



F 809 – Instrumentação para o Ensino

Aluno: Wilson Bagni Junior – R.A.: 010097

Orientador: André K. T. Assis



Teoria das Cargas Imagem Tradução de um Texto de James Clerk Maxwell

Resumo do Trabalho

A utilização da imagem é feita com muita frequência em problemas de óptica, onde podemos imaginar um objeto numa determinada posição, mas o que vemos na verdade são raios luminosos refletidos numa superfície e que chegam aos nossos olhos, dando a impressão de haver um objeto num determinado lugar, mas que na verdade é apenas a imagem do mesmo. O capítulo VII do livro “An Elementary Treatise on Electricity” de James Clerk Maxwell(1831-1879), [1], trata sobre a teoria de cargas imagens. Utilizando essa teoria muitos problemas relacionados com a distribuição de cargas na superfície de corpos podem ser simplificados ou resolvidos usando-se a mesma idéia da imagem em problemas de óptica. Esse trabalho propõe-se a traduzir esse importante capítulo.

Considerações Finais

A tradução do texto em questão foi terminada, atingindo o objetivo proposto. Esta tradução encontra-se como o anexo 1.

Segue junto a esse, como Anexo 2, o texto original digitalizado para que possa ser utilizado como referência.

Referências

- [1] Maxwell, J. C., An Elementary Treatise on Electricity (Clarendon Press, Oxford, 1881), Chapter VII: Theory of Electrical Images, págs. 80-88.
Software de ajuda na tradução: MicroPower English Works

Anexo 1 – Tradução do capítulo VII intitulado “Theory Of Electrical Images” do livro “An Elementary Treatise on Electricity” de James Clerk Maxwell(1831-1879)

Teoria das Cargas Imagem

99.] O cálculo da distribuição de cargas na superfície de um condutor, quando corpos carregados são colocados perto dele é, em geral, uma operação além do poder dos métodos matemáticos existentes.

Quando o condutor é uma esfera, e quando é dada a distribuição de eletricidade nos corpos externos, uma solução dependendo de uma série infinita foi obtida por Poisson. Essa solução concorda com aquela que mais tarde foi obtida de forma bem mais simples por Sir W. Thomson, que é a base de seu método de Cargas Imagem.

Através desse método, ele [Thomson] tem resolvido problemas em eletricidade que nunca foram tentados por qualquer outro método, e além disso, mesmo depois da solução ter sido completamente apontada, nenhum outro método pareceu capaz de atacá-lo. Esse método tem a grande vantagem de ser inteligível pela ajuda de um raciocínio matemático bem elementar, especialmente quando ele é considerado em conexão com os diagramas de superfícies equipotenciais descritas nos Arts. 93-96.

100.] A idéia de uma imagem é mais facilmente assimilada considerando os fenômenos ópticos pelos quais o termo imagem foi, pela primeira vez, introduzido na ciência.

Estamos acostumados a usar impressões visuais que recebemos através de nossos olhos com o intuito de averiguar as posições de objetos distantes. Fazemos isto todo dia de maneira suficientemente precisa para objetivos comuns. Agrimensores e astrônomos utilizando instrumentos artificiais e deduções matemáticas fazem a mesma coisa com maior exatidão. Contudo, qualquer que seja a maneira como fazemos nossas deduções, encontramos que elas são consistentes com a hipótese de que um objeto existe em uma certa posição do espaço, da qual emite a luz que se propaga para nossos olhos ou para nossos instrumentos em linhas retas.

Mas se permanecermos em frente de um espelho plano e fizermos observações sobre a direção aparente de um objeto refletido nele, encontramos que essas observações são consistentes com a hipótese de que não existe espelho, mas que existem certos objetos na região atrás do plano do espelho. Esses objetos hipotéticos estão geometricamente relacionados com certos objetos reais na frente do plano do espelho e são chamados de *imagens* desses objetos.

Não temos um sentido especial que nos permita determinar a presença e a posição de corpos distantes por meio de seus efeitos elétricos, mas temos métodos instrumentais pelos quais pode ser determinada a distribuição do potencial e da força elétrica em qualquer parte do campo, e desses dados obtemos evidências sobre a posição e a eletrização do corpo distante.

Se um astrônomo, por exemplo, pudesse determinar a direção e a magnitude da força de gravitação em qualquer ponto desejado no espaço celeste, poderia deduzir as posições e massas dos corpos aos quais se deve esta força. Quando Adams e Leverrier descobriram o até então desconhecido planeta Netuno, o fizeram determinando a direção e magnitude da força gravitacional em certos pontos do espaço devida ao planeta que ainda não havia sido visto. Em um problema elétrico empregamos uma bola de seiva carregada, a qual movemos como desejamos no campo. Os astrônomos utilizaram com um propósito similar o planeta Urano, sobre o qual, de fato, não tinham controle, mas que movia-se em posições tais que alterações de elementos de sua órbita serviram para indicar a posição do planeta perturbador desconhecido.

101.] Em um dos sistemas eletrizados que já investigamos, aquele de uma esfera condutora A dentro de uma casca esférica condutora B, temos um dos casos mais simples do princípio de carga imagem.

O campo elétrico está nesse caso na região que fica entre as duas superfícies esféricas concêntricas. O campo elétrico em qualquer ponto P dentro dessa região está na direção do raio OP e é numericamente igual à carga da esfera interior, A, dividido pelo quadrado da distância, OP, que vai do ponto [P] até o centro comum [O]. É evidente, portanto, que o campo dentro desta região será o mesmo se substituirmos as superfícies esféricas eletrizadas, A e B, por quaisquer outras duas superfícies esféricas concêntricas, C e D, onde uma delas, C, situa-se dentro da esfera menor, A, e a outra, D, fica externa a B e a carga de C é igual a de A no caso anterior. Os fenômenos elétricos na região entre A e B são, portanto, os mesmos de antes, a única diferença entre os casos é que na região entre A e

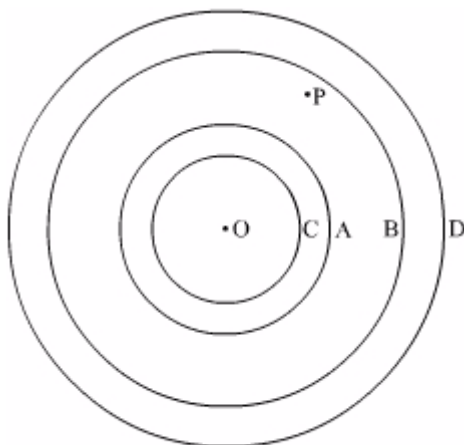


Fig. 22.

C e também na região entre B e D encontramos agora campos elétricos agindo conforme a mesma lei da região entre A e B, enquanto que quando a região estava limitada pelas superfícies condutoras A e B não havia qualquer campo elétrico nas regiões além dessas superfícies. Para fins matemáticos podemos até mesmo supor que a esfera interior C é reduzida a um ponto físico em O, e que a esfera externa D é expandida a um tamanho infinito, e assim assemelhamos a ação elétrica na

região entre A e B como a ação devida a um ponto eletrizado O colocado numa região infinita.

Parece, então, que quando uma superfície esférica está uniformemente carregada, os fenômenos elétricos na região fora da esfera são exatamente os mesmos como se a superfície esférica tivesse sido removida, e um pequeno corpo fosse colocado no centro da esfera, tendo a mesma carga que a esfera.

Este é um exemplo simples no qual os fenômenos numa certa região são consistentes com uma falsa hipótese sobre o que existe além dessa região. A ação de uma superfície esférica uniformemente carregada na região fora desta superfície é tal que os fenômenos podem ser atribuídos a um ponto carregado imaginário no centro da esfera.

O potencial, ψ , de uma esfera de raio a , colocada num espaço infinito e carregada com uma quantidade e de carga, é $\frac{e}{a}$. Conseqüentemente, se ψ é o potencial da esfera, a carga imaginária no seu centro é ψa .

102.] Agora, vamos calcular o potencial num ponto P numa superfície esférica que está centrada em C e tem raio \overline{CP} , devido a duas cargas puntiformes A e B que estão ao longo do mesmo raio prolongado, e tais que o produto das suas distâncias desde o centro é igual ao quadrado do raio. Pontos assim relacionados entre si são chamados pontos *inversos* com relação à esfera.

Seja $a = \overline{CP}$ o raio da esfera. Seja $\overline{CA} = ma$, então \overline{CB} será $\frac{a}{m}$.

Além disso o triângulo APC é semelhante ao PCB, e

$$\overline{AP} : \overline{PB} :: \overline{AC} : \overline{PC}, \text{ ou}$$

$$\overline{AP} = m\overline{BP}. \text{ Veja Euclides vi. Prop. E.}$$

Agora, seja uma carga igual a e colocada em A e uma carga $e' = -\frac{e}{m}$ de sinal oposto colocada em B. O potencial devido a essas cargas em P será:

$$V = \frac{e}{AP} + \frac{e'}{BP} = \frac{e}{mBP} - \frac{e}{mBP} = 0;$$

ou seja, o potencial devido às cargas em A e B em qualquer ponto P da superfície esférica é nulo.

Podemos supor agora a superfície esférica como sendo uma fina casca esférica de metal. Seu potencial já é zero em todo ponto, tal que se a conectarmos por um fio fino à terra não haverá alteração no seu potencial, e portanto o potencial em qualquer ponto, tanto dentro como fora da superfície, permanecerá inalterado, e será aquele devido às duas cargas puntiformes em A e B.

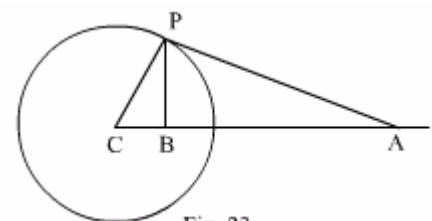


Fig. 23.

Se mantemos a casca metálica em conexão com a terra e removemos a carga puntiforme em B, o potencial em todo ponto dentro da esfera se anulará, mas fora vai permanecer como antes. Pois a superfície da esfera ainda permanece com o mesmo potencial, e nenhuma mudança foi feita na distribuição de corpos carregados na região fora da esfera.

Portanto, se um ponto carregado A for colocado fora de um condutor esférico que está num potencial nulo, a ação elétrica [isto é, o campo elétrico] em todos os pontos fora da esfera será equivalente à ação devida ao ponto A juntamente com um outro ponto, B, dentro da esfera, que é o ponto inverso de A, e cuja carga está para a de A assim como -1 está para m . O ponto B com sua carga imaginária é chamado de *carga imagem* de A.

Do mesmo modo, ao remover-se [a carga] A e manter B, podemos demonstrar que se uma carga pontual B é colocada dentro de um condutor oco tendo sua superfície interna esférica, a ação elétrica dentro da cavidade é equivalente àquela da carga B, junto com uma carga imaginária pontual, A, fora da esfera, cuja carga está para a de B como m está para -1 .

Se a esfera, em vez de estar em conexão com a terra, e portanto num potencial zero, está num potencial ψ , os efeitos elétricos fora da esfera serão os mesmos como se, além da carga imagem [B, dentro da esfera], uma outra carga imaginária igual a ψa fosse colocada no centro da esfera.

Dentro da esfera o potencial é apenas aumentado de ψ .

103.] Como um exemplo do método de cargas imagens vamos calcular o estado elétrico de duas esferas cujos raios são a e b respectivamente, e cujos potenciais são P_a e P_b , sendo a distância entre seus centros c . Vamos supor que b é pequeno comparado com c .

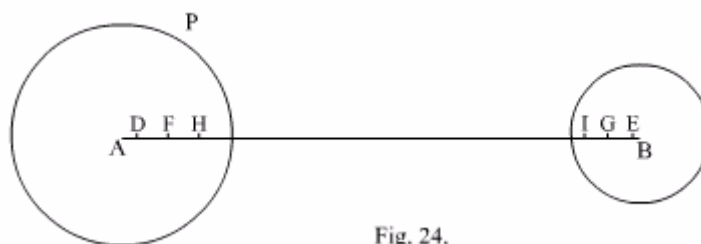


Fig. 24.

Podemos considerar os efeitos elétricos reais em qualquer ponto externo às duas esferas como devido a uma série de cargas imagens.

Em primeiro lugar, já que o potencial da esfera A é P_a temos que colocar uma imagem no centro de A com uma carga aP_a .

Similarmente em B, o centro da outra esfera, temos que colocar uma carga bP_b .

Cada uma dessas imagens terá uma imagem de segunda ordem na outra esfera. A imagem de B na esfera a estará em D, onde

$$AD = \frac{a^2}{c}, \text{ e terá a carga } D = -\frac{a}{c}bP_b.$$

A imagem de A na esfera b estará em E, onde

$$BE = \frac{b^2}{c}, \text{ e terá a carga } E = -\frac{b}{c}aP_a.$$

Cada uma dessas [imagens] terá uma [outra] imagem de terceira ordem. A de E em a estará em F, onde

$$AF = \frac{a^2}{AE} = \frac{a^2c}{c^2 - b^2}, \text{ e } F = \frac{a^2b}{c^2 - b^2}P_a.$$

A [imagem] de D em b estará em G, onde

$$BG = \frac{b^2}{DB} = \frac{b^2c}{c^2 - a^2}, \text{ e } G = \frac{ab^2}{c^2 - a^2}P_b.$$

As imagens de quarta ordem serão, de G em a , estará em H, onde

$$AH = \frac{a^2}{AG} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)}, \text{ e } H = \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)}P_b,$$

de F em b , estará em I, onde

$$BI = \frac{b^2}{FB} = \frac{b^2(c^2 - b^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)}, \text{ e } I = \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)}P_a.$$

Poderíamos prosseguir com uma série de imagens ao infinito, mas se b é pequeno comparado com c , as imagens rapidamente se tornarão menores e podem ser desprezadas depois da quarta ordem.

Se escrevermos agora

$$q_{aa} = a + \frac{a^2b}{c^2 - b^2} + \dots,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \dots,$$

$$q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \dots,$$

a carga total da esfera a será

$$E_a = q_{aa}P_a + q_{ab}P_b,$$

e carga total da esfera b será

$$E_b = q_{ab}P_a + q_{bb}P_b.$$

104.] Destes resultados podemos calcular os potenciais das duas esferas quando suas cargas são dadas, e se desprezarmos termos envolvendo b^3 encontraremos

$$P_a = \frac{1}{a}E_a + \frac{1}{c}E_b,$$

$$P_b = \frac{1}{c}E_a + \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b.$$

A energia [potencial] elétrica do sistema é

$$\frac{1}{2}(E_aP_a + E_bP_b) = \frac{1}{2} \frac{1}{a} E_a^2 + \frac{1}{c} E_a E_b + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b^2.$$

A repulsão, R , entre as duas esferas é medida pela taxa na qual a energia diminui enquanto c aumenta; portanto,

$$R = \frac{E_b}{c^2} \left\{ E_a - E_b \frac{a^3(2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2} \right\}.$$

Para que a força possa ser repulsiva é necessário que as cargas das esferas sejam de mesmo sinal, e

$$E_a \text{ dever ser maior que } E_b \frac{a^3(2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2}.$$

Conseqüentemente a força será sempre atrativa,

1. Quando qualquer esfera não está isolada [ou seja, se qualquer esfera estiver aterrada].
2. Quando qualquer esfera está sem carga.
3. Quando as esferas estão quase em contato, se seus potenciais são diferentes.

Quando os potenciais das duas esferas são iguais a força é sempre repulsiva.

105.] Determinar o campo elétrico em qualquer ponto na superfície externa de uma esfera condutora aterrada surgindo da presença de um ponto carregado A fora da esfera.

As condições elétricas [isto é, o campo elétrico] em todos os pontos fora da esfera são equivalentes, como já vimos, àquelas devidas ao ponto A junto com sua imagem em B . Se e é a carga do ponto A (Fig. 23), o campo devido a ela em P é $\frac{e}{AP^2}$ na direção AP .

Decompondo esse campo numa direção paralela a AC e ao longo do raio, suas componentes são $\frac{e}{AP^3}AC$ na direção paralela a AC e

$\frac{e}{AP^3}CP$ na direção CP . A carga da imagem de A em B é $-e\frac{CA}{CB}$, e o

campo devido à imagem em P é $e\frac{CP}{CA} \cdot \frac{1}{BP^2}$ na direção PB .

Decompondo esse campo nas mesmas direções que o outro campo, suas componentes são:

$$e\frac{CP}{CA} \cdot \frac{CB}{BP^3} \text{ na direção paralela a } CA, \text{ e}$$

$$e\frac{CP^2}{CA \cdot BP^3} \text{ na direção } PC.$$

Se a é o raio da esfera e se $CA = f = ma$ e $AP = r$, então $CB = \frac{1}{m}a$ e $BP = \frac{1}{m}r$; e se e é a carga do ponto A , a carga de sua imagem B é $-\frac{1}{m}e$.

O campo em P devido à carga e em A é $\frac{e}{r^2}$ na direção AP .

Decompondo esse campo na direção do raio e na direção paralela a AC , suas componentes são:

$$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{ma}{r} \text{ na direção AC, e}$$

$$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{a}{r} \text{ na direção CP.}$$

O campo em P devido à carga imagem $-\frac{1}{m}e$ em B é $\frac{1}{m}e \frac{1}{BP^2}$ ou $e \frac{m}{r^2}$ na direção PB. Decompondo-o nas mesmas direções como as dos outros campos elétricos, suas componentes são:

$$e \frac{m}{r^2} \frac{BC}{BP} = \frac{ema}{r^3} \text{ na direção CA, e}$$

$$e \frac{m \cdot CP}{r^2 BP} \text{ ou } \frac{em^2 a}{r^3} \text{ na direção PC.}$$

As componentes na direção paralela a AC são iguais mas em sentidos opostos. O campo resultante é portanto na direção do raio, que confirma o que já provamos, que a esfera é uma superfície equipotencial onde o campo resultante é normal em toda parte. O campo resultante é portanto na direção PC, e é igual a $\frac{ea}{r^3}(m^2 - 1)$ na direção PC, isto é, em direção ao centro da esfera.

Disto podemos determinar a densidade superficial de carga em qualquer ponto da esfera, pois, pela lei de Coulomb, se σ é a densidade superficial,

$$4\pi\sigma = R, \text{ onde R é força resultante } \textit{apontando para fora}.$$

Portanto, como o campo resultante neste caso age para dentro, a densidade superficial é negativa em todo lugar, e vale

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{ea}{r^3} (m^2 - 1).$$

Conseqüentemente a densidade superficial é inversamente proporcional ao cubo da distância do ponto indutor A.

106.] No caso de duas esferas A e B (Fig. 24), com raios a e b e potenciais P_a e P_b , a distância entre seus centros sendo c , podemos determinar a densidade superficial em qualquer ponto da esfera A considerando-a como devida à ação de uma carga aP_a em A, juntamente com as ações devidas aos pares de pontos B e D, E e F, ..., os sucessivos pares de cargas imagem.

Fazendo $r = PB$, $r_1 = PE$, $r_2 = PG$, ..., obtemos

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} P_a \left[\frac{1}{a} + \frac{b}{r_1^3} \frac{\{(c^2 - b^2)^2 - a^2 c^2\}}{a^2 c} + \dots \right]$$

$$- \frac{1}{4\pi} P_b \left[\frac{b}{ar^3} (c^2 - a^2) + \frac{b^2 c^2}{r_2^3 (c^2 - a^2)} \left\{ \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2 - a^2} \right)^2 - \frac{a^2}{c^2} \right\} + \dots \right]$$

Se chamarmos B o corpo indutor e A o corpo induzido, então podemos considerar a carga [superficial] induzida em A como

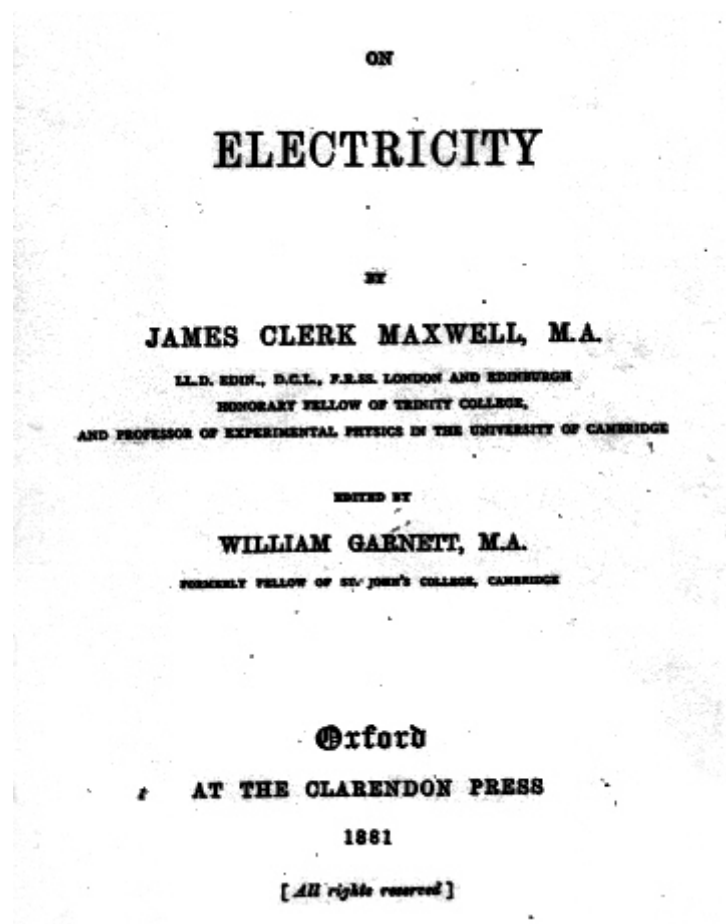
constituída de duas partes, uma dependendo do potencial de B e outra de seu próprio potencial.

A parte dependente de P_b é chamada por alguns autores que escrevem sobre eletricidade de *carga superficial induzida de primeira espécie*. Quando A não está isolada [isto é, quando A está aterrada] ela constitui toda carga [superficial induzida], e se P_b é positivo ela é negativa sobre toda parte da superfície, mas maior em natureza numérica sobre o ponto mais próximo de B.

A parte dependente de P_a é chamada de *carga superficial induzida de segunda espécie*. Ela só pode existir quando A está isolada, e é em todo lugar de mesmo sinal que P_a . Se A está isolada e sem carga, então as cargas superficiais induzidas de primeira espécie e segunda espécie têm de ser iguais e opostas. A densidade superficial é negativa no lado próximo a B e positiva no lado mais distante de B, mas embora as quantidades totais de carga positiva e negativa sejam iguais, a densidade superficial de carga negativa é mais concentrada que a positiva, tanto que a linha neutra que separa a densidade positiva da negativa não é no equador da esfera, mas está situada mais próxima de B.

A condição para que exista tanto densidade superficial de carga positiva quanto negativa sobre a esfera é que o valor de σ nos pontos mais próximos de B e mais afastados de B tenham sinais opostos. Se a e b são pequenos comparados com c , podemos desprezar todos os termos dos coeficientes de P_a e P_b depois do primeiro. Os valores de r são entre $c+a$ e $c-a$. Conseqüentemente, se P_a está entre $P_b \frac{b(c-a)}{(c+a)^2}$ e $P_b \frac{b(c+a)}{(c-a)^2}$, haverá densidades de carga positiva e negativa sobre A, divididas por uma linha neutra, mas se P_a está além desses limites, a densidade de carga por toda parte da superfície será de um tipo; negativa se P_a está abaixo do limite inferior, e positiva se está acima do limite superior.

Anexo 2 – Original do capítulo VII intitulado “Theory Of Electrical Images”, do livro “An Elementary Treatise on Electricity” de James Clerk Maxwell(1831-1879)



CHAPTER VII.

THEORY OF ELECTRICAL IMAGES.

99.] THE calculation of the distribution of electrification on the surface of a conductor when electrified bodies are placed near it is in general an operation beyond the powers of existing mathematical methods.

When the conductor is a sphere, and when the distribution of electricity on external bodies is given, a solution, depending on an infinite series was obtained by Poisson. This solution agrees with that which was afterwards given in a far simpler form by Sir W. Thomson, and which is the foundation of his method of Electric Images.

By this method he has solved problems in electricity which have never been attempted by any other method, and which, even after the solution has been pointed out, no other method seems capable of attacking. This method has the great advantage of being intelligible by the aid of the most elementary mathematical reasoning, especially when it is considered in connection with the diagrams of equipotential surfaces described in Arts. 93-96.

100.] The idea of an image is most easily acquired by considering the optical phenomena on account of which the term image was first introduced into science.

We are accustomed to make use of the visual impressions we receive through our eyes in order to ascertain the positions of distant objects. We are doing this all day long in a manner sufficiently accurate for ordinary purposes. Surveyors and astronomers by means of artificial instruments and mathematical deductions do the same thing with greater exactness. In whatever way, however, we make our deductions we find that they are consistent with the hypothesis that an object exists in a certain position in space, from which it emits light which travels to our eyes or to our instruments in straight lines.

But if we stand in front of a plane mirror and make observations on the apparent direction of the objects reflected therein, we find that these observations are consistent with the hypothesis that there is no mirror, but that certain objects exist in the region beyond the plane of the mirror. These hypothetical objects are geometrically related to certain real objects in front of the plane of the mirror, and they are called the *images* of these objects.

We are not provided with a special sense for enabling us to ascertain the presence and the position of distant bodies by means of their electrical effects, but we have instrumental methods by which the distribution of potential and of electric force in any part of the field may be ascertained, and from these data we obtain a certain amount of evidence as to the position and electrification of the distant body.

If an astronomer, for instance, could ascertain the direction and magnitude of the force of gravitation at any desired point in the heavenly spaces, he could deduce the positions and masses of the bodies to which the force is due. When Adams and Leverrier discovered the hitherto unknown planet Neptune, they did so by ascertaining the direction and magnitude of the gravitating force due to the unseen planet at certain points of space. In the electrical problem we employed an electrified pith ball, which we moved about in the field at pleasure. The astronomers employed for a similar purpose the planet Uranus, over which, indeed, they had no control, but which moved of itself into such positions that the alterations of the elements of its orbit served to indicate the position of the unknown disturbing planet.

101.] In one of the electrified systems which we have already investigated, that of a spherical conductor A within a concentric spherical conducting vessel B , we have one of the simplest cases of the principle of electric images.

The electric field is in this case the region which lies between the two concentric spherical surfaces. The electric force at any point P within this region is in the direction of the radius OP and numerically equal to the charge of the inner sphere, A , divided by the square of the distance, OP , of the point from the common centre. It is evident, therefore, that the force within this region will be the same if we substitute for the electrified spherical surfaces, A and B , any other two concentric spherical surfaces, C and D , one of them, C , lying within the smaller sphere, A , and the other, D , lying outside of B , the charge of C being equal to that

of A in the former case. The electric phenomena in the region between A and B are therefore the same as before, the only difference between the cases is that in the region between A and C and also in the region between B and D we now find electric forces

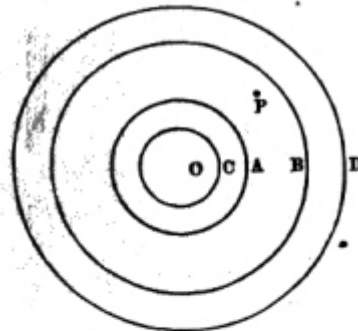


Fig. 22.

acting according to the same law as in the region between A and B , whereas when the region was bounded by the conducting surfaces A and B there was no electrical force whatever in the regions beyond these surfaces. We may even, for mathematical purposes, suppose the inner sphere C to be reduced to a physical point at O , and the outer sphere D to expand to an infinite size, and thus we assimilate the electric action in

the region between A and B to that due to an electrified point at O placed in an infinite region.

It appears, therefore, that when a spherical surface is uniformly electrified, the electric phenomena in the region outside the sphere are exactly the same as if the spherical surface had been removed, and a very small body placed at the centre of the sphere, having the same electric charge as the sphere.

This is a simple instance in which the phenomena in a certain region are consistent with a false hypothesis as to what exists beyond that region. The action of a uniformly electrified spherical surface in the region outside that surface is such that the phenomena may be attributed to an imaginary electrified point at the centre of the sphere.

The potential, ψ , of a sphere of radius a , placed in infinite space and charged with a quantity e of electricity, is $\frac{e}{a}$. Hence if ψ is the potential of the sphere, the imaginary charge at its centre is ψa .

102.] Now let us calculate the potential at a point P in a spherical surface whose centre is C and radius \overline{CP} , due to two electrified points A and B in the same radius produced, and such that the product of their distances from the centre is equal to the square of the radius. Points thus related to one another are called *inverse points* with respect to the sphere.

Let $a = \overline{CP}$ be the radius of the sphere. Let $\overline{CA} = ma$, then \overline{CB} will be $\frac{a}{m}$.

Also the triangle APC is similar to PCB , and

$$\overline{AP} : \overline{PB} : : \overline{AC} : \overline{PC},$$

or $\overline{AP} = m\overline{BP}$. See Euclid vi. prop. E.

Now let a charge of electricity equal to e be placed at A and a charge $e' = -\frac{e}{m}$ of the opposite kind be placed at B . The potential due to these charges at P will be

$$\begin{aligned} V &= \frac{e}{\overline{AP}} + \frac{e'}{\overline{BP}}, \\ &= \frac{e}{m\overline{BP}} - \frac{e}{m\overline{BP}}, \\ &= 0; \end{aligned}$$

or the potential due to the charges at A and B at any point P of the spherical surface is zero.

We may now suppose the spherical surface to be a thin shell of metal. Its potential is already zero at every point, so that if we connect it by a fine wire with the earth there will be no alteration of its potential, and therefore the potential at every point, whether within or without the surface, will remain unaltered, and will be that due to the two electrified points A and B .

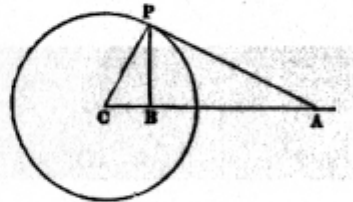


Fig. 23.

If we now keep the metallic shell in connection with the earth and remove the electrified point B , the potential at every point within the sphere will become zero, but outside it will remain as before. For the surface of the sphere still remains of the same potential, and no change has been made in the distribution of electrified bodies in the region outside the sphere.

Hence, if an electrified point A be placed outside a spherical conductor which is at potential zero, the electrical action at all points outside the sphere will be equivalent to that due to the point A together with another point, B , within the sphere, which is the inverse point to A , and whose charge is to that of A as -1 is to m . The point B with its imaginary charge is called the *electric image* of A .

In the same way by removing A and retaining B , we may shew

that if an electrified point B be placed inside a hollow conductor having its inner surface spherical, the electrical action within the hollow is equivalent to that of the point B , together with an imaginary point, A , outside the sphere, whose charge is to that of B as m is to -1 .

If the sphere, instead of being in connection with the earth, and therefore at potential zero, is at potential ψ , the electrical effects outside the sphere will be the same as if, in addition to the image of the electrified point, another imaginary charge equal to ψa were placed at the centre of the sphere.

Within the sphere the potential will simply be increased by ψ .

103.] As an example of the method of electric images let us calculate the electric state of two spheres whose radii are a and b respectively, and whose potentials are P_a and P_b , the distance between their centres being c . We shall suppose b to be small compared with c .

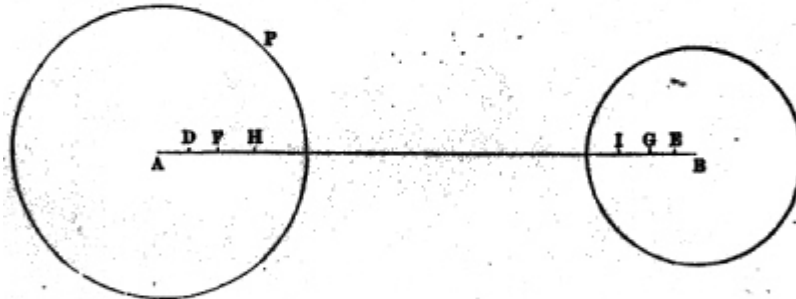


Fig. 24.

We may consider the actual electrical effects at any point outside the two spheres as due to a series of electric images.

In the first place, since the potential of the sphere A is P_a we must place an image at the centre A with a charge $a P_a$.

Similarly at B , the centre of the other sphere, we must place a charge $b P_b$.

Each of these images will have an image of the second order in the other sphere. The image of B in the sphere a will be at D , where

$$AD = \frac{a^2}{c}, \text{ and the charge } D = -\frac{a}{c} \cdot b P_b.$$

The image of A in the sphere b will be at E , where

$$BE = \frac{b^2}{c}, \text{ and the charge } E = -\frac{b}{c} \cdot a P_a.$$

Each of these will have an image of the third order. That of B in a will be at F , where

$$AF = \frac{a^2}{AE} = \frac{a^2 c}{c^2 - b^2}, \text{ and } F = \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} P_a.$$

That of D in b will be at G , where

$$BG = \frac{b^2}{DB} = \frac{b^2 c}{c^2 - a^2}, \text{ and } G = \frac{a b^2}{c^2 - a^2} P_b.$$

The images of the fourth order will be,

of G in a at H , where

$$AH = \frac{a^2}{AG} = \frac{a^2 (c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)} \text{ and } H = \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} P_a,$$

of F in b at I , where

$$BI = \frac{b^2}{FB} = \frac{b^2 (c^2 - b^2)}{c(c^2 - a^2 - b^2)} \text{ and } I = \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} P_b.$$

We might go on with a series of images for ever, but if b is small compared with c , the images will rapidly become smaller and may be neglected after the fourth order.

If we now write

$$q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \&c.,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \&c.,$$

$$q_{ba} = b + \frac{a b^2}{c^2 - a^2} + \&c.,$$

the whole charge of the sphere a will be

$$E_a = q_{aa} P_a + q_{ab} P_b,$$

and that of the sphere b will be

$$E_b = q_{ab} P_a + q_{ba} P_b.$$

104.] From these results we may calculate the potentials of the two spheres when their charges are given, and if we neglect terms involving b^3 we find

$$P_a = \frac{1}{a} E_a + \frac{1}{c} E_b,$$

$$P_b = \frac{1}{c} E_a + \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^2}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b.$$

The electric energy of the system is

$$\frac{1}{2} (E_a P_a + E_b P_b) = \frac{1}{2} \frac{1}{a} E_a^2 + \frac{1}{c} E_a E_b + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{a^2}{c^2(c^2 - a^2)} \right\} E_b^2.$$

The repulsion, R , between the two spheres is measured by the rate at which the energy diminishes as c increases; therefore,

$$R = \frac{E_b}{c^2} \left\{ E_a - E_b \frac{a^3 (2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2} \right\}.$$

In order that the force may be repulsive it is necessary that the charges of the spheres should be of the same sign, and

$$E_a \text{ must be greater than } E_b \frac{a^3 (2c^2 - a^2)}{c(c^2 - a^2)^2}.$$

Hence the force is always attractive,

1. When either sphere is uninsulated;
2. When either sphere has no charge;
3. When the spheres are very nearly in contact, if their potentials are different.

When the potentials of the two spheres are equal the force is always repulsive.

105.] To determine the electric force at any point just outside of the surface of a conducting sphere connected with the earth arising from the presence of an electrified point A outside the sphere.

The electrical conditions at all points outside the sphere are equivalent, as we have seen, to those due to the point A together with its image at B . If e is the charge of the point A (Fig. 23), the force

due to it at P is $\frac{e}{AP^2}$ in the direction AP . Resolving this force in

a direction parallel to AC and along the radius, its components are

$\frac{e}{AP^3} AC$ in the direction parallel to AC and $\frac{e}{AP^3} CP$ in the direction CP . The charge of the image of A at B is $-e \frac{CP}{CA}$, and the

force due to the image at P is $e \frac{CP}{CA} \cdot \frac{1}{BP^2}$ in the direction PB . Resolving this force in the same direction as the other, its components are

$e \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CB}{BP^3}$ in a direction parallel to CA , and

$e \frac{CP^2}{CA \cdot BP^3}$ in the direction PC .

If a is the radius of the sphere and if $CA = f = ma$ and $AP = r$, then $CB = \frac{1}{m} a$ and $BP = \frac{1}{m} r$; and if e is the charge of the point A , the charge of its image at B is $-\frac{1}{m} e$.

The force at P due to the charge e at A is $\frac{e}{r^2}$ in the direction AP .

Resolving this force in the direction of the radius and a direction parallel to AC , its components are

$$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{ma}{r} \text{ in the direction } AC, \text{ and}$$

$$\frac{e}{r^2} \cdot \frac{a}{r} \text{ in the direction } CP.$$

The force at P due to the image $-\frac{1}{m}e$ at B is $\frac{1}{m}e \frac{1}{BP^2}$ or $e \frac{m}{r^2}$ in the direction PB . Resolving this in the same directions as the other force, its components are

$$e \frac{m}{r^2} \frac{BC}{BP} = \frac{ema}{r^2} \text{ in the direction } CA, \text{ and}$$

$$e \frac{m \cdot CP}{r^2 BP} \text{ or } \frac{em^2a}{r^2} \text{ in the direction } PC.$$

The components in the direction parallel to AC are equal but in opposite directions. The resultant force is therefore in the direction of the radius, which confirms what we have already proved, that the sphere is an equipotential surface to which the resultant force is everywhere normal. The resultant force is therefore in the direction PC , and is equal to $\frac{ea}{r^2} (m^2 - 1)$ in the direction PC , that is to say, towards the centre of the sphere.

From this we may ascertain the surface density of the electrification at any point of the sphere, for, by Coulomb's law, if σ is the surface density,

$$4\pi\sigma = R, \text{ where } R \text{ is the resultant force acting outwards.}$$

Hence, as the resultant force in this case acts inwards, the surface density is everywhere negative, and is

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{ea}{r^2} (m^2 - 1).$$

Hence the surface density is inversely as the cube of the distance from the inducing point A .

106.] In the case of the two spheres A and B (Fig. 24), whose radii are a and b and potentials P_a and P_b , the distance between their centres being c , we may determine the surface density at any point of the sphere A by considering it as due to the action of a charge aP_a at A , together with that due to the pairs of points B , D and E , F &c., the successive pairs of images.

Putting $r = PB$, $r_1 = PE$, $r_2 = PG$, &c.,
we find

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} P_a \left[\frac{1}{a} + \frac{b}{r_1^3} \frac{\{(c^2 - b^2)^2 - a^2 c^2\}}{a^2 c} + \&c. \right] \\ - \frac{1}{4\pi} P_b \left[\frac{b}{ar^3} (c^2 - a^2) + \frac{b^2 c^2}{r_2^3 (c^2 - a^2)} \left\{ \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2 - a^2} \right)^2 - \frac{a^2}{c^2} \right\} + \&c. \right]$$

If we call B the inducing body and A the induced body, then we may consider the electrification induced on A as consisting of two parts, one depending on the potential of B and the other on its own potential.

The part depending on P_b is called by some writers on electricity the *induced electrification of the first species*. When A is not insulated it constitutes the whole electrification, and if P_b is positive it is negative over every part of the surface, but greatest in numerical nature at the point nearest to B .

The part depending on P_a is called the *induced electrification of the second species*. It can only exist when A is insulated, and it is everywhere of the same sign as P_a . If A is insulated and without charge, then the induced electrifications of the first and second species must be equal and opposite. The surface-density is negative on the side next to B and positive on the side furthest from B , but though the total quantities of positive and negative electrification are equal, the negative electrification is more concentrated than the positive, so that the neutral line which separates the positive from the negative electrification is not the equator of the sphere, but lies nearer to B .

The condition that there shall be both positive and negative electrification on the sphere is that the value of σ at the points nearest to B and furthest from B shall have opposite signs. If a and b are small compared with c , we may neglect all the terms of the coefficients of P_a and P_b after the first. The values of r lie between $c + a$ and $c - a$. Hence, if P_a is between $P_b \frac{b(c-a)}{(c+a)^2}$ and $P_b \frac{b(c+a)}{(c-a)^2}$, there will be both positive and negative electrification on A , divided by a neutral line, but if P_a is beyond these limits, the electrification of every part of the surface will be of one kind; negative if P_a is below the lower limit, and positive if it is above the higher limit.