F809 – Instrumentação para o Ensino de Física.

Pêndulos de Newton.

Relatório Final do Experimento.

Carla Ferrari Orsi – 962020

Campinas 20 de novembro de 2002.

Este experimento destina-se ao auxílio no ensino de mecânica clássica para os primeiros dois anos do ensino médio. Com este, pode-se ilustrar os conceitos de momento linear e energia mecânica, as leis de conservação de momento e energia e os fenômenos relacionados com o choque de dois corpos.

INTRODUÇÃO

Os pêndulos de Newton recebem este nome pois foram inicialmente propostos por Sir Isaac Newton para a ilustração de diversos princípios da mecânica clássica. Neste experimento, procuramos fazer uma montagem dos pêndulos de Newton e mostrar como ele pode ser utilizado no ensino de Física.

Na escolha do tema do projeto, apontada pelo professor Doutor David Mendez Soares, do IFGW, procurou-se um experimento que fosse realmente representativo para o ensino e que ao mesmo tempo pudesse ser facilmente entendido e montado por qualquer professor do ensino médio, sem muitos recursos.

A figura seguinte é a ilustração da montagem do experimento. Essa imagem foi gerada por computador, com o auxílio do programa Pov-Ray.

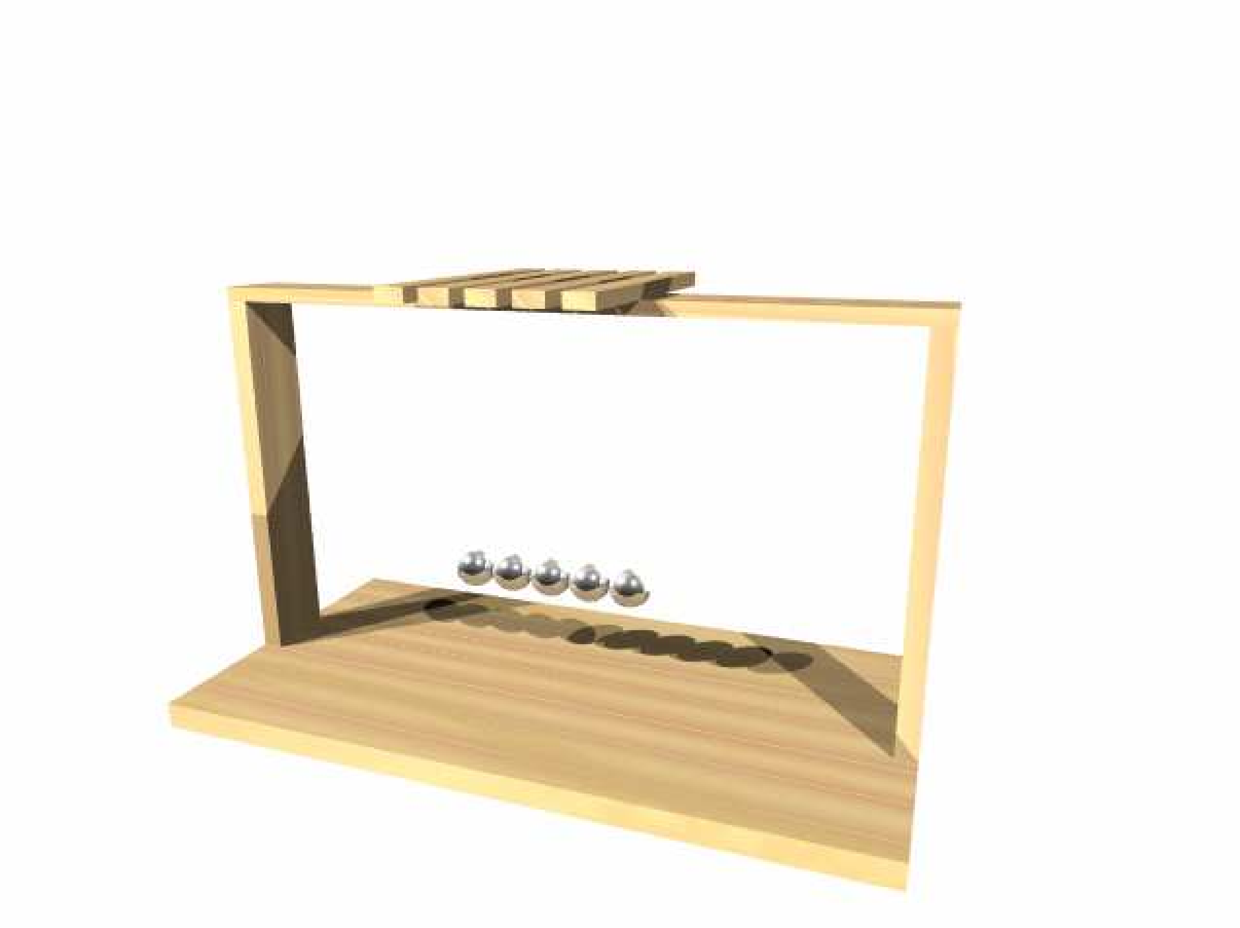


Figura 1

Utilizando esferas metálicas de alto coeficiente de restituição *e*, pode-se com o princípio da conservação do momento, explicar diversos fenômenos que ocorrem no choque entre as esferas. Uma descrição detalhada da teoria envolvida no experimento segue-se.

ASPECTOS TEÓRICOS

I) Quantidade de Movimento, Energia Mecânica e Choques nos Pêndulos de Newton – Nível Básico.

Uma pergunta natural que surge quando vemos os Pêndulos de Newton em movimento é "por que somente uma esfera sobe do outro lado, quando soltamos uma?".

A resposta para esta questão está ligada aos conceitos de Quantidade de Movimento – **Q** (ou Momento Linear, **p**), energia mecânica, choques elásticos e princípios de conservação. Todos estes assuntos são cobertos no ensino médio.

A quantidade de movimento de um corpo **Q** é definida como sendo **Q** = m **v**, ou seja a massa do corpo vezes sua velocidade. Como a velocidade é uma grandeza vetorial, a quantidade de movimento também é.

A quantidade de movimento total em um sistema, no caso nossas esferas, é a soma vetorial da quantidade de movimento de cada esferas: $\mathbf{Q_T} = \mathbf{Q_{esfera\ 1}} + \mathbf{Q_{esfera\ 2}} + \ldots + \mathbf{Q_{esfera\ 5}}$. Esta quantidade $\mathbf{Q_T}$ somente muda quando alguma força externa age, por exemplo alguém atua nas esferas.

A energia mecânica de um corpo é soma de sua energia potencial com sua energia cinética. No caso desse experimento, a única energia potencial existente, é a energia potencial gravitacional, que é $E_P = m\ g\ h$, onde g é a constante gravitacional, h é altura relativa e m a massa das esferas. Energia cinética por sua vez E_c, depende da velocidade do corpo e é definida como sendo $E_c = ½\ m\ v^2$.

A energia mecânica total do sistema representado pelas esferas é, portanto, a soma da energia cinética e potencial de cada esfera e podemos chamá-la de E_T.

Um fato importante sobre a energia mecânica total é que ela não varia se não houver forças de atrito e forças externas.

Desta forma podemos dizer que $\mathbf{Q_T}$ e E_T antes e depois dos choques das esferas são constantes, desprezando forças de atrito, como a do ar. Podemos ainda fazer algumas simplificações na nossa análise do modelo. Se considerarmos somente como sistema, as esferas logo antes do impacto, toda a energia mecânica do sistema será devido à energia cinética das esferas. Além do mais, as esferas vão se deslocar todas em uma só dimensão, ou seja em uma linha reta. Por isso podemos considerar que $\mathbf{Q_T}$**,** só tem componente em x, por exemplo. Desta forma, antes e depois do impacto temos:

$$Q_{Tx\ Antes} = Q_{Tx\ Depois.}$$

$$E_{T\ Antes} = E_{T\ Depois.}$$

Podemos agora analisar os casos que podem acontecer no experimento. As bolinhas são numeradas de 1 a 5, ficando as bolinhas 2, 3 e 4 no meio, veja a Figura 1. Vamos ver o que teoricamente acontece quando soltamos duas esferas de um lado. Quantas esferas sobem do outro? Utilizaremos índices numéricos de 1 a 5 para nos referirmos às respectivas massas e velocidades das bolinhas. Desse modo, *m* será a massa de cada bolinha, v_3 será a velocidade da bolinha três, e assim por diante. Observando que somente as esferas 1 e 2 tem alguma velocidade, pela conservação da quantidade de movimento temos:

$$(m\ v_1 + m\ v_2 + m\ 0 + m\ 0 + m\ 0)_{Antes} = (m\ v_1 + m\ v_2 + m\ v_3 + m\ v_4 + m\ v_5)_{Depois}$$

dividindo por *m* (a massa de cada esfera) temos:

$$(v_1 + v_2)_{Antes} = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)_{Depois}$$

ou seja, depois do choque a soma das velocidades das 5 esferas tem que ser igual a soma das velocidades das duas esferas antes do choque. Para descobrir as velocidades depois do choque, temos que utilizar a conservação de energia. Como somente temos energia cinética:

$$(\tfrac{1}{2}m\, v_1^{2} + \tfrac{1}{2}m\, v_2^{2} + \tfrac{1}{2}m\, 0 + \tfrac{1}{2}m\, 0 + \tfrac{1}{2}m\, 0)_{\text{Antes}} =$$
$$(\tfrac{1}{2}m\, v_1^{2} + \tfrac{1}{2}m\, v_2^{2} + \tfrac{1}{2}m\, v_3^{2} + \tfrac{1}{2}m\, v_4^{2} + \tfrac{1}{2}m\, v_5^{2})_{\text{Depois}}$$

dividindo a equação acima por ½ m, temos:

$$(v_1^{2} + v_2^{2})_{\text{Antes}} = (v_1^{2} + v_2^{2} + v_3^{2} + v_4^{2} + v_5^{2})_{\text{Depois}}$$
$$(v_1 + v_2)_{\text{Antes}} = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)_{\text{Depois}}$$

Agora se $v_1 = v_2$ (soltamos as duas esferas da mesma altura) temos:

$$(2\, v_1^{2})_{\text{Antes}} = (v_1^{2} + v_2^{2} + v_3^{2} + v_4^{2} + v_5^{2})_{\text{Depois}}$$
$$(2\, v_1)_{\text{Antes}} = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)_{\text{Depois}}$$

A solução deste sistema é que a velocidade de duas das esferas depois do impacto sejam iguais a velocidade de v_1 e v_2 antes do impacto. Somente as esferas das extremidades podem subir, pois, se uma esfera está entre duas outras paradas, não tem como ela deslocar-se. Ela somente poderia o fazer se aquelas das extremidade se deslocassem também. Assim, podemos ver que $(v_1, v_2 \text{ e } v_3)_{\text{Depois}}$ são todos iguais a zero.

Pode-se facilmente verificar que com $(v_4 = v_5)_{\text{depois}} = (v_1 = v_2)_{\text{antes}}$ as equações de conservação de energia e momento são satisfeitas.

Então vemos que o movimento das esferas é previsível utilizando os conceitos de conservação. Podemos fazer a mesma análise para qualquer número de esferas.

II) Teoremas do Momento Linear e da Energia – Nível Avançado

A segunda lei de Newton tem a forma da equação vetorial diferencial;

$$md^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F} \qquad (1)$$

Que em três coordenadas cartesianas são;

$$md^2x/dt^2 = F_x, \qquad md^2y/dt^2 = F_y \text{ e } \qquad md^2z/dt^2 = F_z, \qquad (2)$$

O vetor momento linear p de uma partícula é definido como;

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (3)$$

As equações (1) e (2) podem ser rescritas como;

$$d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}, \qquad (4)$$

ou em forma de componentes,

$$dp_x/dt = F_x, \qquad dp_y/dt = F_y, \qquad dp_z/dt = F_z, \qquad (5)$$

Passando da forma diferencial para a integral, com limites de t_1 a t_2, obtém-se a variação do momento linear entre t_1 e t_2;

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t1}^{t2} \mathbf{F}\, dt. \qquad (6)$$

Definida a energia cinética em mecânica clássica como

$$T = ½\, mv^2, \qquad (7)$$

pode-se relacionar o momento com a variação da energia cinética. Para tanto, procede-se multiplicando as equações (5) por v_x, v_y, e v_z respectivamente, produzindo;

$$d(½\ mv_x^2)/dt = F_xv_x,\quad d(½\ mv_y^2)/dt = F_yv_y,\ d(½\ mv_z^2)/dt = F_zv_z \qquad (8)$$

Somando-se estas equações,

$$d[½m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]/dt = F_xv_x + F_yv_y + F_zv_z \qquad (9)$$

ou na forma vetorial,

$$d(½\ m\mathbf{v}^2)/dt = dT/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (10)$$

Multiplicando-se a equação (10) por *dt* e integrando, obtém-se a forma integra do teorema da energia:

$$T_2 – T_1 = ½\ mv_2^2 – ½\ mv_1^2 = \int_{t1}^{t2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\ dt. \qquad (11)$$

III) Conservação do Momento Linear – Nível Avançado

Seja um sistema composto de N partículas pontuais, [1..N], cujas massas são m_k, com k entre 1 e N. A força total exercida sobre a k-ésima partícula é a soma das forças internas das N-1 outras partículas e da força externa sobre a k-ésima. Desta forma a equação do movimento para esta fica;

$$m_k\mathbf{r}_k'' = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i, \qquad (12)$$

onde F_k^i denota a somatória das forças internas agindo sobre k e F_k^e as somatória das forças externas agindo sobre k.

Se $\mathbf{p}_k = m_k\mathbf{v}_k$ for o momento linear da k-ésima partícula, pode-se escrever (12) como;

$$d\mathbf{p}_k/dt = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i. \qquad (13)$$

Somando a equação (13) em relação a todos os N corpos, obtém-se

$$\sum d\mathbf{p}_k/dt = d(\sum \mathbf{p}_k)/dt = \sum\mathbf{F}_k^e + \sum\mathbf{F}_k^i. \qquad (14)$$

Definido **P** e **F** respectivamente o momento e a força externa totais, temos:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_k = \sum m\mathbf{v}_k \qquad (15)$$

$$\mathbf{F} = \sum\mathbf{F}_k^e \qquad (16)$$

Levando em conta que a somatória das forças internas sobre todo o sistema é nula (resultado elementar proveniente da 3ª Lei de Newton), temos de (14), (15) e (16):

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F} \qquad (17).$$

Ou seja, a variação do momento linear é proporcional a força externa aplicada ao sistema em questão. Um *corolário* imediato é o **Teorema da Conservação do Momento Linear**: o momento linear total **P** é constante na ausência de forças externas agindo sobre o sistema.

IV) Conservação da Energia – Nível Avançado

Em muitos casos, a força agindo sobre as partículas em um sistema pode depender somente de suas posições;

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \qquad (18)$$

Neste caso é possível que exista uma função potencial com a forma **V**($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ... , $\mathbf{r}_N$) e assim;

$$F_{kx} = dV/dx_k, \qquad F_{ky} = dV/dy_k, \qquad F_{kz} = dV/dz_k, \qquad (19)$$

No caso de existir um potencial V, podemos demonstrar o Teorema da Conservação de Energia da seguinte maneira: as equações do movimento para a k-ésima partícula utilizando (19) são:

$$m_k dv_{kx}/dt = - dV/dx_k, \qquad m_k dv_{ky}/dt = - dV/dy_k$$
$$m_k dv_{kz}/dt = - dV/dz_k \qquad (20)$$

Multiplicando (20) por cada uma das componentes de velocidade, respectivamente, e somando as parcelas temos:

$$d(½\, m_k v_k^2)/dt + dV/dx_k\, dx_k/dt + dV/dy_k\, dy_k/dt + dV/dz_k\, dz_k/dt = 0 \qquad (21)$$

Somando a equação (21) para todos os k, obtemos:

$$d(\sum ½\, m_k v_k^2)/dt + \sum(dV/dx_k\, dx_k/dt + dV/dy_k\, dy_k/dt + dV/dz_k\, dz_k/dt) = 0 \qquad (22)$$

O segundo termo da equação (22) é dV/dt e o primeiro termo é a derivada no tempo da energia cinética total. Podemos então escrever:

$$d(T + V)/dt = 0. \qquad (23)$$

Assim o Teorema da Conservação de Energia pode ser escrito:

$$T + V = E. \qquad (24)$$

V) Análise do Experimento – Nível Avançado

Neste experimento, uma ou mais esferas são deslocadas de sua posição de repouso e soltas. Devido á força gravitacional as esferas em questão aceleram de maneira a chocar-se com as outras esferas em repouso. No lado contrário ao choque, algumas esferas iniciarão movimento e subirão a uma certa altura por conta do movimento pendular.

Devido à existência de forças não conservativas, principalmente o atrito das esferas com o ar, a energia mecânica do sistema (compreendido pelas esferas somente) tende a diminuir com o passar do tempo. Além disso, choques não completamente elásticos entre as esferas fazem diminuir a energia mecânica total.

Para permitir a ilustração dos princípios de conservação, no entanto, pode-se escolher esferas massivas o suficiente para que a perda de energia por atrito com o ar seja desprezível em um intervalo pequeno de tempo. Além disso, a escolha de esferas de alta dureza e de excelente coeficiente de restituição no impacto serve para tornar as forças conservativas majorantes.

Temos agora as condições em que as equações (17) e (24) foram enunciadas.

DECISÕES DE PROJETO

Diversas decisões quanto ao projeto foram feitas durante sua construção. De início quanto aos materiais.

I) Materiais Utilizados

Esferas: As esferas para a construção do experimento devem ter massa suficiente para que o atrito com o ar seja desprezível na análise do experimento. Além disso, elas devem ter tal coeficiente de restituição que permitam um choque o mais elástico possível.

Assim, as esferas do experimento tem 30mm de diâmetro e são feitas de aço-cromo 3. Sua massa aproximada é de 111g.

Devido a sua dureza, a perfuração das esferas é um tanto complicada, por isso um esquema de passadores foi utilizado para prender-se as esferas com fios.

O custo de cada esfera de metal é elevado, cerca de R$ 25,00, por isso esferas de materiais distintos podem ser utilizados, como epóxi, vidro ou porcelana. Esferas como bolas de gude de maior tamanho também podem ser utilizadas.

Base da Montagem: A Base da montagem foi construída utilizando uma estrutura de madeira e MDF (uma espécie de compensado, massivo e barato). Com cinco esferas na montagem, as estruturas que as seguram devem ser resistentes o suficiente para agüentar ao menos 555g das esferas em movimento.

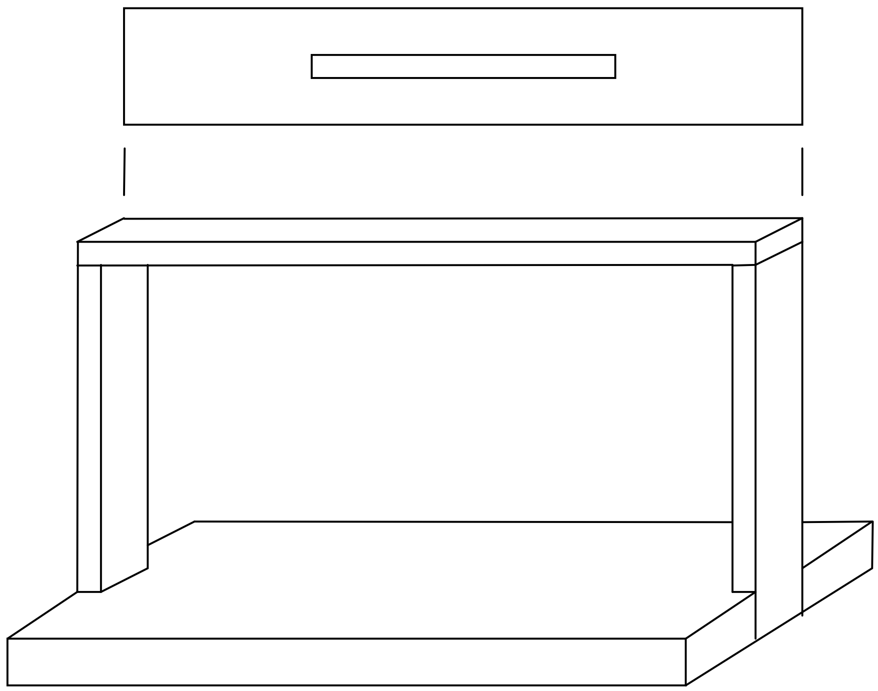
Além disso, para melhor representar a conservação do momento do sistema, a base será massiva o suficiente e com parte inferior aderente, para que a mesma não se desloque durante a experimentação.

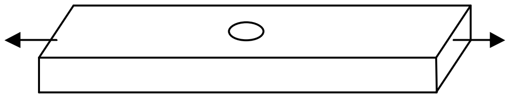
Resumo dos materiais: Os materiais utilizados no experimento estão listados abaixo:

- 5 esferas de 30mm de diâmetro de aço-cromo 3. Custo total: R$150,00
- 2,5 metros de fio de nylon para pesca de 0.30mm de diâmetro.
- Base de 50 x 25 x 2,5 cm de MDF e Pinus.
- 5 botões de costura de Nylon de relativa, para fixação das esferas.
- Cola de Madeira, pregos, parafusos diversos e Super Bonder.

II) Procedimento para a Construção da Montagem

O projeto abaixo especifica como a montagem deve ser realizada. A base da montagem vista na figura, tem medidas 50 x 25 x 1.8 cms e é feita de MDF. As hastes laterais de madeira tem medidas de 29 x 5 x 1.5 cms e são feitas de madeira e fixadas por meio de cola e pregos na base.





Unindo as duas hastes, existe uma trave de medidas 50 x 5 x 1 cm, com uma abertura centralizada, de medidas 25 x 0.5 cms, feita de madeira. Esta trave está fixada nas hastes por meio de pregos e cola.

Além disso, 5 pequenas travessas de medidas 20 x 2 x 1, com um furo central de medida 5 mm, foram feitas. Essas travessas são presas à trave da montagem por meio de 5 parafusos sextavados de diâmetro 5mm e comprimento 3cm, com porcas em forma de borboleta.

Este esquema permite que a posição das hastes seja móvel e adaptável. Nas extremidades das travessas, é fixado 1 parafuso, preferencialmente do tipo gancho, pois ali prende-se o fio de Nylon que sustenta as esferas.

Ao colar nas esferas os botões de nylon com Super Bonder, toma-se o cuidado de limpá-las corretamente, afim de tirar qualquer resíduo de sua superfícies.

Alguns cuidados devem ser tomados na fixação das esferas e tem a ver com o alinhamento delas. Tanto o alinhamento vertical como o horizontal devem ser muito bem ajustados. Um alinhamento pobre permite perda de energia do sistema por meio dos fios.

UTILIZAÇÃO DA MONTAGEM

Diversos princípios podem ser ilustrados com a utilização desta montagem, tal qual descrito na introdução deste relatório.

Em classe, pode-se através das seguintes experimentações ilustrar os princípios de conservação envolvidos:

1. Elevar uma esfera da montagem e verificar que após o choque todas permanecem em repouso a não ser uma que eleva-se no lado oposto, até altura semelhante da esfera solta.
2. Elevar duas esferas de um lado e verificar que após o choque, duas esferas no lado oposto entram em movimento, e não uma com o dobro da velocidade, como poderia se imaginar erroneamente.
3. Elevar uma esfera de cada lado e soltando-as simultaneamente, verificar que elas "ricocheteiam" no choque enquanto 3 esferas continuam paradas, e procurar a explicação para este fato.
4. Prever matematicamente e depois verificar o que acontece soltando um número variado de esferas da montagem,.
5. Prendendo-se duas esferas juntas firmemente, verificar em cada um dos casos de choque, os efeitos e justificar teoricamente os dados obtidos em termos das equações (17) e (24).
6. Utilizando-se de amortecedores entre as esferas pode-se mostrar a conservação do momento sem a conservação total da energia, que é perdida em parte no amortecedor.

FECHAMENTO E BIBLIOGRAFIA

Neste relatório apresentamos a montagem dos pêndulos de Newton, que pode ser utilizada para a ilustração dos conceitos de energia mecânica e momento linear, princípios de conservação de energia e do momento e finalmente o fenômeno de choque entre corpos.

Em primeiro lugar foi apresentada uma discussão teórica pormenorizada do problema e a seguir como teoria se aplica à montagem em questão.

Em seguida, apresentamos os materiais utilizados na montagem a razão pela escolha dos mesmos, dando alternativas aos materiais mais caros. Além foram discutidos os cuidados e a maneira de proceder a montagem.

Finalmente listamos algumas experimentações simples que podem ser feitas em sala de aula, junto com alunos do ensino médio e as questões teóricas que podem ser levantadas.

1. *Symon, Keith R.* Mecânica, Rio de Janeiro, Campus 1996.
2. *Halliday, David*, Fundamentals of physics / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker. 5th ed. - New York : J. Wiley, 1997