

# **Relatório final de instrumentação para Ensino -F809**

Projeto : Determinação da constante  
de Boltzmann e da temperatura de  
zero absoluto

Aluno : Marcelo Falsarella Carazzolle

RA : 981651

## INTRODUÇÃO

Em um sistema isolado no qual a energia, número de partículas e outros vínculos são mantidos constantes existem um grande número de estados acessíveis. Para um sistema de  $g$  estados acessíveis a entropia é dada por :

$$s = k \ln g \quad (1)$$

Onde  $k$  é a constante de Boltzmann e vale  $1.38066 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ .

Através da equação de Schrodinger podemos calcular o número de estados acessíveis de partículas não interagentes numa caixa, no qual temos :

$$g = \exp[10^{25}] \text{ para uma temperatura de } 273 \text{ K e uma pressão de } 760 \text{ mmHg.}$$

Suponha um sistema no qual sua energia total  $U$  sofre um aumento de  $\Delta U$  mantendo o volume e o número partículas constantes. Com o aumento da energia temos um aumento no número de estados acessíveis e consequentemente na entropia. A temperatura fundamental do sistema é definida como :

$$\frac{1}{kT} = \left( \frac{ds}{dU} \right)_{N,V} \quad (2)$$

Para estabelecermos uma relação entre os mundos micro e macro gostaríamos de escrever  $k$  como função das constantes do mundo micro (constante de planck, massa do elétron, carga elétrica, ...), mas fazer isso pela equação de Schrodinger é muito complicado. Uma forma alternativa de estabelecer esta relação foi descoberto por Johnson e H. Nyquist em 1928 (1,2). Johnson demonstrou experimentalmente que o valor médio da voltagem que surge num condutor, devido as flutuações térmicas da densidade de carga dos elétrons que compõem a banda de valência, é proporcional a resistência e a temperatura absoluta do condutor não dependendo de nenhuma propriedade física ou química. Devido ao valor desta voltagem ser muito pequeno também é conhecida como ruído.

Nyquist criou uma teoria para explicar este fenômeno encontrando assim resultados comparáveis com o experimento de Johnson. Na equação do valor médio da voltagem, deduzida por Nyquist aparece a constante de Boltzmann e portanto seu valor pode ser obtido através de medidas eletrônicas precisas do valor médio da voltagem no condutor.

Com o intuito de medirmos ruído construímos e calibramos dois circuitos eletrônicos que tem a função de amplificar o sinal e filtrá-lo numa região de frequências de 4KHz até 15KHz.

Utilizando várias resistências com valores entre  $2\text{K}\Omega$  e  $2\text{M}\Omega$  como fonte de ruído medimos a voltagem RMS à temperatura ambiente.

Outro resultado interessante que pode ser obtido é uma previsão do valor da temperatura necessária para não temos mais nenhum ruído, isto é o zero absoluto. Para isso utilizamos nitrogênio líquido para baixar a temperatura de uma dessas resistências

( $2M\Omega$ ) e com um termopar colocado próximo da resistência medimos a voltagem RMS em função da temperatura.

### TEORIA DE RUÍDO DE JOHNSON E NYQUIST

Considere um condutor de resistência  $R$  com uma densidade de carga  $N$  tendo um tempo de relaxação  $\tau c$ . O condutor tem largura  $l$  e seção reta de área  $A$ . A voltagem gerada no condutor devido as flutuações de carga será :

$$V = IR = RANe\langle u \rangle \quad (1)$$

Onde  $e$  é a carga elétrica e  $\langle u \rangle$  é a velocidade média de deslocamento de cargas ao longo do condutor. Portanto o número total de elétrons será :

$$\begin{aligned} \sum_i u_i &= NAl \langle u \rangle \\ V &= \sum_i V_i = \frac{R}{l} \sum_i u_i \end{aligned} \quad (2)$$

A densidade espectral pode ser definida como :

$$\langle V_i^2 \rangle = J(\nu) \Delta \nu$$

A função de correlação pode ser definida como :

$$C(\tau) = \langle V_i(t) V_i(t+\tau) \rangle = \langle V_i^2(t) \rangle \exp[-\tau/\tau c] \quad (3)$$

Pelo teorema de Wiener-Khintchine a densidade espectral pode ser escrita como :

$$J(\nu) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi \nu \tau) d\tau \quad (4)$$

Substituindo (3) e (2) em (4) temos :

$$\begin{aligned} J(\nu) &= 4 \left( \frac{Re}{l} \right)^2 \langle u^2 \rangle \int_0^{\infty} \exp(-\tau/\tau c) \cos(2\pi \nu \tau) d\tau \\ &= 4 \left( \frac{Re}{l} \right)^2 \left( \frac{kT}{m} \right) \tau c \end{aligned}$$

Onde  $\langle u^2 \rangle = kT/m$  pelo teorema da equipartição.

O voltagem RMS num range de frequência  $\Delta \nu$  será :

$$\langle V^2 \rangle = Nal \langle V_i^2 \rangle = NalJ(\nu) \Delta \nu = 4(Ne^2 \tau c/m)(A/l)R^2 kT \Delta \nu$$



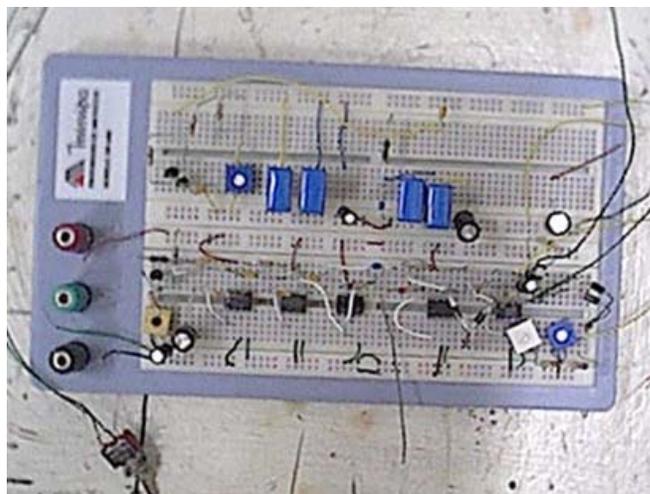


Figura 03 – Circuito do pré-amplificador (metade superior do protoboard) e circuito do filtro passa banda e amplificador (metade inferior do protoboard).

Os FETS utilizados foram MPF102, utilizamos algumas resistência de precisão e a alimentação de 30V contínuo foi feita com 3 baterias de 9V ligadas em série. E a alimentação dos AMP-OP 741 foi feita utilizando uma fonte de 15V e -15V do laboratório. Com o circuito testado e funcionando partimos para a montagem do circuito impresso.

O desenho dos circuitos foram realizados utilizando o software PCB Developer's Individual Assistant e estão demonstrado nas figuras abaixo :

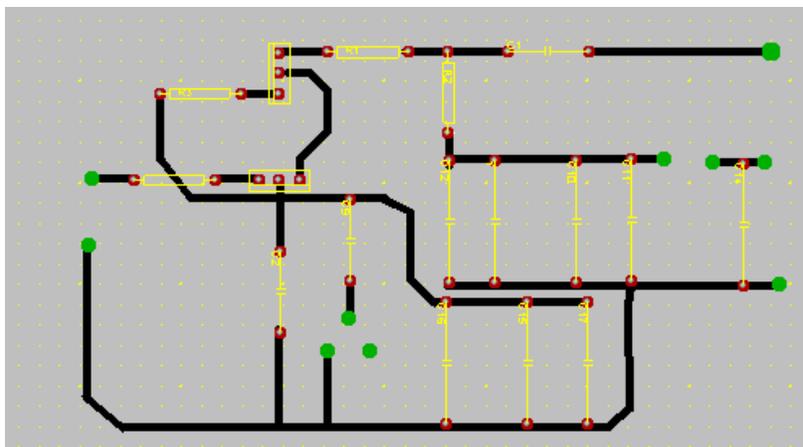


Figura 04 – Desenho da placa do circuito do pré-amplificador.

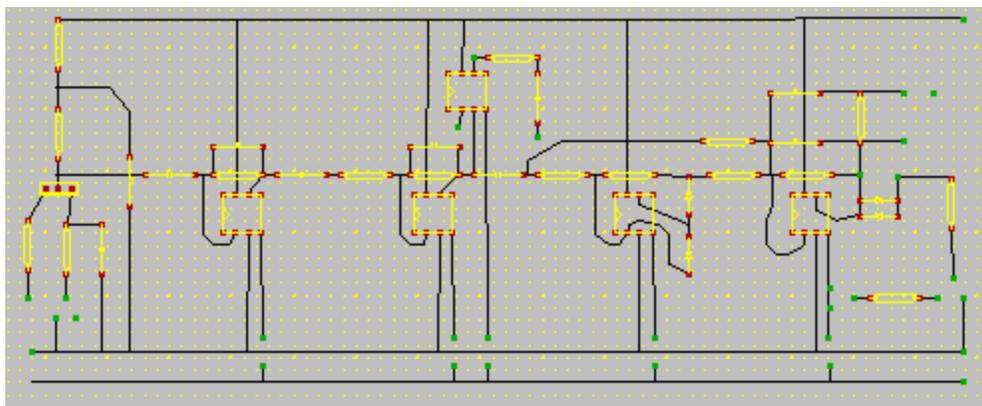


Figura 05 – Desenho da placa do circuito do passa banda e amplificador.

O desenho das placas foram levados no laboratório de eletrônica para serem impressos na placa de cobre. Corroemos a placa com percloroeto de ferro, passamos breo nelas para que a solda tenha melhor aderência e finalmente soldamos os componentes eletrônicos nas placas.

Construímos com ajuda do técnico de mecânica do grupo uma caixa de alumínio para isolarmos o circuito pré-amplificador. Compramos um transformador de casamento de impedância de  $2.5\text{ K}\Omega : 10\text{K}\Omega$  para ligarmos os dois circuitos. O resultado final da montagem está demonstrado na figura abaixo :

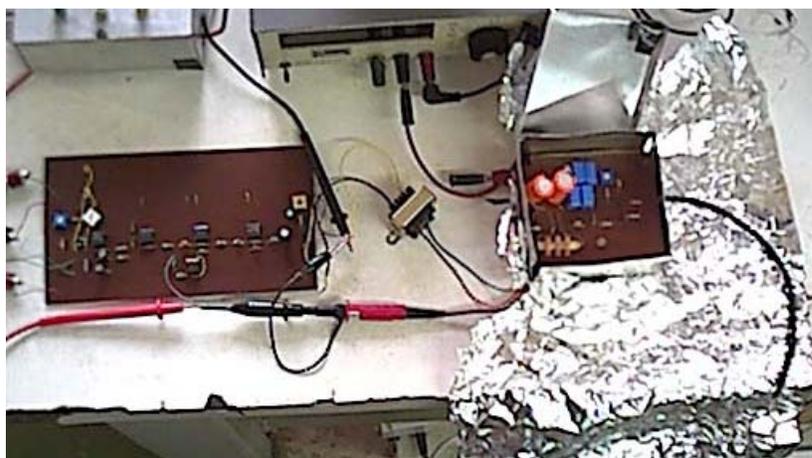


Figura 06 – Circuito do filtro passa banda e amplificador (à esquerda), circuito do pré – amplificador (à direita). No centro temos o transformador que interliga os circuitos.

## MONTAGEM EXPERIMENTAL

Na figura 07 temos um diagrama do aparato experimental para a medida do ruído de Johnson :

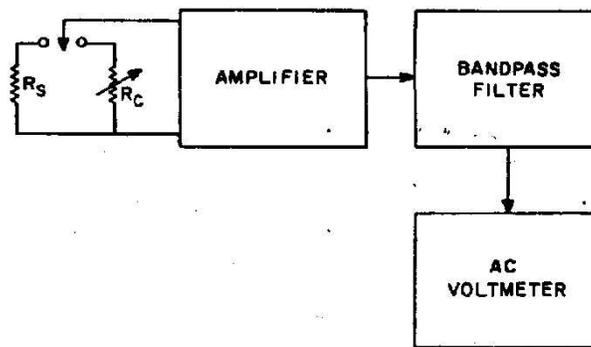


Figura 07 – Esquema do aparato experimental para medida do ruído de Johnson

O ruído de Johnson gerado na resistência é ligado ao pré-amplificador através de um cabo coaxial. O sinal, voltagem RMS, foi medido pelo multímetro e acompanhado pelo osciloscópio. Para a medida do ruído em função da temperatura utilizamos nitrogênio líquido para baixar a temperatura e um termopar.

O sistema se mostrou muito sensível a ruídos internos, a movimentação de pessoas na sala era suficiente para mudar a amplitude do sinal. Para tentarmos minimizar estes efeitos embrulhamos tudo em papel alumínio e com isso melhoramos alguns problemas de interferência.

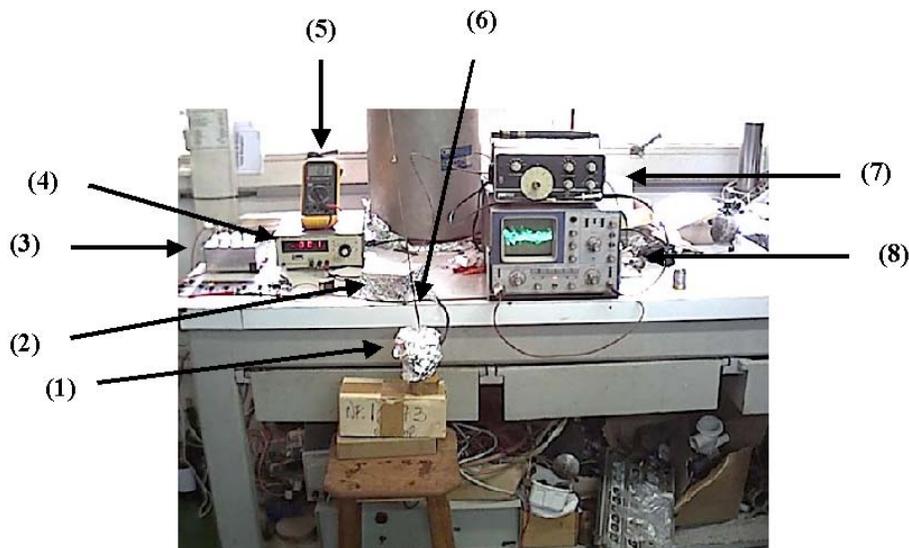


Figura 08 – Aparato experimental no qual temos : (1) - reservatório térmico utilizado para manter a resistência em contato com o nitrogênio líquido. (2) – circuito pré-amplificador enrolado no papel alumínio. (3) – fonte de corrente contínua, +15V e -15V, para alimentação do circuito. (4) – voltímetro ligado ao termopar. (5) – multímetro utilizado para ler a voltagem RMS. (7) – gerador de onda utilizado para a calibração. (8) – osciloscópio lendo o sinal do ruído de Johnson

## RESULTADOS

Primeiramente foi realizado uma calibração do circuito, ganho em função da frequência. Para isso utilizamos um gerador de onda senoidal com um voltagem de 10mV pico a pico e um osciloscópio. Abaixo temos o resultado obtido :

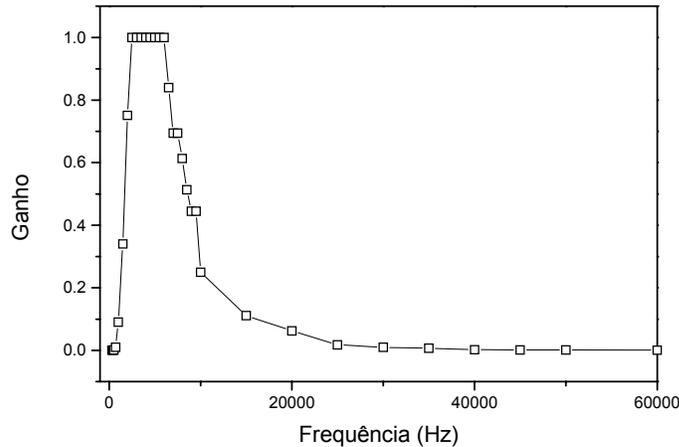


Figura 09 – Ganho em função da frequência do aparato experimental. A curva foi normalizada por um fator de 1200 vezes.

Através da curva de calibração verificamos a faixa de frequências que o sistema está operando (4KHz até 10KHz). O gráfico acima está normalizado para uma melhor visualização, mas os valores de amplificação foram da ordem de 1200 vezes o sinal inicial.

Para as medidas de voltagem em função da resistência foi utilizado resistências de precisão de  $2K\Omega$  até  $2M\Omega$ , tudo medido a temperatura ambiente. Abaixo temos os resultados :

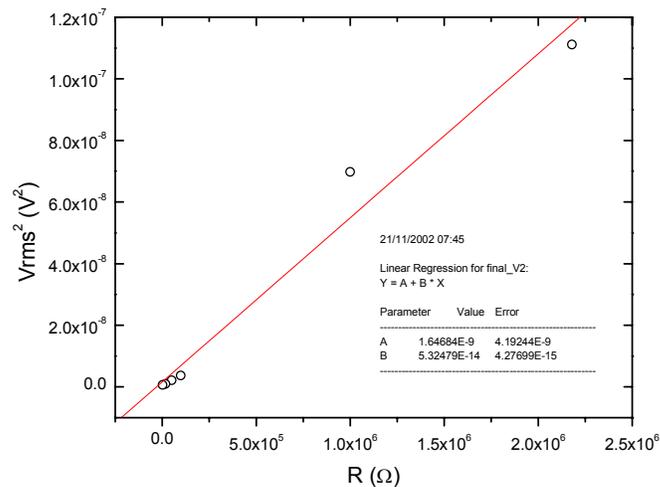


Figura 10 – Ruído de Johnson ao quadrado em função da resistência.

Através da figura 10 podemos observar uma linearidade entre os valores do quadrado do ruído de Johnson em função das resistências, conforme previsto pela equação 05. A partir do coeficiente angular, do valor da temperatura (300 K) da faixa de frequências (~10KHz) podemos encontrar o valor da constante de Boltzmann (k) :

$$5.325 \times 10^{-14} \pm 4.277 \times 10^{-15} = 4 * T * k * \Delta v \Rightarrow k = 4.438 \times 10^{-21} \pm 3.564 \times 10^{-22} \text{ J/K}$$

O valor obtido não está de acordo com o aceito na literatura  $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  e isso se deve as dificuldades de blindagem do sistema. O sistema, mesmo com tudo isolado com caixas de alumínio e papel de alumínio, ficou muito sensível a ruídos externos.

Em seguida fixamos uma resistência ( $2\text{M}\Omega$ ) e variamos a temperatura desta resistência com ajuda do nitrogênio líquido. Medimos através de um termopar o valor da temperatura na resistência em função do ruído que ela gera. Abaixo temos os resultados :

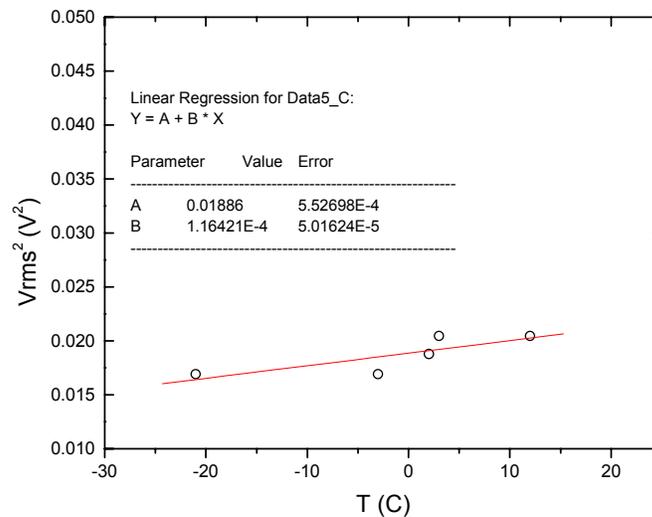


Figura 11 – Ruído de Johnson ao quadrado em função da temperatura.

Através da figura 11 podemos verificar a dependência com a temperatura do ruído de Johnson, conforme previsto pela equação 05. Assumindo que o ruído desaparece, isto é  $V_{rms} = 0$ , quando obtemos a temperatura de zero absoluto podemos extrapolar esta curva e obter o valor desta temperatura.

$$T = - (0.0189 \pm 5.528 \times 10^{-4}) / (1.164 \times 10^{-4} \pm 5.016 \times 10^{-5}) = -162.37 \pm 70.122 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Novamente o valor obtido não está de acordo com o valor conhecido de  $-273.16$  °C, conforme discutido anteriormente.

## **CONCLUSÃO**

Apesar das dificuldades de medida de ruídos térmicos que resultou em valores incorretos da constante de Boltzmann e o valor da temperatura, podemos concluir que o sistema desenvolvido para a realização das medidas está funcionando corretamente. Os efeitos lineares obtidos nas medidas de ruído em função da resistência e ruído em função da temperatura comprovam a funcionalidade do equipamento.

Para a obtenção de resultados mais favoráveis temos que trabalhar na isolação destes circuitos e especialmente da resistência que fornece o sinal pois o ruído medido se mostrou muito sensível ao movimento de pessoas ao seu redor, isto é muito sensível a variações de temperatura.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1] – J. B. Johnson, Physical Review **32**, 97 (1928)

[2] – H. Nyquist, Physical Review **32**, 110 (1928)

[3] – P. T. Anderson, Rev. Sci. Instrum. **45**, 42 (1974)

[4] – Low Level Measurements, 5th edition, Keithley Instruments Inc.