



**F 809**



**PROJETO**  
**SIMULAÇÃO COM LASER DE PADRÃO DE DIFRAÇÃO –**  
**ÓPTICA DE FOURIER E COMPARAÇÃO COM A TÉCNICA**  
**DE LEED**

**Transformação de Fourier Óptica e Montagem**  
**Experimental**

**ORIENTADOR: RICHARD LANDERS**

ALUNA:

Kelly Tatiana Marçal Lucas.

**2º Semestre de 2003**

## **Introdução**

O desenvolvimento da televisão, satélites, sistemas de espionagem e exames médicos (raios – X, ultra-sonografia, tomografias, ressonância magnética, etc.) modificam nosso conceito de obtenção e visualização da informação.

Mais recentemente as técnicas de obtenção de imagens (DVD, Scanners, cintiladores, etc), juntamente com uma melhora dos pacotes computacionais gráficos, permiti-nos uma análise de informações muito mais rápida e precisa e em muitos casos conclusões que tornaram-se possíveis somente depois da utilização de técnicas gráficas.

Dentro deste contexto mundial, as técnicas de processamento de imagens constituem importante ferramenta em inúmeras áreas. Estas técnicas permitem o tratamento de dados visuais, possibilitando a busca pela informação desejada.

E uma das grandes utilizações da teoria de Óptica de Fourier é na ótica de imagens

## **Teoria**

### **Transformada de Fourier através de uma lente**

Se posicionarmos uma fonte pontual ao longo de um plano focal de uma lente positiva, a imagem da fonte pontual ocorre no infinito. O inverso também é verdade. Devido ao fato do plano focal, e um plano focal no infinito serem conjugados, parece plausível que as lentes formariam uma imagem de um padrão de difração a campo distante em seu plano focal. Examinando como uma lente processa uma onda plana, vamos observar que a transformação é equivalente à transformada de Fourier.

Tomemos uma lente como a mostrada ao lado e suponhamos uma onda plana  $U(x,y)$  incidindo sobre ela da esquerda para a direita. Temos que o máximo da espessura da lente é

$\Delta_0$ , assumindo que nas coordenadas  $(x,y)$  temos  $\Delta(x,y)$  então a diferença de fase em função da posição de incidência da onda resultante será [1]:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k(\Delta_0 - \Delta(x, y)) \quad (1)$$

onde  $n$  é o índice de refração do material da lente,  $kn\Delta(x,y)$  é o atraso da fase introduzida pela lente e  $k[\Delta_0 - \Delta(x,y)]$  é o atraso da fase introduzida pela região remanescente entre os dois planos. Que pode ser dado em função dos raios das duas superfícies como:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \quad (2)$$

sendo que os raios são orientados como positivos se incidem da esquerda para a direita numa superfície convexa e vice-versa. Se a onda incide próximo ao eixo da lente temos uma situação chamada de aproximação paraxial, em que as expressões se simplificam para:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

Assim para uma onda  $U(x,y)$  que incide da esquerda para a direita o atraso de fase devido à lente resultará numa onda  $U'(x,y)$  tal que:

$$U'(x, y) = e^{i\phi(x,y)} U(x, y) \quad (4)$$

Após alguma álgebra podemos reunir todos os termos em uma expressão do tipo

$$U'(x, y) = e^{ik\Delta_0} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} U(x, y) \quad (5)$$

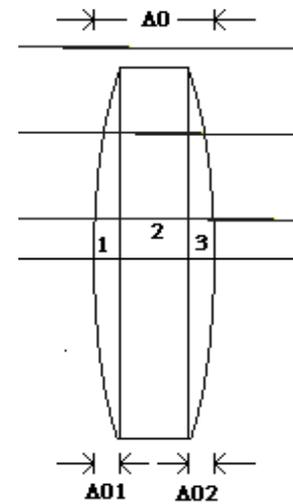


Figura 1: Esquema básico de uma lente

Onde

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Com isto poderemos agora mostrar a propriedade inerente de uma lente convergente de fazer a transformada de Fourier de uma imagem em duas dimensões.

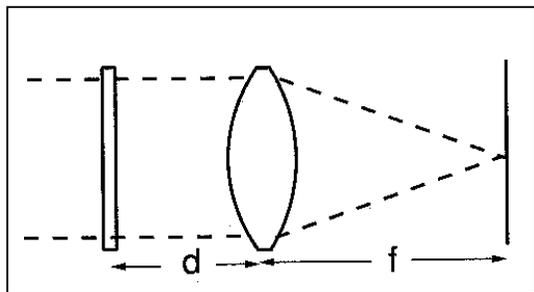


Figura 2 Analisaremos agora o caso de um slide colocado a uma distância  $d$  da lente (figura 2). Assumindo que o slide seja uniformemente iluminado por uma onda plana incidente da esquerda para a direita de amplitude  $A(x,y,t)$  que daqui a diante utilizaremos como  $A(x,y)$ .

Definamos antes de qualquer coisa a nossa transformada de Fourier. Se  $g(x,y)$  é uma função no espaço direto, temos que  $G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x,y)\}$  é a chamada transformada de Fourier de  $g(x,y)$  dada como

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} \quad (6)$$

em que  $f_x$  e  $f_y$  são freqüências espaciais definidas como:

$$f_x = \frac{u}{\lambda f}, f_y = \frac{v}{\lambda f}$$

sendo que  $(u,v)$  são as coordenadas do espaço de Fourier, em que trabalharemos.

Uma vez definida nossa transformada, chamemos

$$F_0(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{A(x,y) \cdot t(x,y)\} \quad (7)$$

à transformada de Fourier da luz transmitida pelo slide e de

$$F_1(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_1(x,y)\} \quad (8)$$

à transformada de Fourier da luz que entra na lente. Assumindo que a aproximação paraxial (ou de Fresnel)\*\* é válida, temos que:

$$F_l(f_X, f_Y) = F_0(f_X, f_Y) e^{-i\pi\lambda d(f_X^2 + f_Y^2)} \quad (9)$$

do qual retiramos um termo de atraso de fase constante.

Temos que a distribuição de amplitude atrás da lente é

$$U_f'(u, v) = U_f(u, v) P(x, y) e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}} \quad (10)$$

Sendo que  $P(x, y)$  é a função de transmissão da lente. Para achar a distribuição  $U_f(u, v)$  atrás do plano focal da lente utilizamos a fórmula de difração de Fresnel\*\*\*:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{u^2 + v^2}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy " U_l'(x, y) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}} e^{ik \frac{xu + yv}{z}} " \quad (11)$$

que para  $z = f$  nos dá como resultado final

$$U_f(u, v) = \frac{e^{ik \frac{u^2 + v^2}{2f}}}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy " U_l(x, y) P(x, y) e^{ik \frac{xu + yv}{f}} " \quad (12)$$

Desconsiderando o tamanho da lente, isto é,  $P(x, y) = 1$  para todo o espaço, temos que:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{ik \frac{u^2 + v^2}{2f}}}{i\lambda f} F_l(f_X, f_Y) \quad (13)$$

em que substituindo o termo de  $F_l(f_X, f_Y)$  nos dá o resultado:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{ik(1-\frac{d}{f})\frac{u^2+v^2}{2f}}}{i\lambda f} F_0(f_x, f_y) \quad (14)$$

ou

$$U_f(u, v) = \frac{e^{ik(1-\frac{d}{f})\frac{u^2+v^2}{2f}}}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t(x, y) e^{ik\frac{xu+yv}{f}} \quad (15)$$

Assim a amplitude e a fase da luz nas coordenadas (u,v) são dadas pela amplitude e fase do espectro de entrada em função de (f<sub>x</sub>,f<sub>y</sub>). O termos gaussianos de u e v são chamados fatores de fase quadráticos, mas que se anulam para o caso especial

$$d = f$$

ou seja, quando slide é colocado no plano focal da lente, a curvatura de fase desaparece, dando como resultado a transformada de Fourier exata do slide.

$$U_f(u, v) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t(x, y) e^{ik\frac{xu+yv}{f}} \quad (16)$$

Quando consideramos a extensão finita da lente utilizamos uma aproximação de óptica geométrica, tal que d é pequeno o suficiente para que a profundidade de entrada esteja dentro da região de difração de Fresnel da abertura da lente. Esta condição é satisfeita para a maioria dos problemas de interesse. Essa limitação da extensão de abertura da lente é conhecida como efeito de Vignetting, que é minimizado quando a abertura da lente é muito maior que a área do slide. Quando a transformada de Fourier do slide está em primeiro objetivo, é preferível colocar o slide diretamente contra a lente em vista de minimizar o

vignetting; já quando queremos analisar é preferível colocar o slide sobre o plano focal, onde a relação de transformação perde o fator de fase quadrático.

### Comentários

(\*\*) Aproximação de Fresnel ou paraxial: Aproximação do princípio de Huygens-Fresnel gera uma função de transmissão do espectro angular  $H(f_x, f_y)$ , que pode ser aproximada para pequenos ângulos (aproximação de Fresnel ou paraxial).

(\*\*\*) Fórmula de difração de Fresnel: Forma geral da aproximação do princípio de Huygens-Fresnel.

### Experimento

Como foi proposto utilizaremos uma caneta laser para obter um feixe de luz divergente, sua fonte foi montada em duas versões: com pilhas e a outra com uma fonte de tensão alimentada pela rede. Estes cuidados serão tomados para evitar dois problemas, que tentarei resolver:

1. a pouca durabilidade das pilhas originais;
2. Um dispositivo que mantenha o laser sempre acionado.

Para tentar solucionar o primeiro problema que é substituir as baterias originais, que são semelhantes às de relógio, que vêm junto à caneta e que acabam muito rápido (como já mencionado); estas foram substituídas por pilhas pequenas AA, onde constatou-se que a resistência interna destas não influencia na corrente de funcionamento do laser.<sup>(1)</sup> A corrente medida no laser, neste caso, foi medida ficando em torno dos 46,6mA.

O porta pilha utilizado (soquete) foi armazenado dentro de uma caixa (figura 3) e está ligado a uma chave.



Figura 3: Caixa com o porta pilha

Outra possibilidade para alimentação do laser é utilizar uma fonte que será alimentada pela rede; portanto utilizamos o seguinte circuito:

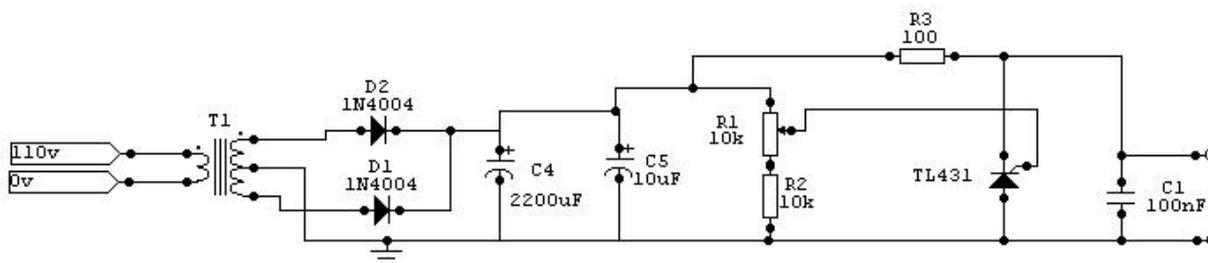


Figura 4: Circuito da Fonte de Tensão

Nota-se portanto que utilizamos um transformador que nos fornece 6V e baixa corrente, e após retificado colocamos um regulador de tensão – TL431, esse regulador nos fornece uma corrente máxima de 200mA que é mais que suficiente para alimentar a caneta; ele fornece também após regulado uma tensão de 4.5V que é o valor utilizado na alimentação do laser e para este caso a corrente medida foi de 41mA.

O circuito também está armazenado dentro da caixa (figura 5), ele está ligado à chave que possibilita a escolha da opção desejada.

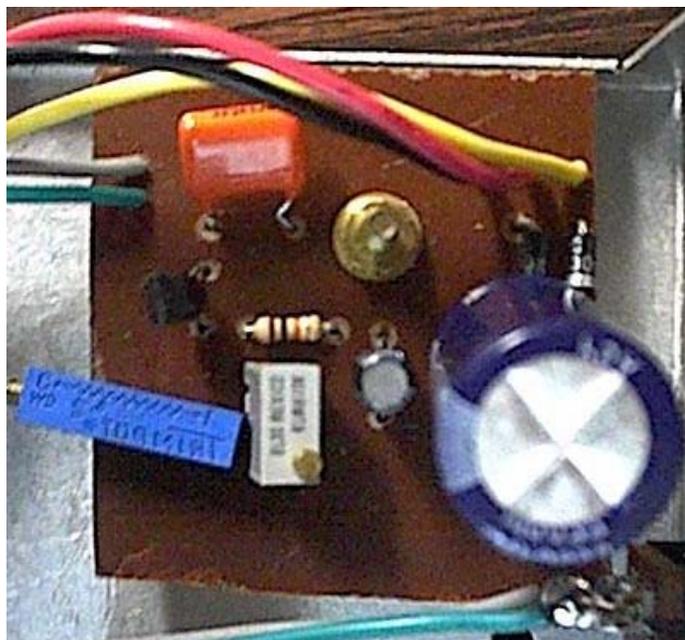


Figura 5: Circuito utilizado

Para desmontar a caneta foi utilizadas uma chave de fenda e uma faca de ponta bem fina. Os seguintes passos forma seguidos:

- abrir o laser chaveiro e retirar as pilhas originais;
- retirar a lente para assim obter o feixe divergente que será utilizado;
- com duas garras tipo jacaré ligar o laser à chave.

Não se deve esquecer que as garras devem ser colocadas na polarização correta, ou seja, o latão é o pólo positivo (está ligado ao fio vermelho) e a mola interna ligada ao laser é o pólo negativo, caso seja invertido a polarização o laser não funcionará. Se isto ocorre não se apavore, pois o laser não queimará, ele apenas irá funcionar como um diodo ligado inversamente. Temos, portanto a garra de jacaré preta ligada ao fio que substituiu a mola interna do laser e o jacaré vermelho ligada no corpo do laser (carcaça – figura 6).

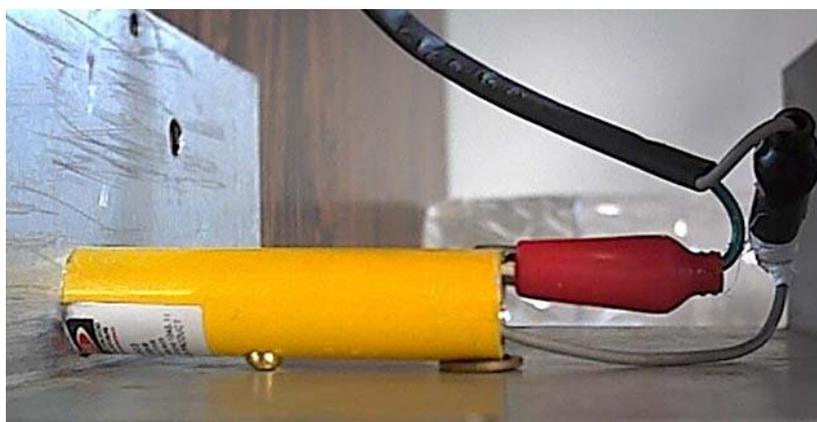


Figura 6: Jacarés ligados ao laser

Para solucionar o outro problema, manter o laser ligado ininterruptamente, colocamos a caneta no tecto da caixa (figura 6), ou seja, grudamos a carcaça no teto com um parafuso.

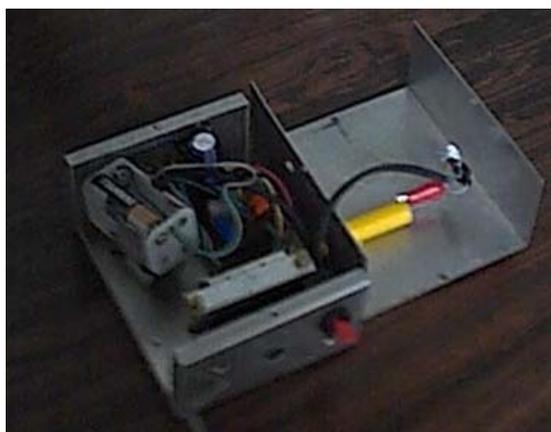


Figura 7: Caixa aberta



Figura 8: Caixa fechada

### Montagem Experimental

O experimento consiste em um sistema óptico simples, baseado no uso de uma caneta laser (pointer), uma objetiva de máquina fotográfica (figura 9) utilizadas para realizar a transformação de Fourier óptica, a focalização final do feixe na tela permite obter nela o plano espectral, ou de Fourier.

Além da montagem da figura 9 utilizamos mais duas três montagens experimentais diferentes para a visualização melhor dos padrões de difração, são elas:

1. a montagem da figura 9, que possibilita ver diferentes padrões: fendas, hexagonal e quadrada;

2. a montagem da figura 10, que no lugar de uma objetiva de máquina fotográfica, foi utilizado uma objetiva do laboratório, para melhor nitidez dos padrões, como também o aumento do caminho óptico com dois espelhos para ampliar a imagem no anteparo,

3. a montagem da figura 11, que utilizamos o laser do laboratório de ensino de óptica, que possibilitará a visualização dos padrões de difração vistos com a técnica de LEED e poderemos assim comparar com os da teoria. A utilização deste laser é imprescindível, pois sua potencia é muito superior ao do laser da caneta pointer e permite visualização melhor.

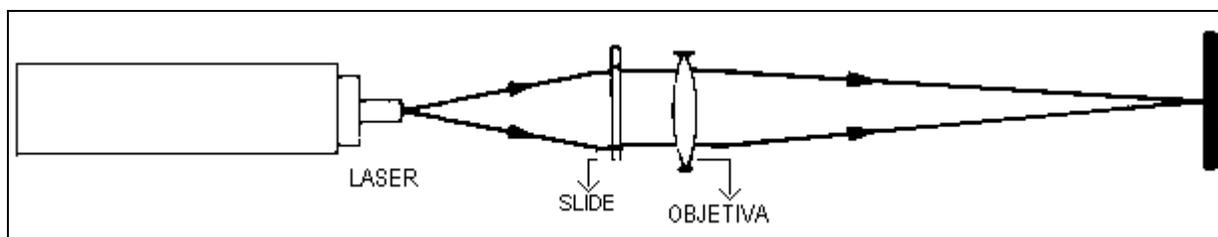


FIGURA 9

Montagem feita da figura 9.

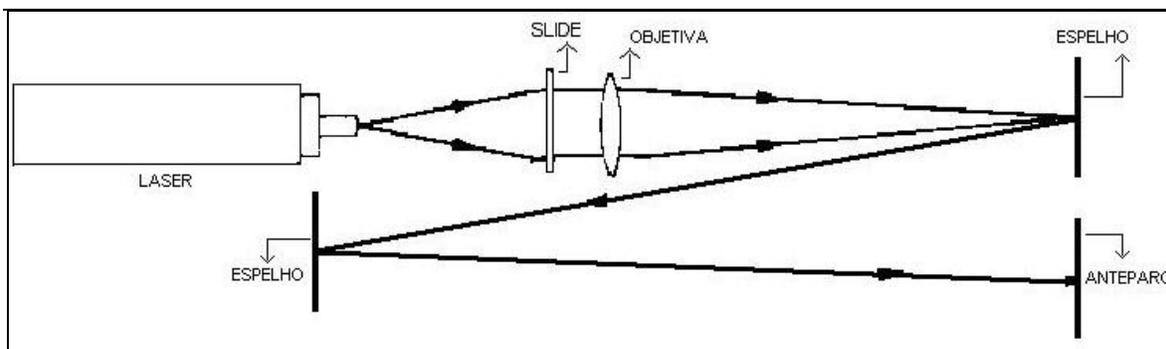


Figura 10

Montagem feita da figura 10

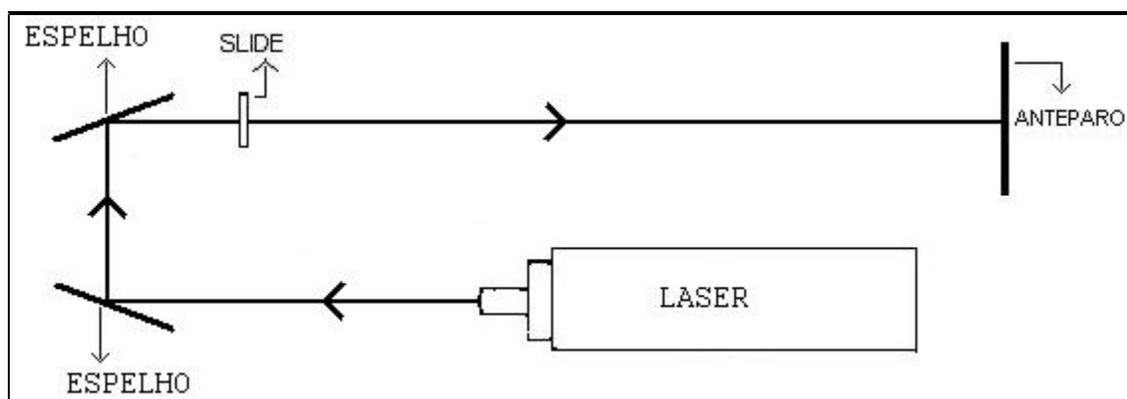


Figura 11

Deve-se lembrar que tanto na montagem da figura 9 como na figura 10 o laser deve estar perfeitamente alinhado com o centro da objetiva para que não ocorra aberração da luz.

### **Conclusão**

Podemos concluir que a proposta inicial de utilizarmos uma caneta pointer para mostrarmos os padrões de difração foi bem sucedida, a simplificação da montagem experimental permite levar o experimento para sala de aula no Ensino Médio e mostrar um pouco da Física Moderna aos alunos que não vêm esta parte, e/ou em cursos de aperfeiçoamento para professores de Física, incentivando-os a introduzir a óptica ondulatória e envolver pelo menos uma vez os alunos com este tipo de projeto.

### **Bibliografia**

- 1- Goodman, J.W., “Introduction to Fourier Optics”, McGraw – Hill Book Company, Cap.5.
- 2- Horowitz, P., The art of electronics, 2<sup>nd</sup> Edition, 1989.
- 3- Catelli, F., Vicenzi, S., Laboratório caseiro: transformando um laser de diodo para experimentos de óptica física – Caderno Bras. De Ensino de Física, v.19, n.3: p.393-406, dez.2002.
- 4- [http://geocities.com/prof\\_lunazzi/f641/f641.htm](http://geocities.com/prof_lunazzi/f641/f641.htm).
- 5- <http://www.ifi.unicamp.br/~accosta/nota6.html>