



# Universidade Estadual de Campinas

## Instituto de Física Gleb Wataghin

Instrumentação para Ensino – F 809

### Paradoxo Experimental em um Circuito com Corrente Alternada



**Aluno:** Vitor Bianchin Pelegati – RA 010059

**Orientador:** Orlando Luis Goulart Peres

**Professor Responsável:** José J. Lunazzi

# Conteúdo

1	Introdução.....	3
2	Descrição do Experimento.....	3
3	Fundamentos Teóricos	
3.1	Força Eletromotriz Induzida.....	4
3.2	A Lei de Faraday.....	5
3.3	O Rotacional do Campo Magnético.....	5
3.4	O Campo Magnético Gerado por um Solenóide Longo.....	6
4	Resolução do Paradoxo	
4.1	Propriedades dos Campos Elétricos Presentes dentro e fora..... do Solenóide	7
4.2	A Medição do Voltímetro.....	8
5	Confirmação Experimental	
5.1	Montagem.....	10
5.2	Dificuldades.....	11
6	Resultados.....	12
7	Conclusão.....	14
8	Agradecimentos.....	15
9	Referências.....	15

# 1 Introdução

Dentre todos os fenômenos físicos, aqueles associados com a lei de Faraday estão entre os mais fascinantes e interessantes.

A lei de Indução de Faraday possui utilidade nas mais variadas áreas, de transformadores a guitarras elétricas muitos aparelhos eletrônicos utilizam componentes que foram criados com seus fundamentos.

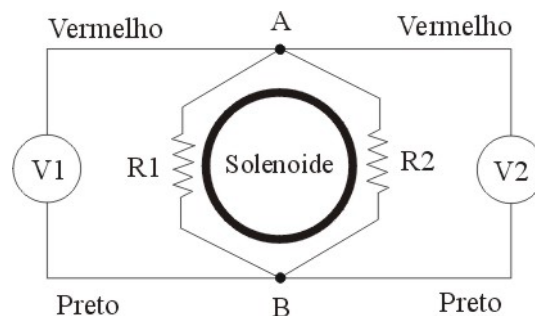
Quando aplicamos os fundamentos da indução de Faraday de uma forma não convencional, como neste experimento, veremos que podemos criar um paradoxo muito interessante e com uma explicação que passa longe do trivial e faz uso de conceitos tão teóricos que dificilmente seriam usados na prática.

Sempre que medimos a tensão entre dois pontos de um circuito nunca pensamos na possibilidade de que se medíssemos do outro lado obteríamos um valor diferente. Isso porque em um circuito com baterias, resistores, capacitores, transistores e etc, estamos sempre trabalhando com um campo elétrico (dentro do condutor) conservativo e sendo assim a diferença de potencial entre dois pontos será sempre a mesma, sem importar de onde (por qual caminho) medimos.

Nesse experimento veremos como é possível termos medições diferentes para dois voltmíetros efetuando medições nos mesmos pontos.

## 2 Descrição do Experimento

Vamos considerar o circuito da fig.1, onde os dois voltmíetros estão ligados com seus dois terminais (vermelho (+) e preto (-)) nos mesmos pontos.



**Figura 1.** Circuito com 2 resistores e um solenóide interno

Esse circuito é composto por dois resistores com seus dois terminais ligados. No meio deles está um solenóide longo cujo eixo está perpendicular ao plano do papel. A primeira coisa que pensamos é que se os dois voltmíetros estão ligados nos mesmos pontos os valores de V1 e V2 devem ser iguais. Nesse projeto será demonstrado na prática e na teoria

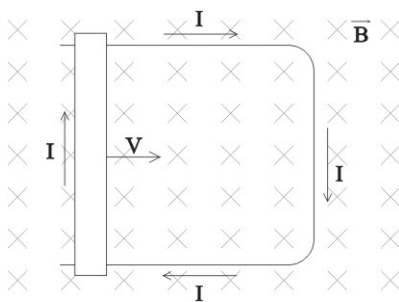
que  $V_1$  é diferente de  $V_2$ , mesmo sendo  $R_1=R_2$ . Esse resultado, que não é intuitivo, possui um grande valor didático ao ilustrar muitas propriedades importantes de campos vetoriais elétricos e magnéticos.

Para melhorar as medições e aumentar os valores de  $V_1$  e  $V_2$ , também utilizaremos um núcleo de ferro que aumentará o campo magnético dentro do solenóide.

### 3 Fundamentos Teóricos

#### 3.1 Força Eletromotriz Induzida

Considerando uma barra condutora que se move em um campo magnético constante sobre um condutor estacionário em forma de “U” como na Fig. 2. Vemos que não existe força magnética atuando sobre o condutor estacionário, mas sobre as cargas livres do condutor em movimento age uma força magnética que gera um campo eletrostático entre os extremos desse condutor. Como os extremos do condutor estão conectados pelo condutor estacionário, é gerado uma corrente com sentido horário.



**Figura 2:** Esquema de dois condutores em um campo magnético

Com essa corrente o excesso de cargas nas pontas do condutor em movimento é reduzido, o campo eletrostático também se reduz e as forças magnéticas aumentam o campo eletrostático no condutor. Ou seja, enquanto o condutor se manter em movimento haverá uma corrente no circuito em sentido horário.

O cálculo integral da força de Lorentz por unidade de carga é chamado de força eletromotriz, ou fem.

$$\varepsilon = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} \tag{1}$$

### 3.2 A Lei de Faraday

A fem induzida no circuito da fig.1 pode ser considerada de um outro ponto de vista. Enquanto o condutor se move para a direita uma distância  $ds$ , a área do circuito diminui de  $dA = lds$  e a mudança no fluxo pelo circuito é  $d\Phi = -BdA = -Blds$ . Dividindo os dois lados por  $dt$ , temos:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{ds}{dt} = Blv \quad (2)$$

Essa é a força eletromotriz, convenientemente expressa por:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3)$$

Eq. (3) fornece uma relação muito significativa e é aplicada a um circuito com um fluxo magnético variante.

Sendo o fluxo igual a:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (4)$$

Obtemos com (3) e (4):

$$\varepsilon = -\int \frac{d\vec{B} \cdot d\vec{a}}{dt} \quad (5)$$

A relação expressa pela eq. (5) é conhecida como a lei de Faraday.

### 3.3 O Rotacional do Campo Magnético

Aplicando o rotacional na equação para um campo magnético utilizando a lei de Bio-Savart

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J}_x \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau' \quad (6)$$

Pela regra do produto temos:

$$\nabla \times \left( \mathbf{J}_x \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (7)$$

O segundo termo do lado direito da eq.(14) some e o primeiro é igual a:

$$\mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \mathbf{J} 4\pi \delta_{(r)} \quad (8)$$

Assim temos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(r')} \mathbf{J} 4\pi \delta_{(r-r')} d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}_{(r)} \quad (9i)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{(r)} \quad (9ii)$$

A eq. (9ii) é chamada de Lei de Ampère (na forma diferencial), ela pode ser convertida em sua forma integral aplicando-se o teorema de Stokes.

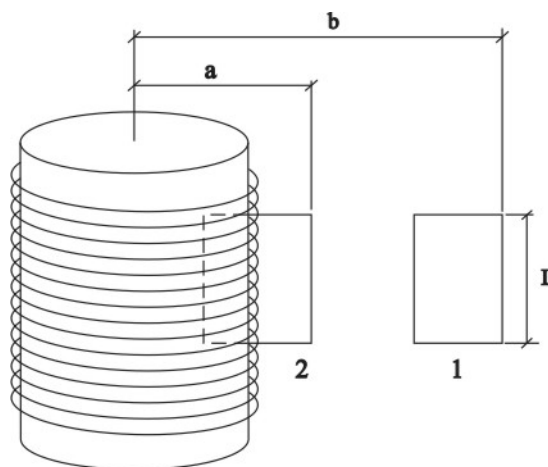
$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (10)$$

Agora  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  é a corrente total passando por uma superfície, temos então:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (11)$$

### 3.4 Campo Magnético Gerado por um Solenóide longo

Consideraremos um solenóide longo com  $n$  voltas por metro, sendo que essas voltas estão uma próxima a outra, em um cilindro de raio  $R$ , como na fig.3.



**Figura 3:** Solenóide longo, com caminhos 1, externo e 2, interno

Primeiro temos que saber qual a direção de  $\mathbf{B}$ . Supondo uma componente radial  $B_s$  positiva, se invertermos a corrente no solenóide então  $B_s$  será negativo. Mas inverter a corrente é equivalente a virar o solenóide de cabeça para baixo e isso não deveria alterar o campo radial, assim  $B_s=0$ . Para um componente radial teríamos um caminho amperiano onde  $I_{enc}=0$  e  $B\phi=0$ . Temos então que o campo gerado por um solenóide é paralelo ao eixo. Pela regra da mão direita sabemos que o campo será para cima dentro do solenóide, e para baixo fora dele.

Agora aplicaremos a lei de Ampère em dois caminhos retangulares como na fig.. O caminho 1 esta totalmente fora do solenóide com lados a distâncias  $a$  e  $b$  do eixo.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B_{(a)} - B_{(b)}]L = \mu_0 I_{enc} = 0 \quad (12)$$

Então:

$$B_{(a)} = B_{(b)} \quad (13)$$

Evidentemente o campo fora não depende da distância mas sabemos que vai a zero para uma distância muito grande. Chegamos a conclusão que o campo é zero em qualquer lugar fora do solenóide.

Para o caminho 2, que esta metade dentro e metade fora do solenóide, temos:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 nIL \quad (14)$$

Onde  $B$  é o campo dentro do solenóide. Conclusão:  $\mathbf{B} = \mu_0 nIL\hat{\mathbf{z}}$  dentro do solenóide e 0 fora dele.

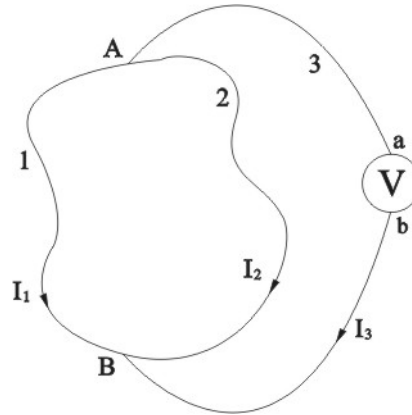
## 4 Resolução do Paradoxo

### 4.1 Propriedades dos Campos Elétricos Presentes dentro e fora do Solenóide

Se dividirmos o espaço relacionado ao experimento em dois, sendo uma região interna ao solenóide e outra região externa ao solenóide. Para tudo que esta fora do solenóide temos que o campo magnético é zero, exceto pelo campo produzido pelo circuito de resistores (que por se tratar de um campo muito fraco iremos desconsiderar), temos que o rotacional de  $\mathbf{E}=0$ .

Agora, sabendo que o rotacional de  $\mathbf{E}$  na região externa ao solenóide é zero não podemos dizer que o campo  $\mathbf{E}$  é conservativo nessa região, ou que a integral de linha entre dois pontos nessa região é independente do caminho. Isso não é verdade pois mesmo o rotacional de  $\mathbf{E}=0$ , essa não é uma região simplesmente conexa e portanto a integral de linha de  $\mathbf{E}$  não é independente do caminho. Podemos então concluir que a fem gerada pelos

caminhos 2 e 3 da fig.4 são iguais uma vez que não possui campo interno a esses dois caminhos.



**Figura 4:** Circuito com caminhos 1,2 e 3. Entre 1 e 2  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$

## 4.2 A Medição do Voltímetro

Quando pensamos na medição feita pelos voltímetros ou pelo osciloscópio temos em mente o termo voltagem para descrever a medição feita por esses dois aparelhos. Dizer que foi medida uma voltagem pode ser um equívoco. Sabemos que o voltímetro mede algo relacionado aos pontos A e B, mas o que ele está medindo, em termos físicos, não está claro.

Essa dificuldade deve-se ao fato de estarmos lidando com um campo não conservativo, cujo efeito nos portadores de carga é indistinguível do campo conservativo.

Considerando um circuito como da fig.4 temos três caminhos e três correntes, sendo um deles devido ao aparelho de medição. Temos a lei de ohm para um pequeno segmento desse caminho  $dl$  será dada por:

$$I_1 dR = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \vec{E}' \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

Onde  $dR$  é a resistência do segmento e  $E_1$  e  $E'$  são as componentes eletrostáticas e eletromotivas do campo total (A variação da resistência e a forma de cada segmento é arbitrária). Integrando a eq. (6) por todo comprimento do segmento obtemos:

$$I_1 \int_A^B dR = I_1 R_1 = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l} = V_{AB} + \mathcal{E}_{AB} \quad (16)$$

Onde  $R_1$  é a resistência no segmento 1, e  $V_{ab} = V_a - V_b$ .

Este resultado mostra implicações elementares. Primeiro, notamos que na presença de um campo eletromotriz, o queda  $IR$  através da resistência não é igual a diferença de potencial eletrostático, mas a integral de linha do campo elétrico total. Segundo, notamos que mesmo que  $I_1$  ou  $R_1$  forem zero, o campo elétrico total tem que ser zero em todos os pontos do



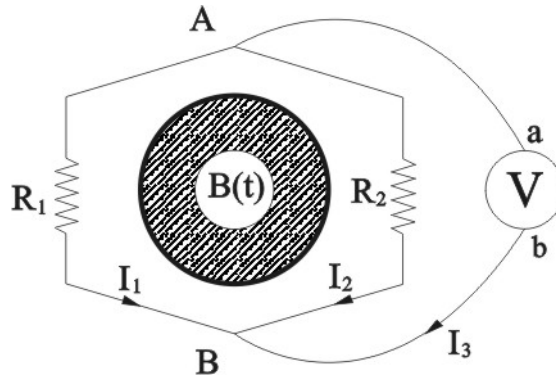
caminho. Se um campo eletromotriz,  $E'$ , esta presente, cargas superficiais se arrumarão de tal forma que o campo eletrostático produzido será igual e oposto a  $E'$  em todas as partes do condutor. Dessa forma pode-se ter uma diferença de potencial eletrostático entre as extremidades do condutor, mesmo sendo nulo o campo dentro do condutor. Isso também se aplica a um condutor sobre a ação de uma força magnética gerada por um campo magnético, não teremos corrente mas existirá uma diferença de potencial entre as extremidades do condutor.

Sendo assim o que é fisicamente significativo é o campo total e a integral de linha desse campo e não o campo eletrostático e a diferença de potencial.

Considerando o voltímetro, como mostrado na fig.4, tendo uma resistência interna igual a  $R_3$ , a leitura do voltímetro  $M$ , será proporcional a corrente,  $I_3$ , através dele. Se o voltímetro está ligado aos pontos A e B cuja resistência é muito menor que  $R_3$ , pela equação (16), temos.

$$M = I_3 R_3 = \int_a^b E \cdot dl = \int_A^B E \cdot dl = V_{AB} + \epsilon_{AB} \quad (17)$$

A medição aferida pelo voltímetro é igual a integral de linha do campo elétrico total e se reduz a diferença de potencial na ausência de campo eletromotriz.



**Figura 5:** Esquema da montagem experimental

Resolveremos agora o problema da fig.5, temos as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  (resistência do voltímetro), e os valores correspondentes de  $\epsilon_{AB}$  serem  $\epsilon_1, \epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  cada um correspondendo a um caminho. Então  $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$  correspondendo a fem em sentido anti-horário no caminho formado pelos caminhos 1 e 2, e  $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_3$  correspondendo a fem em sentido anti-horário no caminhos formado pelos caminhos 1 e 3.

Usando a equação. (16), obtemos:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0 & I_2 R_2 &= \epsilon_2 + V_{AB} \\ I_1 R_1 &= \epsilon_1 + V_{AB} & I_3 R_3 &= \epsilon_3 + V_{AB} \end{aligned} \quad (18)$$

Resolvendo para  $V_{AB}$  temos:

$$V_{AB} = -\frac{R_2\varepsilon_1 + R_1\varepsilon_2 + (R_1R_2/R_3)\varepsilon_3}{R_1 + R_2 + (R_1R_2/R_3)} \quad (19)$$

Temos então a medição do voltímetro utilizando as equações (17) e (19)

$$M = \frac{R_1\varepsilon - (R_1 + R_2)\varepsilon'}{R_1 + R_2 + (R_1R_2/R_3)} \quad (20)$$

Como consideramos que o solenóide é longo não existe fluxo de campo fora dele,  $\varepsilon' = 0$  (voltímetro a esquerda) e  $\varepsilon' = \varepsilon_1$  (voltímetro a direita), se considerarmos  $R_3 \gg R_2$  e  $R_3 \gg R_1$ :

$$M = \frac{R_1\varepsilon}{R_1 + R_2} \quad (\text{voltímetro à esquerda})$$

$$M = -\frac{R_2\varepsilon}{R_1 + R_2} \quad (\text{voltímetro à direita}) \quad (21)$$

Podemos nos sentir tentados a chamar esta medição de “diferença de potencial”, essa identificação não é correta uma vez que a palavra potencial implica em um campo conservativo. Se considerarmos a palavra tensão como sendo “aquilo que o voltímetro mede” então serviria também como o termo “integral de linha do campo elétrico total”.

## 5 Confirmação Experimental

### 5.1 Montagem

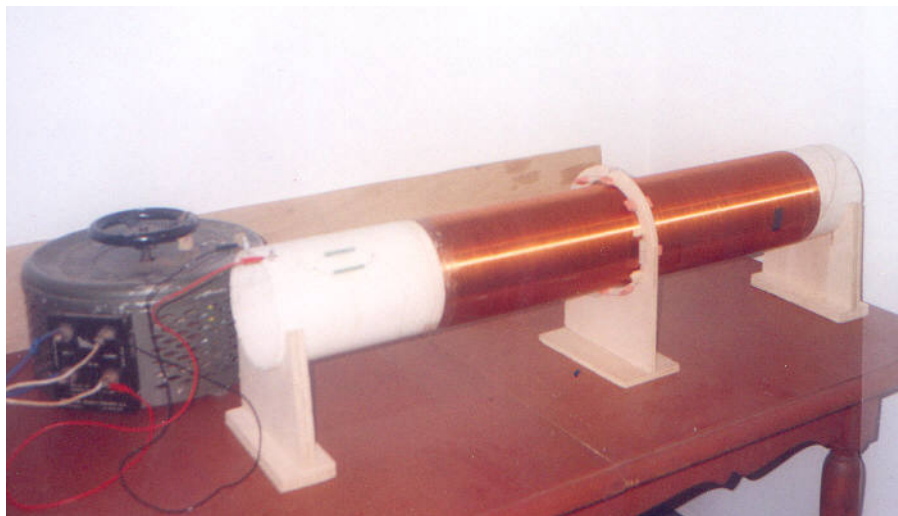
A principal parte do projeto é o solenóide, ele deve ter um comprimento que seja relativamente maior que o raio para que as medições estejam próximas dos valores calculados, onde foi considerado um solenóide longo, ou seja,  $L \gg R$ . Para a construção do solenóide foi utilizado um fio de cobre esmaltado com diâmetro de 0,4mm e um tubo de PVC com diâmetro de 150mm e 1 metro de comprimento. O fio de cobre esmaltado foi enrolado no PVC e constituiu um solenóide de 75mm de raio e 670mm de diâmetro com aproximadamente 1600 voltas e resistência interna devido ao comprimento do fio de  $100\Omega$ . Para a construção do circuito externo de resistores foi construída uma armação de madeira com apoios de borracha, o circuito foi feito com um resistor de  $1k\Omega$  e um de  $4,7k\Omega$  ligados por um fio encapado formando um círculo de 90mm de raio. É importante para os

resultados que os resistores fiquem o mais próximo possível do solenóide para que o campo externo ao solenóide (que não foi considerado nos cálculos) não interfira nas medidas.

Para monitoramento da corrente no solenóide dois resistores de  $10\Omega$  e  $10W$  foram colocados em paralelo, um com o outro, e em série com o solenóide. A tensão no solenóide foi gerada por um variac (varivolt) ligado a rede de tensão de  $220V$  e  $60Hz$ .

Com relação ao núcleo foi utilizado um tubo de PVC de  $130mm$  de diâmetro e  $1m$  de comprimento que foi preenchido com sucata de ferro e aço.

Na fig. Temos uma foto do experimento montado.



**Figura 6:** Foto do experimento montado

## 5.2 Dificuldades

No início do projeto não tinha a intenção de construir uma bobina e sim utilizar alguma bobina pronta. Tentei sem sucesso a utilização de duas bobinas que são usadas para o ensino do funcionamento de transformadores e de auto indutância. Segundo os cálculos, as bobinas mesmo sendo pequenas seriam suficientes para realizar a medição pois utilizaria um gerador de frequência (como sabemos, a fem gerada no circuito de resistores é proporcional a frequência do campo magnético) e um núcleo de ferro, que chega a aumentar o campo magnético em 5000 vezes.

Durante as medições não consegui nada além de ruído. Não havia levado em consideração as correntes parasitas internas ao ferro. Assim o fator de aumento do campo não seria tão grande, e não saberia nem o valor exato que seria aumentado. O gerador de frequência também não estava disponibilizando uma corrente satisfatória, e para que pudesse ser utilizado deveria ter seu sinal de saída amplificado.

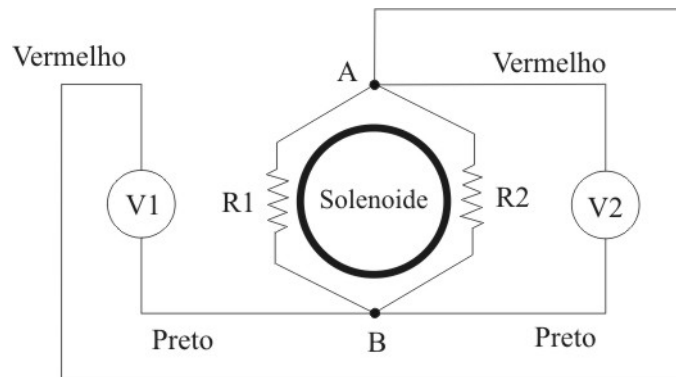
Depois de reprojeter o experimento e de estar com ele pronto como na fig. 6, consegui medições com multímetros muito satisfatórias mas quando utilizava o osciloscópio os ruídos eram muitos. Por se tratar de um sinal de amplitude baixa, como veremos a seguir é

da ordem de mV, a remoção de parte desses ruídos não foi uma tarefa muito simples e foi necessária a utilização de um osciloscópio com boa resolução.

## 6 Resultados

A medição deve ser feita como na fig.1.

Se usarmos uma montagem um pouco diferente como na figura abaixo teremos  $V1=V2$ .



**Figura 7:** Montagem experimental de forma incorreta

Para realizar as medições utilizamos uma tensão nos resistores de  $5V_{rms}$ , assim no circuito total temos uma corrente de  $I=I_0\text{sen}(2\pi ft)$  onde  $I_0=1,4A$

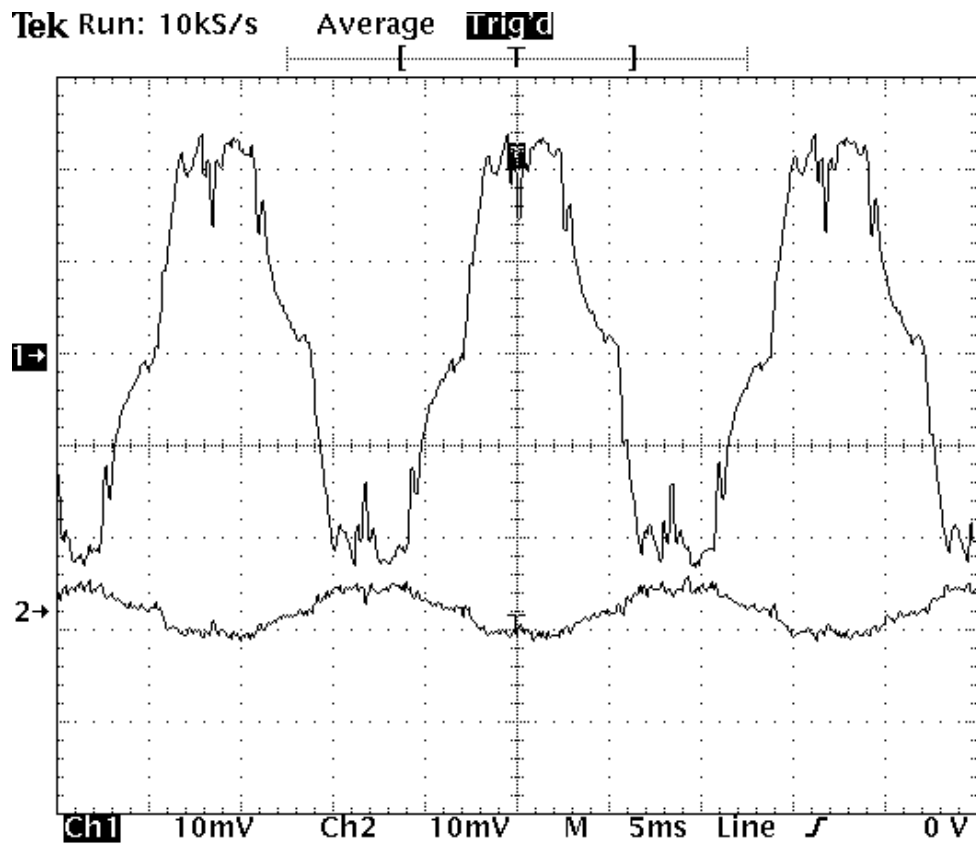
Para nossa bobina temos  $n=2388$  voltas/m, segundo a equação (14)  $B=4,2 \text{ sen}(2\pi ft)\text{mT}$ , o fluxo, dado pela equação (4) será  $\phi=74,2 \text{ sen}(2\pi ft) \mu\text{Tm}^2$ .

A fem induzida no circuito de resistores é dada pela equação (5):  $\epsilon=-28 \cos(2\pi ft)\text{mV}$  ou  $\epsilon=56\text{mV}_{pp}$  para valores de pico a pico. Esperamos então valores de  $46,2\text{mV}_{pp}$  e de  $9,8\text{mV}_{pp}$  medidos nos resistores de  $4,7k$  e  $1k$  respectivamente.

Utilizando um osciloscópio digital Tektronix TDS 3400A foi verificado que o sinal possuía muito ruído, para eliminação do excesso de ruído usou-se a média de 16 medidas feita pelo osciloscópio, essa média funciona como um filtro passa baixo. Foram medidos os valores de  $48,2\text{mV}_{pp}$  e  $9,2\text{mV}_{pp}$ , que estão bastante próximos do esperado.

Quando utilizado o núcleo de ferro foram medidos valores de  $234\text{mV}_{pp}$  e  $50\text{mV}_{pp}$  com a mesma corrente no solenóide e a alteração no sinal devido aos ruídos foram minimizadas.

Para mostrarmos a diferença de fase entre os dois sinais utilizamos os dois canais no osciloscópio, os dados registrados pelo osciloscópio são mostrados nas figuras abaixo. Mas como o terra dos dois canais do osciloscópio é o mesmo, os valores medidos foram um pouco diferentes dos valores para a medição individual, devido ao fato da montagem experimental começar a ficar um pouco diferente da fig.1.



17 Nov 2004  
10:35:20

Figura 8: Registro do osciloscópio sem o núcleo

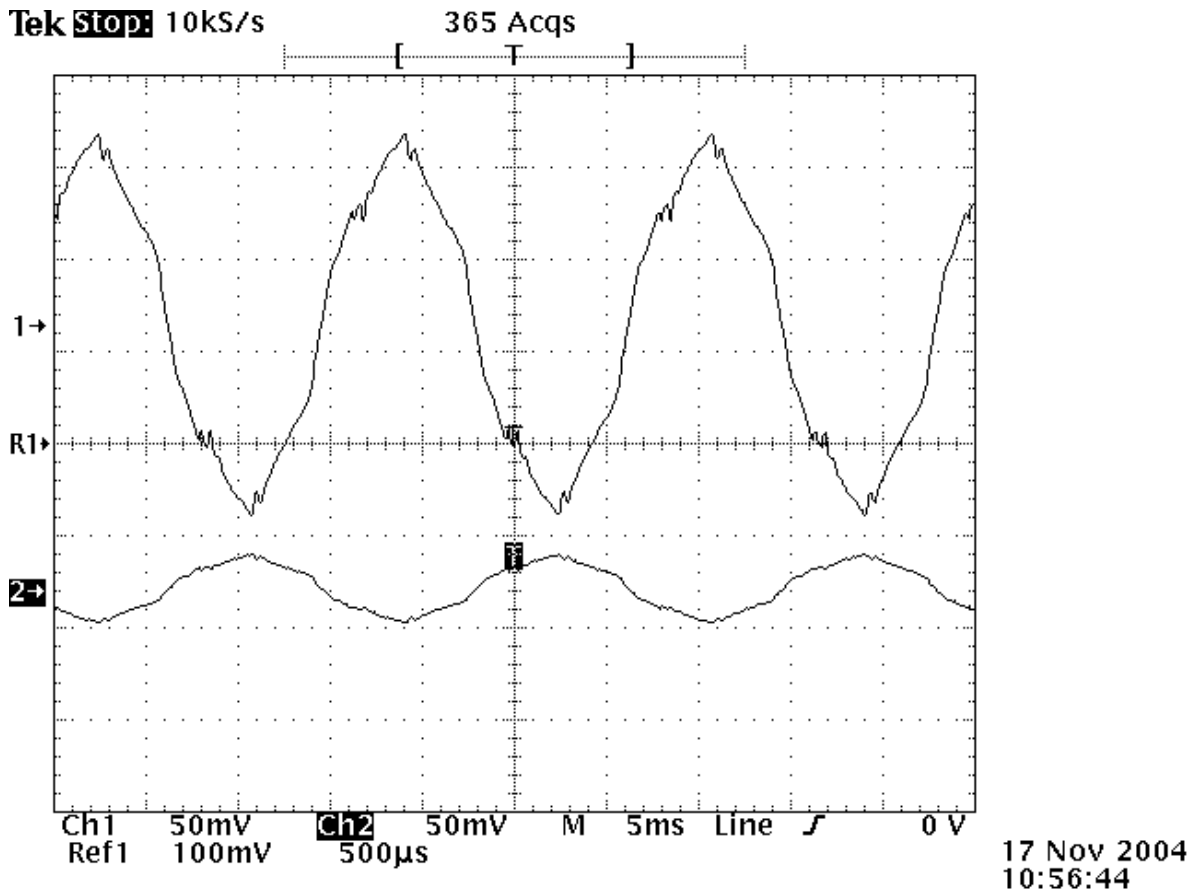


Figura 8: Registro do osciloscópio com o núcleo

## 7 Conclusão

Ao criarmos uma situação diferente de barras em movimento e discos em rotação para o estudo da fem, estudamos a fem gerada por um solenóide em um circuito que aparentemente possui uma resolução simples mas que envolve conceitos importantes.

Os valores encontrados nas medições, 48,2mVpp e 9,2mVpp, foram muito próximo do esperado, 46,2mVpp e 9,8mVpp, e apesar de os registros do osciloscópio apresentarem ruído a identificação de um sinal e de sua amplitude é clara.

Os objetivos de demonstrar e observar o fenômeno experimentalmente foram realizados com sucesso.

## 8 Agradecimentos

Ao meu orientador Orlando L. G. Peres pelo grande apoio e dedicação, ao chefe do grupo de leptons, DRCC, Anderson Fauth pelo empréstimo do solenóide, ao técnico do laboratório de leptons, Jair Adolfo Botasso. Ao Professor Afonso de O. Alonso do DECOM da FEEC e ao aluno de mestrado da FEEC Rafael Ferrari.

## 9 Referências

- [1] W.Klein, Am. J. Phys. 49(6), Jun. 1981, págs. 603-604.
- [2] Robert H. Romer, Am. J. Phys. 50(12), Dez. 1982, págs 1089-1093.
- [3] David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, págs 202-320.
- [4] D. R. Moorcroft, Am. J.Phys. 37,221 (1969; e 38, 376 (1970).