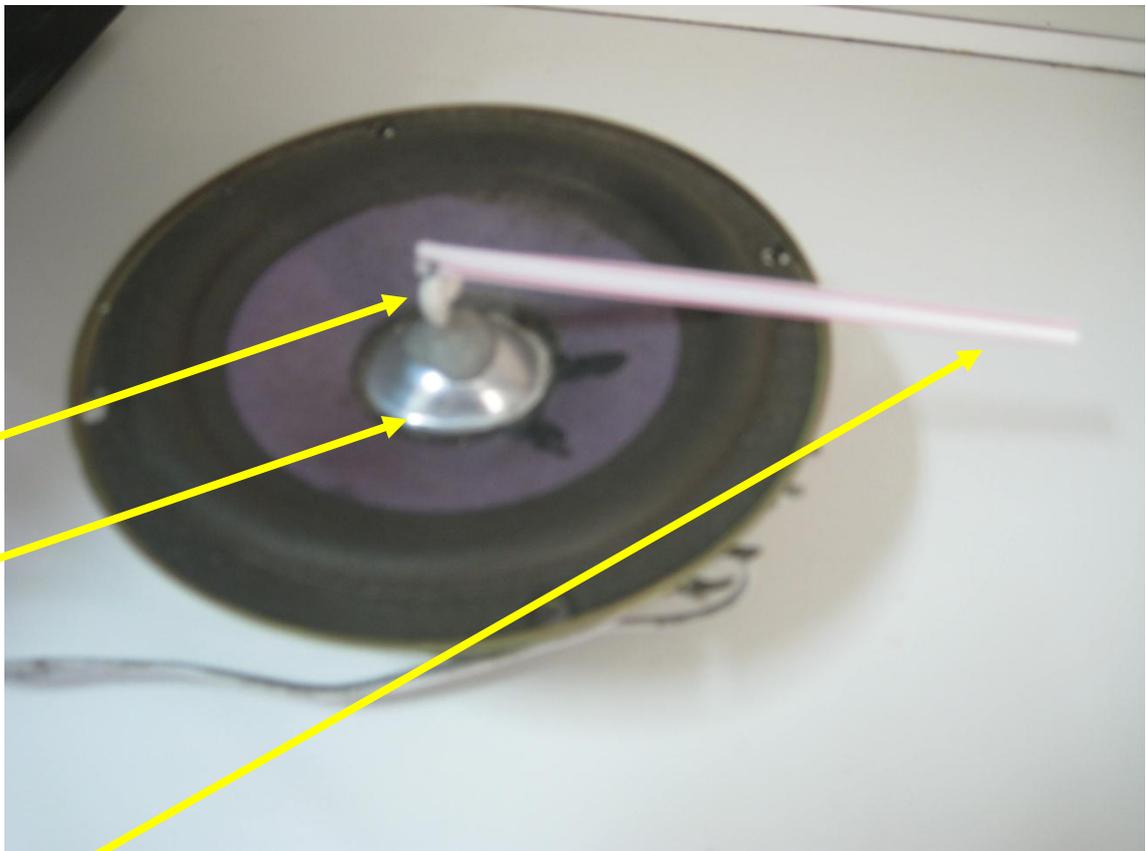
**Software Multi
Oscillator Tone
Generator 1.9:
Gerador de sinal**

**Software Real
Time Audio
Analyzer 1.1:
Osciloscópio**



**Haste feito com
arame e fixado
com durepox:
Suporte do
pêndulo**

**Cone do alto-
falante: Vibra
conforme a
configuração de
freqüência do
Gerador de sinal**



**Pêndulo (canudo de
plástico**

É importante tomar alguns cuidados na montagem:

- Deixar o movimento do pêndulo com o mínimo de atrito possível. Para isso, o furo do canudo na haste de fixação deve ter um diâmetro suficiente para que minimize a resistência;

- Para conseguir trocar os pêndulos rapidamente, é interessante que a haste tenha um pequeno rasgo para retirar e trocar outro canudo. Para fazer isso, é necessário também que o anel de fixação montado com arame seja rígido;

Lista de materiais:

Equipamentos: Alto-falante, Gerador de tensão senoidal (opção 1: Multi oscillator Tone Generator 1.9 da Share it; opção 2: Software Soundcard Generator – Scope 132) , amplificador de potência 20W;

Instrumentos: Osciloscópio (opção 1: software Real Time Analyser 1.1 da Share it; opção2: software Soundcard Oscilloscope - Scope 132) ;

Materiais diversos: Cabos de ligação, arame rígido, canudo, durepox, e miscelâneas;

Apresentação: Banner.

4) RESULTADOS e CONCLUSÕES

O vídeo da experiência pode ser visto no link abaixo:

<http://vigo.ime.unicamp.br/PenduloInvertido.avi>

Os ajustes do comprimento de pêndulo, da frequência e amplitude do gerador para obter as condições de estabilidade do sistema exigiram paciência e observação.

Conforme podemos observar no vídeo, o equilíbrio na posição do pêndulo invertido foi visto na prática. No dia do painel, através do apoio de um banner, explicaremos os principais conceitos envolvidos como a equação do movimento e as condições de estabilidade do pêndulo invertido.

O resultado curioso do pêndulo invertido deve despertar interesse para quem olha como esse fenômeno ocorre e questionar o comportamento físico do movimento. Por isso, o primeiro aspecto interessante é o professor explorar a experiência como instrumento de motivação para o ensino. Além disso, através de algumas simplificações e aproximações no desenvolvimento dos cálculos, é possível explicar para alunos do ensino médio a mecânica que está por trás do pêndulo invertido, desde a equação do movimento até as condições de estabilidade. Com isso, pode desenvolver ementas envolvendo sistemas em equilíbrio, força, torque, velocidade, aceleração, posição, e análise qualitativa de gráficos.

5) Comentários do orientador

Na entrega do Relatório parcial:

“O trabalho está sendo realizado de maneira plenamente satisfatória. Os resultados já obtidos garantem o sucesso do projeto. O estudante demonstra interesse e competência, está de parabéns!”

Na entrega do Relatório final:

“O trabalho foi realizado de maneira plenamente satisfatória. O estudante demonstrou interesse e competência, está de parabéns!”

6) HORÁRIO E DIA DA APRESENTAÇÃO DO PAINEL

Dia 17/06/2010 (quinta-feira): Das 17 às 19 horas.

7) REFERÊNCIAS

- (1) Claiton Pimentel de Oliveira e Kyoko Furuya, Pêndulo Invertido, Unicamp, 21/06/2006;
- (2) Henry P. Kalmus, The Inverted Pendulum, Harry Diamond Laboratories, Washington , D.C. 20438/ American Journal of Physics – volume 38, number 7 – July 1970
- (3) Marcio José H. Dantas e Paulo Hernandes Soares, Estabilidade do pêndulo não-linear invertido sob excitação paramétrica, FAMAT (Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia) em revista, Número 04, Abril/2005
http://rmf.fciencias.unam.mx/pdf/rmf-e/55/2/55_2_161.pdf
- (4) C. Aguilar Ibañes, O. Octavio Gutierrez F., H. Sossa A., Controlled Langrangian approach to the stabilization of the inverted pendulum system, Revista Mexicana de Fisica 54 (4) 329-335, Agosto/2008;
<http://www.ejournal.unam.mx/rmf/no544/RMF005400411.pdf>
- (5)
<http://www.physics.umd.edu/lecdem/services/demos/demosg1/g1-57.htm>