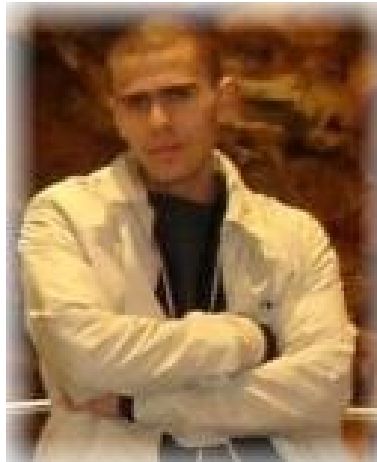


F 809 – Instrumentação para o Ensino  
28/11/2005  
**RELATÓRIO FINAL**

# Medindo a Aceleração da Gravidade Terrestre Através de Um Pêndulo

Aluno: Rafael Rosa Ribeiro da Silva  
Orientador: Engenheiro Pedro Raggio



## RESUMO

Neste Relatório, descrevemos as atividades feitas ao longo da realização do projeto e os resultados obtidos. O principal deles consiste na confecção de um guia de estudos sobre pêndulos para estudantes do Ensino Médio, contendo a teoria dos pêndulos e três experimentos para familiarização com este sistema físico e medição da aceleração da gravidade terrestre a partir do seu comportamento.

## 1 – Introdução

A proposta desse projeto é planejar experiências e redigir um guia que permitam, ao aluno de Ensino Médio (EM) se familiarizar com o comportamento repetitivo dos pêndulos e, a partir disto, estimar o valor da aceleração da gravidade terrestre ( $g$ )<sup>1</sup>. A fim de despertar o interesse do aluno no estudo do período do pêndulo, neste guia foi incluído um texto sobre a influência dos relógios de pêndulo na nossa cultura<sup>2</sup>.

Com o objetivo de evitar ao máximo que o aluno fosse obrigado a aceitar fórmulas sem demonstração, foi redigido também um texto de introdução ao cálculo diferencial, com a finalidade de fornecer a base teórica necessária para compreender a dedução da lei que rege o período do pêndulo<sup>3</sup>. Depois, verificou-se que essa introdução era desnecessária.

Foi construído um aparato experimental e, com base nos dados colhidos a partir dele, foi feito o planejamento dos experimentos do guia. Este aparato tem a vantagem técnica de que o ponto fixo do pêndulo, em torno do qual todo o sistema se move, é determinado com precisão maior do que em montagens como as utilizadas na disciplina Física Experimental II (código F 229), oferecida pelo IFGW aos alunos do 2º semestre dos cursos de Física, Matemática e Engenharia; assim, foi notada a possibilidade de melhorar a precisão das medidas realizadas com pêndulos nessa disciplina (a discussão com relação a este ponto está no item 3c-iii).

O roteiro proposto pelo guia é:

- começar com um experimento simples para determinar quais variáveis têm maior influência sobre o período do pêndulo
- realizar um segundo experimento, um pouco mais complexo, para determinar o comportamento aproximado do pêndulo
- tomar conhecimento da dedução teórica da lei do período do pêndulo, para compreender e sedimentar o que, até então, só havia sido aprendido empiricamente e corrigir eventuais erros de percepção
- por fim, se utilizar do conhecimento aprendido para uma finalidade “prática”: a partir do comportamento periódico do pêndulo, chegar a uma estimativa experimental para o valor de  $g$ , relacionando assim o conhecimento recém-adquirido a outro (provavelmente) já adquirido pelo aluno

Assim, espera-se que, seguindo o guia, o aluno de EM percorra todo o processo da descoberta científica, desde as primeiras hipóteses sobre um fenômeno desconhecido até o confronto das descobertas sobre ele com informações já conhecidas.

---

<sup>1</sup> O guia redigido, com a descrição dos experimentos planejados, é o Anexo 1 deste relatório.

<sup>2</sup> Este texto foi extraído de um site na Internet, reproduzido no Anexo 2.

<sup>3</sup> Este texto é o Anexo 3.

## 2 – Teoria

## a) do pêndulo simples ao movimento circular uniforme (nível básico)

Um pêndulo simples consiste numa massa pontual  $m$  presa numa extremidade uma haste reta, de comprimento  $L$ , inextensível e sem massa, cuja outra extremidade está presa num ponto fixo. Se ele estiver submetido a um campo gravitacional cuja aceleração correspondente é  $g$  e deslocado de um ângulo  $\theta$  da “vertical” (a direção para onde o campo puxa os corpos), é possível mostrar (através de argumentos físicos e geométricos) que a força resultante sobre ele age sempre no sentido de fazer o pêndulo retornar à posição  $\theta=0$  e, se  $\theta$  for suficientemente pequeno, tem módulo dado por

$$|\vec{F}_R| = |mg\theta|$$

Esse tipo de força – de módulo proporcional ao deslocamento em relação a uma posição de equilíbrio e contrária a este deslocamento – é típico de um movimento conhecido como “Movimento Harmônico Simples” (MHS); a principal característica desse movimento é que ele é periódico. Uma comparação com o Movimento Circular Uniforme (MCU) é capaz de fornecer o período do MHS; no caso do pêndulo com ângulos pequenos, ele é dado pela expressão

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Assim, conhecendo  $L$  e medindo  $T$ , é possível estimar  $g$ .<sup>4</sup>

## b) taxas de variação e MHS (nível avançado)

A base matemática da comparação com o MCU reside no fato de que este é uma combinação de dois MHS, um na direção horizontal e outro na direção vertical<sup>5</sup>. Assim, se quisermos ser matematicamente rigorosos, precisamos resolver a equação do MHS.

Sabendo que a aceleração equivale à taxa de variação da velocidade, a equação do MHS é

$$m \frac{dv}{dt} = -ks$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade entre a força e o deslocamento em relação ao equilíbrio  $s$  e  $v$  é a taxa de variação de  $s$ .

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Um dos resultados dessa equação é que o MHS tem um período dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

De posse dessa fórmula, basta adapta-la à situação do pêndulo para se obter a expressão do período apresentada acima.<sup>6</sup>

<sup>4</sup> Para maiores detalhes do raciocínio apresentado até aqui, ver o Anexo 1, item C1.

<sup>5</sup> Assim como o lançamento de projéteis é a combinação de um MRU na horizontal e um MRUV na vertical.

<sup>6</sup> Para uma introdução aos conceitos implícitos e à notação da equação do MHS, bem como uma dedução da fórmula do período do MHS, ver o Anexo 3; para a adaptação ao pêndulo, ver o Anexo 1, itens C1b e C1e.

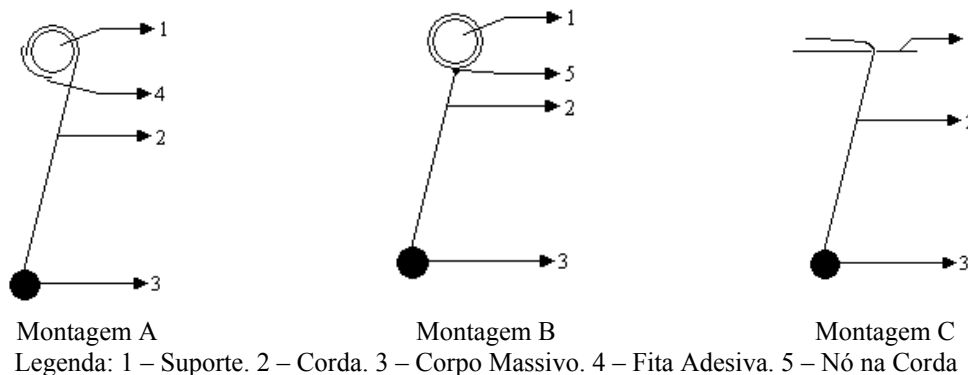
### 3 – Parte Experimental

#### a) descrição do aparato construído

O aparato consiste em três pesos de dimensões iguais e materiais diferentes, um fio e um suporte especial, responsável pela definição precisa do ponto de apoio do pêndulo.

##### i) o suporte

Na experiência sobre pêndulos da disciplina F 229, geralmente se usa montagens como A ou B:



O suporte usado no aparato possibilita o uso da montagem C, eliminando deslizamentos e minimizando deformações do fio; é assim que se define com precisão o ponto de apoio do pêndulo.

O suporte possui três peças principais: o orifício pelo qual passa o fio do pêndulo (v. figura 1), uma porca especial que fixa o fio (v. figura 2) e uma peça de ligação, que une as duas primeiras a uma haste (v. figura 3).

Estamos usando um projeto concebido pelo Engenheiro Pedro Raggio para aprimorar o experimento com pêndulos simples da disciplina F-229. O fio do pêndulo é guiado pelo orifício de diâmetro 0,7mm na parte inferior, que é considerado pontual para os propósitos do experimento. Desta forma, define-se o ponto de sustentação do pêndulo com precisão. Acima, o fio é fixado pela pressão contra dois discos de feltro, aparafusando-se a porca especial na peça de ligação (v. figura 4). Por fim, a haste é sustentada por uma base que permite regular a altura do ponto de sustentação do pêndulo (v. figuras 5 e 6).

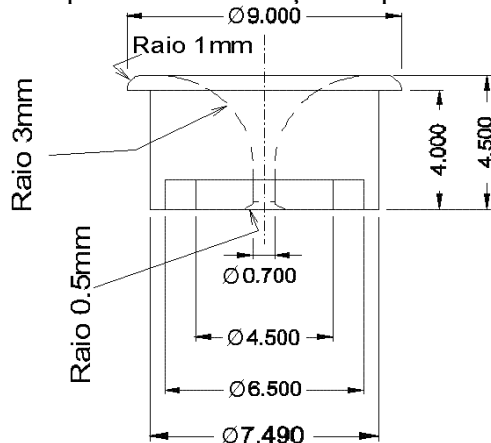


Figura 1 – Projeto do orifício. O fio desce pelo espaço entre as duas linhas tracejadas curvas e sai pela abertura central na parte inferior da peça. Todas as medidas estão especificadas em mm e os pontos fazem o

papel de vírgulas, de modo que, por exemplo, a altura total da peça é 4,5mm e o diâmetro da abertura inferior é 0,7mm.



Figura 2 – Porca especial de fixação do fio vista “de baixo”. Note-se o disco de feltro e o parafuso que estão presos a ela. O feltro serve para evitar que o fio do pêndulo seja danificado e o parafuso, para prender o fio, conforme mostrado na figura 3.



Figura 3 – Peça de ligação vista “de cima”. Nela está fixado o orifício (parte inferior esquerda da figura), parafusada a porca (vista “de cima” na parte superior direita) e conectada a haste (parte superior esquerda) através de dois parafusos (acima do orifício e ao lado da porca). Note-se um segundo disco de feltro (abaixo da porca) para evitar que o fio se danifique ao ser preso.



Figura 4 – Fio do pêndulo passando pelo orifício (parte direita da figura), pressionado pela porca (parte superior) e saindo próximo à haste (parte inferior esquerda).



Figura 5 – Suporte prendendo o fio do pêndulo e ligado ao regulador de altura (parte superior direita da figura) pela haste. A fixação da haste no regulador é feita pelo parafuso (atravessado por uma alavanca de ferro) mostrado no canto superior direito.



Figura 6 – O aparato experimental visto como um todo, com o pêndulo montado (canto direito da figura). A altura do suporte é regulada deslizando-se o regulador até o ponto desejado da base e, então, prendendo-o com o parafuso mostrado na parte superior esquerda (também atravessado por uma alavanca de ferro). O parafuso que prende a haste no regulador está no lado de trás, mas a alavanca de ferro que o atravessa pode ser vista um pouco abaixo do ponto onde a haste e o regulador se encontram.

ii) o fio

Estamos usando um fio de nylon, com diâmetro de 0,5mm. 2m desse fio têm uma massa de aproximadamente 0,5g, i.e., ele tem uma densidade linear de massa aproximada  $\mu = 0,25g / m$ .

### iii) os pesos

Os pesos usados são, basicamente, cilindros com diâmetro e altura de 20mm; este formato foi escolhido por facilitar tanto o cálculo do centro de massa quanto a confecção das peças. A fim de suspendê-los, os pesos têm um furo de 1mm de diâmetro (que liga o centro de uma base ao da outra) para permitir a passagem do fio, que prende o peso com um nó (v. figura 7). A fim de evitar acidentes, as bordas dos cilindros foram arredondadas.

Foram feitas três peças de dimensões iguais em materiais diferentes: plástico, alumínio e latão (v. figura 8). As densidades diferentes desses materiais nos fornecem massas diferentes com o mesmo centro de massa, e permitem estudar o comportamento do pêndulo em função da massa. As massas dos pesos são: 6,0g para o plástico, 16,9g para o alumínio e 53,0g para o latão.



Figura 7 – Peso de latão suspenso pelo fio. O fio sai do suporte (parte superior da figura), atravessa o peso e o suspende por um nó feito abaixo do centro da base inferior do “cilindro” (que é a base mostrada nesta fotografia). Uma porção do fio depois do nó pode ser vista como uma linha clara no lado inferior direito da base da peça.



Figura 8 – Os três “cilindros” a serem usados no pêndulo, feitos de plástico, alumínio e latão. Todos eles possuem altura e diâmetro de 20mm.

### b) procedimento realizado

Construído o aparato, para cada peso foram coletadas 30 medidas do intervalo necessário para a realização de 10 oscilações completas para uma distância fixa de 1m entre o centro de massa do peso e o suporte (1,01m até o nó no fio) e 11 medidas para distâncias separadas de 10cm entre si no intervalo entre 1m e 2m de distância entre o centro de massa do peso e o suporte; em todas elas, foi tomado cuidado para não deslocar o peso mais de 1cm em relação à posição de equilíbrio.

A partir dessas medidas coletadas, foram feitas análises para se determinar os experimentos a serem propostos no guia para EM e a possível contribuição do suporte para a precisão da estimativa de  $g$  na disciplina F 229. Os resultados dessas análises são discutidos no item abaixo.

c) resultados encontrados (nível avançado)

i) medidas com comprimento fixo no EM

Das fórmulas de propagação de erro [1], o erro percentual na estimativa de  $g$  através de um pêndulo é

$$\Delta \bar{g}(\%) = \bar{g} \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{L}(\%)}{100}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta \bar{T}(\%)}{100}\right)^2}$$

onde  $\Delta \bar{L}(\%)$  é o erro percentual do período e  $\Delta \bar{T}(\%)$  é o erro percentual da distância do centro de massa ao apoio. Ocorre que o maior deles é sempre  $\Delta \bar{L}(\%)$ : o menor valor encontrado para ele foi 0,33% (latão), enquanto que o maior valor encontrado para  $\Delta \bar{T}(\%)$  foi 0,15% (plástico). Assim, não se pode deixar de levá-lo em conta no cálculo do erro padrão de  $g$ .

As medidas encontradas para  $g$  foram:

Material	$\bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta \bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta \bar{g}(\%)$
Plástico	9,73	0,22	2,30
Alumínio	9,75	0,08	0,866
Latão	9,80	0,04	0,369

Daí se conclui que, escolhendo apropriadamente o peso a ser usado no pêndulo, é possível obter um valor de  $g$  compatível com aquele assumido como correto (9,78m/s<sup>2</sup>) com uma precisão melhor que 0,5%. E, aqui, utilizou-se o erro padrão como parâmetro para a precisão da medida.

Porém, para se chegar a esse nível, é necessário lançar mão da propagação dos erros, e os alunos do EM, em geral, não possuem qualquer noção de estatística. Assim, para evitar que eles se perdessem em conceitos estatísticos, e sem abrir mão da idéia de erro experimental, foi decidido que o guia utilizaria o desvio padrão como parâmetro da precisão das medidas: para cada valor de  $10T$  medido, é calculado um valor de  $g$  correspondente (levando em conta a real localização do centro de massa) e, a partir desses valores, é calculada uma média e um desvio padrão, a ser considerado como a estimativa de  $g$ . Este método, aplicado às medidas colhidas, forneceu os seguintes resultados:

	Plástico	Alumínio	Latão
$\bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )	9,73	9,76	9,80
$\Delta g$ (m/s <sup>2</sup> )	0,165	0,123	0,120
$\Delta g(\%)$	1,69	1,26	1,22

Ou seja, o preço de uma introdução didática à teoria de erros é apenas uma pequena perda na precisão da estimativa, pois ainda é possível se obter um valor de  $g$  compatível com o usualmente aceito dentro de uma precisão melhor que 1,5%. Esta análise motivou a proposta do terceiro experimento apresentado no guia (ver o Anexo 1, item C2).

ii) medidas com comprimento variável no EM

Se as medidas com comprimento fixo são capazes de fornecer o valor de  $g$  com boa precisão (justamente por extraírem muita informação de um único ponto), as medidas com comprimento variável podem fornecer informações sobre o comportamento geral do

pêndulo. Isso permite testar a compatibilidade do seu comportamento com diversas leis matemáticas.

Para cada peso, as 11 medidas foram separadas em dois conjuntos: as 5 de menor L e todas as 11. Em cada um desses conjuntos foi aplicado o ajuste linear do método dos mínimos quadrados [2] para 4 expressões diferentes:

$$T = a \cdot L + b$$

$$\log(T/1s) = n \log(L/1m) + \log(a \cdot 1m^n / 1s)$$

$$\log(T/1s) = b \cdot L - \log(a/1s)$$

$$T = a \cdot \log(L/1m) - a \cdot \log(b \cdot 1m)$$

Os coeficientes encontrados para cada uma fornecem os parâmetros que melhor ajustam uma determinada expressão matemática ao conjunto de pontos com os quais o cálculo foi feito; no neste caso, trabalhou-se com 4 expressões:

$$T = a \cdot L + b$$

$$T = a \cdot L^n$$

$$T = a \cdot 10^{bL}$$

$$T = a \cdot \log(L/b)$$

Então, para cada uma delas, obteve-se o melhor ajuste a todos os pontos e o melhor ajuste à metade dos menores valores de L; aquelas expressões para as quais ambos os ajustes forem compatíveis são propostas de leis para o comportamento do pêndulo que o conjunto total destes dados não é capaz de excluir.

É claro que, nesta análise, não há o objetivo de se descobrir qual dessas leis rege o pêndulo. O propósito, aqui, é encontrar quais delas poderiam explicar os dados obtidos de maneira razoável; se esse conjunto de dados fosse toda a informação que alguém tivesse sobre o pêndulo, as que pudessem seriam todas hipóteses plausíveis para explicá-lo a essa pessoa. Ou seja, aqui, o interesse está na quantidade de informação que os dados trazem sobre o sistema físico do qual foram coletados; em quais das leis acima eles são capazes de rejeitar. E os resultados foram:

LEI	compatível?
linear	não
de potência	sim
exponencial	não
logarítmica	parcialmente

O “parcialmente” da lei logarítmica é porque, apenas para o peso de plástico, o conjunto de dados a aceitou<sup>7</sup>. Isso significa que, escolhendo um peso suficientemente massivo, não é difícil isolar, dentre essas 4 leis gerais, a de potência como a única possível. Assim, os dados com comprimento variável apresentam a possibilidade de descoberta empírica do comportamento do pêndulo.

Com base nessa conclusão, foi proposto o segundo experimento do guia (ver o Anexo 1, item B2): o isolamento da lei de potência será mais óbvio com a separação dos dados em dois intervalos distintos e bem separados de L (no caso da proposta feita no guia, entre 1,0m e 1,2m e entre 1,6m e 1,8m); e, novamente para evitar a complicação de noções estatísticas (no caso, tudo relacionado ao método dos mínimos quadrados), o aluno precisará apenas traçar as retas à mão.

<sup>7</sup> Provavelmente, isso reflete o fato de que, exceto pela lei de potência, a logarítmica é a que mais se aproxima do verdadeiro comportamento do pêndulo entre essas.



Para reforçar e sedimentar a aprendizagem por descoberta proposta no segundo experimento, o primeiro consiste em testar várias possíveis variáveis para descobrir quais delas são realmente relevantes na determinação do período do pêndulo (ver o Anexo 1, item B1) e, no guia, toda a dedução teórica da fórmula do período está entre o segundo e o terceiro experimentos (ver o Anexo 1, item C1).

iii) precisão na disciplina F 229

CONCLUSÃO: Observando a exposição a seguir, é notado que o suporte usado fornece uma correção de  $0,05\text{m/s}^2$  para o valor médio de  $g$ . Além disso, observa-se que é possível melhorar o método usado atualmente para a medição de  $g$ .

A comparação foi feita com 5 relatórios (todos a que se teve acesso) do experimento do pêndulo simples, 4 entre o 2º semestre de 2004 e o 1º semestre de 2005 e 1 sem data. Todos eles consideraram o comprimento  $l$  do fio como a distância  $L$  entre o centro de massa e o ponto fixo do pêndulo (ignorando, assim, uma das principais fontes de erro, conforme foi visto no item (i), acima) e usaram o método dos mínimos quadrados para estimar o coeficiente de proporcionalidade entre  $T^2$  e  $L$  (coeficiente  $a = (2\pi)^2 / g$ ) e, a partir dele, estimar  $g$ . Um resumo do que é apresentado nesses relatórios é dado na tabela abaixo

relatório nº	nº de pontos	$a$ ( $\text{s}^2/\text{m}$ )	$\Delta a$ ( $\text{s}^2/\text{m}$ )	$\bar{g}$ ( $\text{m/s}^2$ )	$\Delta \bar{g}$ ( $\text{m/s}^2$ )
1	10	4,195	0,083	9,41	0,19
2	5	4,07	0,17	9,69	0,4
3	7	3,98	0,016	9,87	0,04
4	3	4,10	0,01	9,63	0,23*
5	5	4,12	0,07	9,6	0,2

Para estimar a contribuição do suporte, é necessário analisar os dados colhidos com ele da mesma maneira. Feita a mesma análise para os conjuntos de 5 e 11 pontos de cada material (mencionados no item (ii), acima), os resultados encontrados foram:

		$a$ ( $\text{s}^2/\text{m}$ )	$\Delta a$ ( $\text{s}^2/\text{m}$ )	$\bar{g}$ ( $\text{m/s}^2$ )	$\Delta \bar{g}$ ( $\text{m/s}^2$ )
Plástico	5 pontos	4,05	0,0202	9,76	0,0486
	11 pontos	3,99	0,0158	9,88	0,0391
Alumínio	5 pontos	4,06	0,0148	9,73	0,0356
	11 pontos	4,05	0,0112	9,76	0,0270
Latão	5 pontos	4,04	0,0149	9,77	0,0359
	11 pontos	4,06	0,0129	9,73	0,0309

Comparando-os com os relatórios, é possível perceber que, em ambos, a média geralmente encontrada está ligeiramente abaixo do valor aceito para  $g$  ( $9,78\text{m/s}^2$ ), embora, nos relatórios, essa distância costume ser maior. Excluídas as análises com 10 ou 11 pontos, a média encontrada sem o suporte (nos relatórios) está em torno de  $9,70\text{m/s}^2$ , enquanto que o uso do suporte possibilita encontrar uma média em torno de  $9,75\text{m/s}^2$ ; isso significa que, com este método de análise, *a imprecisão na determinação do ponto de suspensão do pêndulo gera um erro sistemático que influencia o 3º algarismo significativo da estimativa de  $g$* . Mas esta não é a única conclusão importante extraída dessa comparação.

Dos 5 relatórios, 3 encontraram estimativas de  $g$  incompatíveis com o valor aceito. Se a eliminação do erro sistemático aproximou a média desse valor, também diminuiu as barras de erro encontradas, mantendo a mesma quantidade de resultados incompatíveis. Isso evidencia a necessidade de levar em conta o fato de que o pêndulo usado é um pêndulo

físico (e considerar o erro na determinação do centro de massa). Porém, ao se fazer isso, o resultado aparentemente piorou:

		$a$ (s <sup>2</sup> /m)	$\Delta a$ (s <sup>2</sup> /m)	$\bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta \bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )
Plástico	5 pontos	4,11	0,0395	9,60	0,0920
	11 pontos	4,10	0,0353	9,63	0,0829
Alumínio	5 pontos	4,06	0,0158	9,73	0,0378
	11 pontos	4,07	0,0135	9,70	0,0321
Latão	5 pontos	4,02	0,0173	9,82	0,0423
	11 pontos	4,05	0,0139	9,76	0,0335

Eliminando o erro de considerar o pêndulo como um pêndulo simples, a incompatibilidade aumentou de 3 para 4 estimativas, e aparentemente ficou maior que a dos relatórios. Diz-se “aparentemente” por dois motivos: primeiro, existe a possibilidade de que alguns alunos tenham fraudado os resultados dos seus relatórios<sup>8</sup>; segundo, apenas uma estimativa incompatível a mais num conjunto de apenas seis pode muito bem ser efeito de flutuações aleatórias. Contudo, o fato de o n° de estimativas incompatíveis ter se alterado tão pouco indica uma grande insensibilidade do método utilizado para se estimar  $g$  com relação a esse erro (um dos mais importantes).

Aliás, estimar  $g$  a partir do comportamento do pêndulo com o método dos mínimos quadrados é um contra-senso. Este método tem a função de encontrar empiricamente relações de dependência entre duas variáveis, isto é, estimar relações de dependência a princípio desconhecidas; assim, por mais exata e precisa que seja a estimativa de  $a$  obtida por ele, ela não poderia ser utilizada para calcular  $g$ . Pois, se o método dos mínimos quadrados foi usado, é porque a lei do período do pêndulo não era conhecida; e, se era, seria mais coerente usar medidas com comprimento fixo para estimar  $g$ , como foi feito no item (i), acima (já que, sabendo a lei, só é necessária informação sobre um ponto para estimar  $g$ ).

As estimativas de  $g$  pelas medidas com comprimento fixo (usando os dados das 5 e das 10 primeiras medidas colhidas) distinguem claramente entre considerar ou não o pêndulo como um pêndulo simples:

			$\bar{T}$ (s)	$\Delta \bar{T}$ (s)	$\bar{L}$ (m)	$\Delta \bar{L}$ (m)	$\bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta \bar{g}$ (m/s <sup>2</sup> )
Aproximando o peso suspenso para um pêndulo simples	Plástico	10 pontos	1,986	0,00512	0,99	0,000	9,91	0,0361
		5 pontos	1,977	0,00814			10,00	0,0583
	Alumínio	10 pontos	1,999	0,00442			9,78	0,0306
		5 pontos	1,994	0,00832			9,83	0,0580
	Latão	10 pontos	2,005	0,00439			9,72	0,0301
		5 pontos	2,002	0,00220			9,75	0,0152

<sup>8</sup> Tome-se como exemplo o relatório n° 4. Da fórmula de propagação de erros,  $\Delta \bar{g} = \bar{g} \cdot \Delta a/a$ , o que é satisfeito em todos os relatórios exceto esse, onde o valor de  $\Delta g$  apresentado (0,23m/s<sup>2</sup>) é 10 vezes maior do que deveria ser. (Não bastasse isso, depois de encontrar a média  $\bar{g} = 9,63m/s^2$ , num parágrafo posterior o relatório se refere a  $\bar{g} = 9,86m/s^2$  [=9,63+0,23] como a média...)

Considerando o peso suspenso como um pêndulo físico	Plástico	10 pontos	1,986	0,00512	0,98	0,022	9,81	0,2279
		5 pontos	1,977	0,00814			9,90	0,2343
	Alumínio	10 pontos	1,999	0,00442	0,99	0,008	9,81	0,0890
		5 pontos	1,994	0,00832			9,86	0,1021
	Latão	10 pontos	2,005	0,00439	1,00	0,003	9,80	0,0445
		5 pontos	2,002	0,00220			9,82	0,0361

Os valores em vermelho indicam as estimativas de  $g$  incompatíveis com  $9,78\text{m/s}^2$ ; a estimativa com 5 pontos para o latão considerando o pêndulo físico só não é compatível porque, por motivos de flutuação, o erro padrão na estimativa do período para o latão é menor para 5 pontos do que para 10, e a média, maior.

Comparando as estimativas de  $g$  das medidas de comprimento variável com as de comprimento fixo, vê-se que as últimas fornecem um resultado mais confiável e não menos preciso, mesmo para uma quantidade não muito grande de medidas. Comparando os erros percentuais, temos:

Material	$\Delta \bar{g}(\%)$	
	30 pontos	10 pontos
Plástico	2,30	2,32
Alumínio	0,866	0,907
Latão	0,369	0,454

Concluindo: no método dos mínimos quadrados (que é o que vem sendo usado recentemente na disciplina F 229), o suporte usado para determinar mais precisamente o ponto de apoio do pêndulo elimina um erro sistemático de cerca de  $0,05\text{m/s}^2$  na estimativa de  $g$ ; porém, a menos que o objetivo principal de estimar  $g$  com o pêndulo seja contribuir para a memorização por parte dos alunos de métodos de tratamento estatístico, este método deveria ser abandonado em favor de calcular a média e o erro padrão do período e do centro de massa do pêndulo e, pela propagação de erros, obter a estimativa.

#### 4 – Fechamento

##### a) conclusão

Há muito conhecimento relacionado com o pêndulo. Para chegar à redação final do guia, foi necessário não apenas passar por vários, mas também avaliá-los e selecionar quais deveriam ter prioridade para serem apresentados ao aluno de EM. O resultado foi um guia que contém idéias relativamente simples (boa parte delas já vista no EM), embora proponha um caminho que talvez possa ser considerado cansativo pelo aluno<sup>9</sup>.

O guia redigido não deveria, de forma alguma, ser usado em uma única aula. Ele propõe um trabalho em longo prazo, em que o aluno constrói em bases sólidas a sua compreensão sobre o pêndulo. Quatro aulas (isto é, quatro dias de aula), uma para cada experimento e mais uma para a teoria, são o tempo mínimo sugerido para se concluir as atividades do guia.

##### b) bibliografia

<sup>9</sup> Não necessariamente isso é um problema. Já dizia Thomas Edison: “Um gênio é feito de 1% de inspiração e 99% de transpiração”. Basta que os alunos estejam motivados para que o guia possa ser seguido sem problemas, a menos que se queira concluí-lo num intervalo de tempo curto demais para eles processarem toda a informação com que terão contato.

- [1] Cruz, C.H. B., *et al.* *F-129: Física Experimental I – Apêndices e Complementos* (IFGW-UNICAMP, 1998), pgs 8 e 9, disponível para download em <http://www.ifi.unicamp.br/leb/f129d.htm> (arquivo F1-ap02.rtf)
- [2] *idem*, pg 28

ANEXOS

## Anexo 1 – Guia de Estudos Experimentais do Pêndulo

### O PÊNDULO – GUIA DE ESTUDOS PRÁTICOS

#### A – INTRODUÇÃO

Se você já brincou num balanço ou já balançou os braços enquanto andava em algum momento da sua vida, então você já teve experiências com o movimento dos pêndulos. Apesar de este ser um movimento, até certo ponto, banal, a ele está relacionado um importante aspecto da cultura moderna: a contagem do tempo.

O pêndulo executa um movimento repetitivo, e isso possibilita usá-lo como relógio. Talvez você já tenha visto um daqueles antigos relógios de pêndulo; hoje, eles não parecem ter nada de especial, mas tiveram um papel de destaque no desenvolvimento da contagem do tempo. E a maneira como se conta o tempo determina a relação que se estabelece com ele, uma visão de mundo e um modo de vida. Assim, a evolução da contagem do tempo influenciou fortemente a formação da personalidade moderna, como ilustra o texto abaixo (extraído de [1]):

#### ***Um pouco de História das incríveis máquinas do tempo***

***Sol, água, areia, pêndulo, quartzo e césio, são os principais meios de que o homem já utilizou para a contagem do tempo.***

*O mais antigo instrumento para medir a duração do dia foi o relógio solar, como o gnômon egípcio, datado de 3500 a 3000 a.C. Consiste em um mastro vertical ficando sobre uma base. O tempo é medido de acordo com a sombra projetada pelo mastro. Por volta do século VIII a.C., esses instrumentos se tornaram mais preciosos, à medida que marcas passaram a ser inscritas na base onde se projetava a sombra.*

*Os gregos integraram os relógios solares a sistemas de considerável complexidade, nos quais se mediam os momentos do Sol, da Lua e das estrelas. Nasceu assim o relógio astronômico.*

*Os progressos na Astronomia ajudaram a aprimorar a medição do tempo. Com a invenção do astrolábio, por Ptolomeu, no século II d.C., tornou-se possível calcular, de acordo com a posição do Sol, a duração do dia ou da noite, assim como prever o levantar e o cair de um astro no firmamento e a hora do crepúsculo e da aurora.*

*Media-se o tempo pelo ritmo de escoamento de um líquido. Os relógios de água eram usados pelos egípcios para marcar o tempo à noite, ou quando não havia sol. No Museu do Cairo existe um exemplar, fabricado na época do faraó Amenófis III, em 1400 a.C.*

*Era um recipiente cheio de água, com um pequeno furo no fundo, que deixava escorrer o líquido para outro recipiente, marcado com escalas. De acordo com o nível da água, podia-se saber o tempo.*

*Esses instrumentos foram aperfeiçoados por mecanismos que tornavam constante a pressão da água que escoava; por exemplo, a colocação de canos que jogavam continuamente líquido no primeiro reservatório. Um dos mais bem elaborados sistemas da Antigüidade foi a Torre dos Ventos, construída em 75 a.C. aos pés do Partenon, em Atenas uma torre de 20 metros de altura, com nove quadrantes solares, um catavento, uma*

*clepsidra (o nome do relógio a água), além de outros instrumentos. Também os chineses apreciavam esse tipo de relógio. O que foi feito, já no ano de 1090, para o imperador Su Sung indicava as doze horas do dia, tinha um sino que soava a cada quarto de hora e era enfeitado com autômatos.*

*Mas foi só no primeiro século da era cristã que surgiu o mais conhecido dos medidores de tempo anteriores ao relógio mecânico: a ampulheta. Ela mede o tempo de acordo com a passagem da areia de um recipiente de vidro para outro, através de uma estreita ligação. Nos séculos XVI e XVII, foram feitas ampulhetas para funcionar durante períodos de quinze e trinta minutos.*

*Poucos inventos moldaram tanto o mundo moderno como o relógio mecânico, surgido no século XIV. Ele tornou possível a civilização industrial e fixou a idéia de desempenho na atividade humana.*

*Até Idade Média, o tempo era percebido como uma coisa natural. Ao inverno seguia-se a primavera, o verão; a manhã vinha depois da madrugada, que por sua vez sucedia à noite, a contagem do tempo se fazia por longos períodos, meses e anos, materializados nos calendários. Nos conventos, especialmente, nem hora existia. O dia era dividido de acordo com o ritual dos ofícios. Como não havia uma medida universal, cada convento tinha sua hora, assim como cada cidade vivia segundo seu ritmo.*

*O relógio mecânico figura entre as supremas invenções da humanidade, sendo das mesma ordem que a da imprensa, por suas conseqüências revolucionárias em relação aos valores culturais, às mudanças técnicas, à organização política e social e à personalidade. Foi o relógio que tornou possível uma civilização atenta ao tempo portanto à produtividade e ao desempenho.*

*E o que diferenciou tecnicamente o relógio mecânico dos que o antecederam? Antes de mais nada, o relógio mecânico é movido por um peso. A energia da queda desse peso é transmitida através de um trem de engrenagem, formado por rodas dentadas que se encaixam umas nas outras e movimentam as agulhas do mostrador. O problema é que uma força aplicada continuamente produz uma aceleração. Logo, se nada se opusesse à descida do peso, ele imprimiria um movimento cada vez mais rápido à engrenagem. O que os sábios da Idade Média descobriram foi justamente um dispositivo de retardamento capaz de bloquear o peso e frear o movimento das rodas e agulhas, de modo a criar um movimento de oscilação com um batimento regular o vaivém continuo característico dos relógios.*

*Isso foi possível graças a uma pecinha composta de duas palhetas presa a um eixo horizontal móvel, que se engrenam alternadamente sobre uma roda em forma de coroa dentada (chamada roda de encontro), localizada verticalmente sobre um eixo que se move sob o efeito do peso. Os impulsos alternados provocados pela roda de encontro fazem a pecinha oscilar sobre seu eixo de maneira regular; este movimento, então, é transmitido ao trem de engrenagem, que movimenta as agulhas. O aparecimento, dos primeiros relógios mecânicos causou uma febre nas cidades européia que começavam a sacudir a modorra medieval. Cada burgo queria ter seu relógio não apenas por uma questão de prestígio, mas também porque a atração trazia viajantes, portanto dinheiro, para a localidade.*

*Já para os operários das cidade mais desenvolvidas, principalmente na Itália e em Flandres, onde já existiam uma florescente indústria têxtil, um movimentado comércio, a novidade não era assim tão boa. O relógio, passou a encarnar a autoridade que impunha as horas de trabalho e mais importante ainda exigia determinada produtividade ao longo*

da jornada. Em algumas cidades, os operários chegaram a se rebelar contra isso. Por exemplo, em Pádua, em 1390, a torre que abrigava o relógio de Dondi foi atacada.

Em 1656, na cidade de Haia, Holanda, Christian Huygens (1629-1695) concebeu um relógio de pêndulo com escape, que substituiu o fuso como instrumento regulador da força da mola. Ao contrário dos outros progressos da relojoaria, porém, essa invenção foi antes de tudo teórica. No lugar do fuso regulador da mola-motor, Huygens imaginou um pêndulo, suspenso livremente por um cordão ou um fio. Esse achado reduziu a margem de erro dos relógios de cerca de quinze minutos por dia para meros dez ou quinze segundos, o relógio se tornou enfim um instrumento realmente confiável para medir o tempo.

A Revolução Industrial do século XVIII na Inglaterra deu uma nova importância à hora. As relações de produção passaram a se fazer de maneira mais sistematizada, com a reunião dos operários dentro de fábricas. Habitados ainda a trabalhar segundo seu próprio ritmo, de acordo com a tradição herdada das corporações de ofício dos artesãos medievais, os operários se revoltaram contra as implacáveis máquinas do tempo. Com a desconfiança de que os patrões roubavam nas horas, adiantando ou atrasando, os operários começaram a adquirir seus próprios relógios, com isso a indústria de relógios cresceu e estes tornaram-se mais baratos a medida que sua produção tornou-se seriada.

Nada, porém, popularizaria tanto o relógio como uma descoberta de 1880. Os irmãos Pierre e Jacques Curie, cientistas franceses, descobriram que um pedaço de cristal de quartzo, cortado na forma de uma lâmina ou de um anel e colocado a vácuo num circuito elétrico e em baixa temperatura, vibra 32758 vezes por segundo, como um pêndulo ultra-rápido.

Em 1925, pesquisadores dos Laboratórios Bell, nos Estados Unidos, construíram o primeiro oscilador a quartzo. Mas, então, os relógios a quartzo eram ainda quase tão grandes quanto uma geladeira e assim permaneceriam por muito tempo. Pode-se considerar o 9º Congresso Internacional de Cronometria, em Paris, em setembro de 1969, como a verdadeira data de nascimento da indústria do relógio a quartzo. Pois foi ali que a empresa japonesa Seiko apresentou seu primeiro modelo eletrônico.

O relógio a quartzo tinha dado um golpe mortal na indústria relojoeira clássica assim como o relógio atômico a césio tiraria do observatório de Greenwich, na Inglaterra, o privilégio de fornecer a hora oficial do mundo.

(Para saber sobre o estágio atual de desenvolvimento dos relógios, ver [2].)

A importância cultural do relógio de pêndulo está na sua precisão, ou seja, no ritmo preciso do movimento do pêndulo. O pêndulo se move de tal maneira que, após um certo intervalo de tempo, o movimento passa a se repetir; esse intervalo de tempo é o chamado **período** do pêndulo, e é dele que nos ocuparemos. O caminho que seguiremos poderá ser considerado árduo, mas eu espero que você, prezado leitor, ao final, o considere recompensador.



## B – CONHECENDO O PÊNDBULO: EXPERIÊNCIAS INICIAIS

As duas experiências propostas abaixo têm como objetivo principal uma familiarização com o pêndulo. Trata-se de uma maneira de se acostumar a medir o período – que, daqui por diante, chamaremos de  $T$  – e de uma tentativa de descobrir como ele se comporta. Inicialmente, deixaremos a teoria de lado tanto quanto possível, pois, sem o contato com o pêndulo real, só será possível (quando muito) compreender o comportamento de um pêndulo imaginário.

NOTA: Para assegurar o processo de descoberta, recomenda-se fortemente realizar essas duas experiências em seqüência e só iniciar a leitura da segunda depois de tirar todas as conclusões possíveis da primeira. Da mesma maneira, não seria conveniente iniciar a leitura da teoria do pêndulo antes de terminar a experiência 2.

### 1 – Testando Várias Variáveis

a) objetivo: determinar quais características do pêndulo influem no seu período e, em especial, aquela que influencia mais.

b) material: fios de vários tamanhos (de materiais diferentes ou não), pesos (entenda-se: corpos tão pequenos quanto possível, mas bastante densos) de várias massas, alguma coisa para prender o fio, cronômetro, “medidores” (ver abaixo).

c) procedimento

Começaremos estudando um tipo bastante conhecido de pêndulo: um peso suspenso por um fio. E, a princípio, não sabemos o que determina o seu período; portanto, o primeiro passo é supor quais fatores poderiam ser relevantes nisso. Assim, use a sua imaginação para preencher a tabela abaixo (não precisa preencher inteira nem se limitar a 10).

Fator nº	Nome	Unidade
01		
02		
03		
04		
05		
06		
07		
08		
09		
10		

Cada um desses fatores deve poder ser quantificado. Isto é, todos eles poderão ser medidos, e, então, precisaremos de “medidores”: os instrumentos adequados para medir cada um deles (balança para os pesos, régua para os fios e transferidores para ângulos, só para citar alguns exemplos).

Tendo definido quais fatores você acha que são relevantes para o período, o próximo passo é testá-los um a um: para cada fator, construa um pêndulo e, mantendo constantes todos os outros fatores, cronometre o intervalo de tempo em que o pêndulo completa 10 oscilações para três valores desse fator; anote as suas medidas numa tabela como esta:

i	Fxi	10Ti (s)
1		
2		
3		

seguindo a regra:  $Fx1 < Fx2 < Fx3$ ;  $10Ti$  é o tempo de 10 oscilações completas do pêndulo, ou seja, 10 períodos (sugerimos medir o tempo para 10 oscilações para minimizar o erro humano de quem opera o cronômetro). De posse desses dados, examinaremos a variação percentual dos fatores e dos períodos medidos: coloque num gráfico os pontos da tabela abaixo:

x	i	Fxi/Fx2 (%)	Ti/T2 (%)	x	i	Fxi/Fx2 (%)	Ti/T2 (%)
01	1			06	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		
02	1			07	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		
03	1			08	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		
04	1			09	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		
05	1			10	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		

Da maneira como os valores desta tabela foram definidos, eles são todos 100% para  $i=2$ ; por isso, no gráfico, todos os fatores terão pelo menos um ponto em comum de três (o ponto  $[100\%, 100\%]$ ). Assim, fica fácil comparar as variações relativas do período devido a um ou outro fator e, portanto, a importância de cada um na determinação do período. Para estimar qual o fator mais influente, basta encontrar aquele que tem, proporcionalmente, as maiores variações percentuais de T; caso haja dúvidas sobre qual é ele, basta selecionar os melhores candidatos e, apenas para eles, tirar mais duas medidas, preenchendo a tabela:

i	Fxi	10Ti (s)
1		
2		
3		
4		
5		

seguindo a regra  $Fx1 < Fx4 < Fx2 < Fx5 < Fx3$  e fazer um novo gráfico com base em:

Tabela 5 – Variações percentuais de T em termos das variações percentuais dos fatores (desempate)							
x	i	Fxi/Fx2 (%)	Ti/T2 (%)	x	i	Fxi/Fx2 (%)	Ti/T2 (%)
01	1			03	1		
	2	100	100		2	100	100
	3				3		
	4				4		
	5				5		
02	1			04	1		
	2	100	100		2		
	3				3		
	4				4		
	5				5		

Se ainda houver dúvidas sobre o fator mais influente, compare os seus resultados com os dos seus colegas.

NOTA: Não deixe de registrar tudo o que acontecer durante a experiência, em especial os fatos que te chamarem mais a atenção.

## 2 – Estudando a Variável Principal

a) objetivo: determinar a relação matemática entre  $T$  e o fator mais relevante na sua determinação.

b) material: um fio longo (mais de 1,8m), um peso de massa grande e tamanho pequeno, alguma coisa para prender o fio, um cronômetro, uma fita métrica ou régua, uma balança.

c) procedimento

Da experiência 1, você provavelmente concluiu que o que mais influencia o período do pêndulo é o comprimento do fio ( $l$ ); além disso, talvez tenha percebido uma pequena influência da massa e que o pêndulo não atinge grandes inclinações por muito tempo. Com certeza você percebeu que ele oscila em torno de uma posição de equilíbrio, onde (geralmente) o fio fica na vertical. Por tudo isso, aqui, estudaremos a influência de  $l$  em  $T$ , nos concentrando no caso muito especial em que o ângulo do fio com a vertical é muito pequeno.

NOTA: Nesta experiência, não deixe menos de 1m de fio entre o ponto de suspensão do pêndulo e o peso, e não desloque o peso mais que 1cm da reta (vertical) que dá a posição de equilíbrio.

Antes de qualquer coisa, estudemos o material com o qual vamos construir o pêndulo: meça na balança as massas do peso e do fio, e use a fita métrica ou régua para medir as dimensões do peso e do fio. Anote essas medidas, pois elas servirão para você descrever as características do seu pêndulo e diferenciá-lo de outros.

Vamos supor que a relação matemática entre  $l$  e  $T$  é uma equação de um dos 4 tipos abaixo:

- i)  $T = a \cdot l + b$  (lei linear)
- ii)  $T = a \cdot l^n$  (lei de potência)
- iii)  $T = a \cdot 10^{bl}$  (lei exponencial)
- iv)  $T = a \cdot \log(l/b)$  (lei logarítmica<sup>10</sup>)

Assim como (i), as três últimas podem ser vistas como equações de retas, contanto que se use as escalas apropriadas:

- ii)  $\log(T/1s) = n \log(l/1m) + \log(a \cdot 1m^n / 1s)$
- iii)  $\log(T/1s) = b \cdot l - \log(a/1s)$
- iv)  $T = \log(l/1m) - \log(b \cdot 1m)$

Para começar, tomemos 5 medidas do intervalo de tempo necessário para o pêndulo completar 10 oscilações numa região em que  $l$  é “pequeno” (sugere-se 5 medidas no intervalo  $1,0m \leq l \leq 1,2m$ , com  $l$  variando de 5cm em 5cm).

i	$l_i$ (cm)	$10T_i$ (s)
1		
2		
3		
4		
5		

Com essas medidas calcule os valores de  $l$ ,  $T$ ,  $\log(l/1m)$  e  $\log(T/1m)$

Tabela 7 – Valores de L, T, $\log(L/1m)$ e $\log(T/1s)$
---

<sup>10</sup> Aqui, basta saber que  $a = 10^b \Leftrightarrow b = \log a$ .

i	$l_i$ (m)	$T_i$ (s)	$\log(l_i/1m)$	$\log(T_i/1s)$
1				
2				
3				
4				
5				

e, com os dados da tabela acima, construa 4 gráficos: T por  $l$ , T por  $\log(l/1m)$ ,  $\log(T/1s)$  por  $l$  e  $\log(T/1s)$  por  $\log(l/1m)$ . Em cada gráfico, trace uma reta que: (I) passa pelo maior número possível de pontos e (II) deixe não mais que dois pontos acima e não mais que dois pontos abaixo dela; essas retas indicam a maior proximidade possível que os valores medidos podem ter de cada uma das 4 leis acima.

Mas como distinguir qual lei está mais próxima da verdadeira relação entre T e  $l$ ? Observando o que acontece numa região “distante” da estudada até agora; repita todo o processo para outros 5 pontos numa região em que  $l$  é “grande” (sugere-se 5 medidas no intervalo  $1,6m \leq l \leq 1,8m$ , com  $l$  variando também de 5cm em 5cm). Teremos outros 4 gráficos, cada um com a sua reta indicando a maior aproximação que essas novas medidas podem ter de uma das leis.

A lei mais próxima da relação verdadeira é aquela que produz as retas mais coerentes com os dois conjuntos de medidas, isto é, o par de retas mais semelhantes entre si, porque isso representa a menor variação possível dos coeficientes da lei, que, na relação verdadeira, se mantém constantes. Portanto, juntando os dois gráficos referentes a cada lei em um e comparando as respectivas retas, é possível perceber qual delas está mais próxima da verdadeira relação entre T e  $l$ .

Uma vez encontrada a lei mais próxima, quais são os parâmetros que a aproximam mais de todas as medidas feitas até agora? Para encontrá-los, você terá que traçar uma última reta, agora considerando os 10 pontos do gráfico mais adequado; ela deve: (I) passar pelo maior número possível de pontos e (II) não deixar mais que 5 pontos acima nem mais que 5 pontos abaixo dela. Traçada esta reta, basta definir os seus coeficientes para encontrar a sua aproximação da relação relação entre T e  $l$ .

Caso os seus dados não sejam suficientes para distinguir a lei mais próxima, compare os seus resultados com os dos seus colegas.

## C – DA PRÁTICA À TEORIA

Até aqui, você provavelmente percebeu que, para um pêndulo consistindo de um peso suspenso por um fio de comprimento  $l$ , o que mais influencia o período  $T$  é justamente  $l$  e, para o caso em que o ângulo do fio com a vertical (posição de equilíbrio) é muito pequeno, a aproximação

$$T = al^b$$

parece razoável, contanto que  $a$  esteja entre  $1/5$  e  $2/5$  e  $b$  esteja entre  $2/5$  e  $3/5$ .

Agora, você deve estar se perguntando se esta aproximação é a melhor possível, ou então o por quê de o pêndulo se comportar como ele se comporta. Ou, talvez, você tenha encontrado, além desta, uma outra lei que lhe parece tão razoável quanto esta. Em todos esses casos, este é o momento ideal para teorizar o pêndulo.

## 1 – A Lei do Período do Pêndulo

## a) definição e representação de pêndulos

Um pêndulo é um corpo suspenso, sustentado num ponto de apoio, conforme mostrado na figura abaixo.

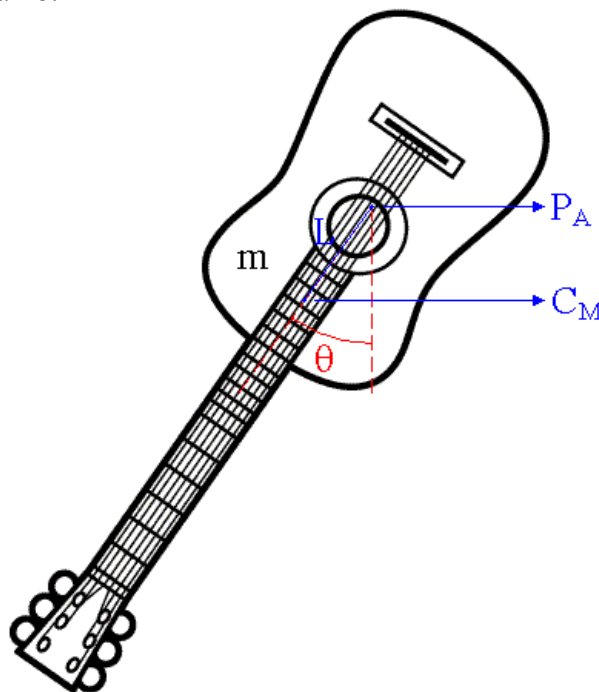


Figura 1 – Exemplo de pêndulo: um violão de massa  $m$  suspenso, sustentado num ponto de apoio ( $P_A$ ). O centro de massa ( $C_M$ ) está a uma distância  $L$  de  $P_A$  e deslocado de um ângulo  $\theta$  da sua posição de equilíbrio.

Para simplificar o estudo do movimento de um pêndulo, é comum representá-lo por uma massa puntiforme, suspensa por uma haste sem espessura e sem massa.

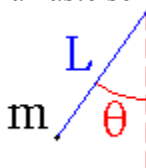


Figura 2 – Simplificação do pêndulo acima: toda a massa  $m$  do violão foi condensada em uma partícula, que está presa na extremidade de uma haste sem massa e de comprimento  $L$ . A outra extremidade da haste é fixa, e ela está deslocada do mesmo  $\theta$  em relação ao equilíbrio.

O pêndulo da figura 1 é conhecido como “pêndulo físico”, e o da figura 2 como “pêndulo simples”. A princípio, não é difícil encontrar o pêndulo simples correspondente a um dado pêndulo físico: a massa puntiforme tem o mesmo valor da massa do corpo, e o comprimento  $L$  da haste corresponde à distância entre o centro de massa do corpo e o seu ponto de apoio.

Ao longo desta seção, sempre teremos em mente o pêndulo simples, a menos que seja dito o contrário.

#### b) forças sobre um pêndulo

Há apenas duas forças sobre a massa de um pêndulo: o peso e a tração (que prende a massa à haste).

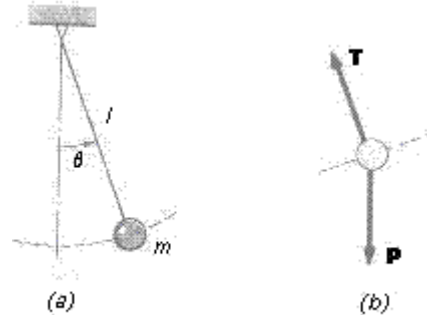


Figura 3 – (a) pêndulo simples de massa  $m$  e comprimento  $l$ ; (b) e forças peso ( $\mathbf{P}$ ) e tração ( $\mathbf{T}$ ) sobre  $m$ . (Figura extraída de [3])

O movimento do pêndulo é definido pela resultante dessas duas forças. Um diagrama de forças ajuda a começar a entender o que acontece:

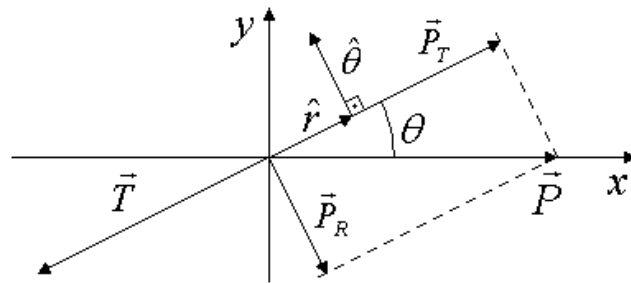


Figura 4 – Diagrama de forças e sistema de coordenadas: o eixo- $x$  é paralelo à posição de equilíbrio (no nosso caso, a vertical) e o eixo- $y$  dá a direção em que  $m$  se afasta do equilíbrio (alguma direção na horizontal). O peso  $\vec{P}$  pode ser separado em duas componentes:  $\vec{P}_T$ , paralela à tração  $\vec{T}$ , e  $\vec{P}_R$ , a parte restante, perpendicular a  $\vec{T}$ . Os vetores  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  têm, ambos, módulo 1;  $\hat{r}$  dá a direção e o sentido em que se encontra  $m$ , e  $\hat{\theta}$  dá a direção e o sentido em que o ângulo  $\theta$  cresce. (Note-se que a orientação tanto de  $\hat{r}$  quanto de  $\hat{\theta}$  depende de  $\theta$ .)

Agora, há uma informação importante sobre o pêndulo que deve ser levada em conta: a haste não se rompe nem muda de tamanho. Por isso,

$$\vec{T} = -\vec{P}_T \quad (\text{C-1})$$

e o único movimento possível é a variação do ângulo  $\theta$ . Ou seja, a partícula de massa  $m$  faz um movimento circular, devido à força resultante

$$\vec{F}_R = \vec{P}_R = -P_R \hat{\theta} \quad (\text{C-2})$$

Essa força tem uma propriedade especial: a sua direção é sempre paralela, e o seu sentido é sempre contrário ao deslocamento do pêndulo. Forças desse tipo são conhecidas

como “forças de restauração”, e um outro exemplo é a força que surge num sistema massa-mola.

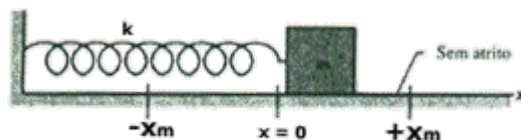


Figura 5 – Sistema massa-mola: sempre que a mola está contraída ( $x < 0$ ) ou distendida ( $x > 0$ ), ela exerce uma força para restaurar o seu comprimento normal; esta força de restauração atua sobre o bloco, fazendo-o buscar a posição  $x=0$ . (Figura extraída de [4])

c) pequenas oscilações

Olhando a figura 4, levando (C-2) em conta e usando um pouco de trigonometria<sup>11</sup>, percebe-se que a força resultante é dada por [5]

$$F_R = -m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (\text{C-3})$$

na direção do deslocamento do pêndulo. Isso é um problema, pois essa equação é muito difícil de se resolver.

No entanto, existe uma situação em que podemos simplificar (C-3). Geometricamente, sabe-se que, para um ângulo muito pequeno podemos fazer a seguinte aproximação<sup>12</sup>:

$$\sin \theta \cong \theta \quad (\text{C-4})$$

Ou seja, contanto que o pêndulo não se afaste muito da posição de equilíbrio (e, nesse caso, a haste pode ser substituída por uma corda), a força sobre a partícula de massa  $m$  é dada por

$$F_R = -m \cdot g \cdot \theta \quad (\text{C-5})$$

na direção de deslocamento da mesma em relação à posição de equilíbrio.

Até agora, consideramos o deslocamento angular  $\theta$  da posição de equilíbrio; do ponto de vista do deslocamento linear  $s = L \cdot \theta$ , a força de restauração é

$$F_R = -k \cdot (L \cdot \theta) = -k \cdot s \quad (\text{C-6})$$

onde

$$k = \frac{m \cdot g}{L} \quad (\text{C-7})$$

Esse tipo de força é muito comum entre os sistemas físicos. Sistemas governados por essa força são conhecidos como “osciladores harmônicos”, e executam um movimento conhecido como “Movimento Harmônico Simples” (MHS).

d) movimento harmônico simples

Para pequenas oscilações, um pêndulo executa um MHS num arco de circunferência; geralmente se estuda um sistemas massa-mola que execute um MHS num segmento de reta [4]. Na verdade, o tipo de curva em que se dá o movimento não importa para (C-6), mas, para fins de simplicidade, consideraremos aqui um MHS num segmento de reta<sup>13</sup>.

<sup>11</sup> Ver Apêndice 1, item b.

<sup>12</sup> Ver Apêndice 1, item c.

<sup>13</sup> Lembre-se que [eq 8] está implícita a idéia de que  $F_R$  é uma força de restauração, e portanto, contrária ao deslocamento da partícula. Toda a informação sobre a geometria da trajetória, no caso do pêndulo, está no vetor  $\hat{\theta}$  e, no caso geral, no vetor de módulo 1 que dá a direção e o sentido do crescimento de  $s$  (e que pode depender de  $s$ ). Em [eq 8],  $s$  diz apenas qual foi a distância percorrida desde o ponto de equilíbrio.



Seja um sistema físico qualquer no qual, por alguma razão, o movimento da partícula se dá numa reta e é governado por (C-6). Então, nos lembrando do pêndulo, podemos afirmar que:

- 1) em  $s=+s_0$  e  $s=-s_0$ , o afastamento da posição de equilíbrio ( $s=0$ ) é máxima e a velocidade é nula (estes são os pontos de retorno da partícula);
- 2) em  $s=0$ , a velocidade atinge a sua magnitude máxima;
- 3) o movimento é periódico (ou seja, depois de um certo intervalo de tempo, ele passa a se repetir);
- 4) da 2ª Lei de Newton, a aceleração dessa partícula é dada por

$$a = -\frac{k}{m} \cdot s \quad (\text{C-8})$$

Agora, supondo que esse sistema (oscilador harmônico) está numa sala e o movimento se dá na horizontal, se o iluminarmos “de cima”, a partícula terá uma sombra no chão, que terá as mesmas características citadas acima.

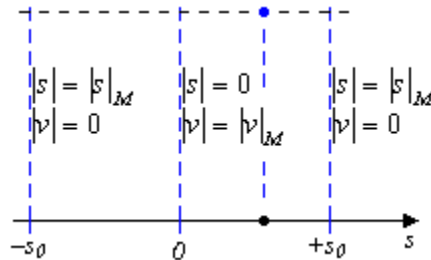


Figura 6 – Partícula e sua sombra no eixo- $s$ , ambas executando MHS. Nos pontos  $s=0$ ,  $s=+s_0$  e  $s=-s_0$  estão indicados os módulos da posição  $s$  e da velocidade  $v$ ; o índice “ $M$ ” indica que o módulo está com o seu valor máximo.

Ocorre que essa não é a única maneira de se conseguir uma sombra que execute um MHS: para satisfazer (C-1), (C-2) e (C-3), basta termos uma outra partícula se movendo com velocidade constante numa curva fechada, como a da figura abaixo.

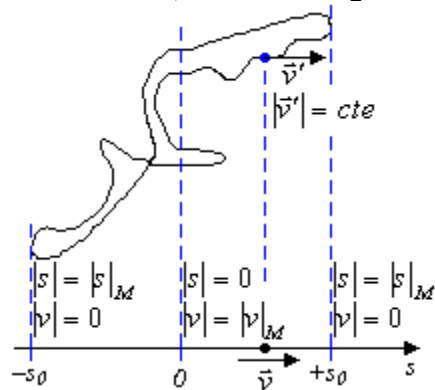


Figura 7 – Partícula percorrendo uma curva fechada qualquer com uma velocidade de módulo constante. Apenas isso já garante (C-1) e (C-3), pois, nas extremidades da curva,  $\vec{v}'$  é necessariamente vertical (e, então, a sombra pára) e, após toda a curva ter sido percorrida, o movimento da partícula (e da sombra) passa a se repetir. Para satisfazer (C-2), basta que a curva seja horizontal em todos os pontos cujas sombras coincidam com  $s=0$  (assim,  $|v| = |\vec{v}'|$ , o valor máximo que  $|v|$  pode atingir).

Esta segunda partícula está realizando um “movimento curvilíneo uniforme” (curvilíneo por estar confinado a uma curva, uniforme por ter uma velocidade constante em módulo); para

que a sua sombra imite perfeitamente a do oscilador harmônico, basta encontrarmos uma curva que lhe garanta (à sombra) (C-8) em qualquer ponto.

Para encontrar essa curva, comecemos com a pergunta: o que poderia mudar a direção da velocidade de uma partícula sem alterar-lhe o módulo? A única coisa que pode mudar qualquer característica da velocidade é a aceleração (isso decorre da própria definição de aceleração [6]); ambas são grandezas vetoriais. Mas, neste caso, a aceleração deve ter uma propriedade especial: ela deve ser SEMPRE perpendicular à velocidade<sup>14</sup>.

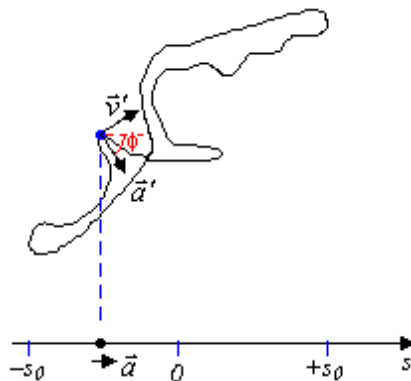


Figura 8 – Velocidade e aceleração da partícula da figura 7 (perpendiculares). A aceleração da partícula faz um ângulo  $\phi$  com a horizontal, o que leva a sombra a ter aceleração dada por (C-9).

Sabendo que a aceleração é um vetor, não é difícil perceber que a aceleração da sombra é a projeção desse vetor no chão, ou seja,

$$a = a' \cos \phi \quad (\text{C-9})$$

Isso requer que a partícula tenha uma aceleração  $a'$  que satisfaça

$$a' \cos \phi = -\frac{s}{\tau^2} \quad (\text{C-10})$$

onde  $\tau$  é uma constante com dimensão de tempo. Esta condição é satisfeita se a curva for um círculo:

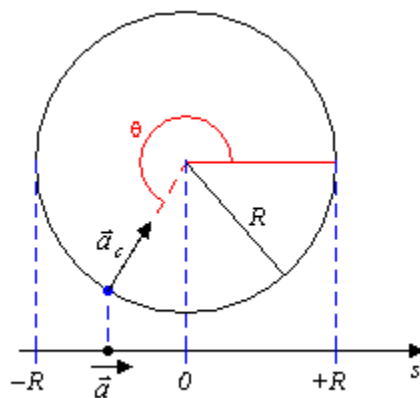


Figura 9 – Partícula percorrendo uma circunferência com velocidade de módulo constante e sua sombra no eixo- $s$ . A aceleração  $\vec{a}_c$  da partícula tem módulo constante e sempre aponta para o centro da circunferência; ela é proporcional e tem a mesma direção da posição da partícula em relação ao centro, porém ambas têm sentidos contrários. Substituindo  $\phi$  por  $(\theta - \pi)$ , vê-se (C-10) é satisfeita.

Neste caso, para  $R = s_0$ , temos<sup>15</sup>

<sup>14</sup> Ver Apêndice 1, item a.

<sup>15</sup> Ver Apêndice 1 item e.

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}, \quad \vec{r} = s_0 (\cos[\omega(t-t_0)] \hat{i} + \text{sen}[\omega(t-t_0)] \hat{j}), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{C-11})$$

Isso significa o seguinte:

- o MHS é a projeção do MCU (Movimento Circular Uniforme) numa reta;
- assim, o movimento da partícula no oscilador harmônico tem período  $T$  e é descrito por<sup>16</sup>

$$s(t) = s_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right] \quad (\text{C-12})$$

- de (C-8) e (C-11), o período do MHS é

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k} \quad (\text{C-13})$$

e) conclusão

De (C-7) e (C-13), conclui-se que um pêndulo simples de comprimento  $L$  executa pequenas oscilações com um período dado por

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g} \quad (\text{C-14})$$

## 2 – Correções

Voltemos à fórmula que você encontrou empiricamente:

$$T = al^b$$

com  $1/5 \leq a \leq 2/5$  e  $2/5 \leq b \leq 3$ . Antes de pensar se  $a$  e  $b$  concordam com (C-14) ou não, repare que os comprimentos NÃO SÃO os mesmos. O  $l$  que usamos na experiência 2 é a quantidade de fio que liga o peso ao ponto de suspensão (ou seja, a distância do corpo suspenso ao ponto de apoio), enquanto que o  $L$  ao qual (C-14) se refere é a distância do centro de massa ao ponto de apoio (que, no caso do pêndulo estudado nas experiências anteriores, corresponde ao ponto de suspensão). Eles só se igualariam se o peso fosse um ponto e se a corda não tivesse massa nenhuma; se você encontrou esta lei, é porque, dentro de certos limites, o pêndulo físico usado nas experiências anteriores pode ser considerado aproximadamente como um pêndulo simples.

Agora que você sabe que é o centro de massa que deve ser considerado, use as anotações feitas na experiência 2 sobre a massa e as dimensões do peso e do fio para substituir  $l$  por  $L$  e corrigir os valores encontrados para os coeficientes  $a$  e  $b$ . Estes novos valores se assemelham ao que (C-14) diz?

---

<sup>16</sup> Ver Apêndice 1, item d.

## D – MEDINDO A ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL

### 1 – Aceleração Gravitacional

Ao estudar os fenômenos celestes e os terrestres, Newton concluiu que ambos eram regidos pelas mesmas leis. Uma delas é aquela conhecida como “Lei da Gravitação Universal” (ou, simplesmente, “Gravidade”), que diz que dois corpos se atraem com uma força diretamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Em termos matemáticos, isso quer dizer: cada um deles estará sujeito a uma força que o move em direção ao outro com uma intensidade dada por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad (\text{D-1})$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos (chamados de corpo 1 e corpo 2),  $d$  é a distância entre eles (na verdade entre os centros de massa de cada um) e  $G$  é a constante de proporcionalidade.

A Gravidade é responsável por vários fenômenos, desde o fato de uma cadeira permanecer parada no chão até o movimento de corpos celestes, como planetas, cometas ou estrelas.

Na nossa vida diária, a Gravidade age da seguinte forma: estamos nas vizinhanças de um corpo de massa muito grande – a Terra – e a nossa distância em relação a ele (aquilo a que geralmente chamamos de “altura” ou “altitude”) varia muito pouco. Nessas condições, todos nós, corpos de massa pequena, estamos sujeitos a forças que nos puxam em direção à Terra (“para baixo”) e que variam muito pouco em intensidade. Chamamos esse tipo de força de “peso”; a intensidade do peso é dada por:

$$P = m \cdot g \quad (\text{D-2})$$

onde  $m$  é a massa do corpo sobre o qual a Terra e  $g$  é o parâmetro que contém as informações sobre  $G$ , a Terra e a distância (aproximada) do corpo ao centro de massa da Terra. O parâmetro  $g$  é conhecido como “aceleração gravitacional” da Terra, e contém toda a informação necessária ao entendimento dos fenômenos relacionados à Gravidade que estão presentes na nossa vida diária.

Um desses fenômenos, como vimos, é o movimento dos pêndulos (ver figura 3). De (C-14), temos que:

$$g = (2\pi)^2 \cdot \frac{L}{T^2} \quad (\text{D-3})$$

Lembrando da experiência 2 (corrigida), o coeficiente  $a$  que você encontrou se relaciona com  $g$  por

$$a = 2\pi/\sqrt{g}$$

A partir daí, que estimativa você pode dar para o valor de  $g$ ?

Empiricamente, os valores de  $g$  medidos em alguns pontos são [8]:

Localização	$g$ aproximado ( $\text{m/s}^2$ )
equador	9,78
pólos	9,83
10km de altitude	9,78
300km de altitude	8,80
10 000km de altitude	1,94

Sabendo que o pico mais alto da Terra, o do monte Everest, tem menos de 8,9km de altitude, é possível perceber o quanto as variações de  $g$  são pequenas no nosso dia-a-dia. Mas, como essas medidas foram obtidas?

Um meio para obtê-las é justamente (D-3). O valor de  $g$  que você encontrou a partir do  $a$  obtido na experiência 2 (corrigida) pode ser encarado como uma estimativa inicial e sem a necessidade de estar muito próxima do verdadeiro valor de  $g$ , pois ela foi calculada a partir de um procedimento que tinha como objetivo, apenas, avaliar o comportamento do pêndulo. Agora que sabemos como ele se comporta, podemos usar essa informação para estimar  $g$  com uma precisão maior.

## 2 – Usando O Pêndulo para Encontrar A Aceleração Gravitacional na sua Cidade

a) material: o mesmo da experiência anterior

b) procedimento

Assim, como na experiência 2, começaremos tomando nota das dimensões e das massas do peso e do fio utilizados. Em seguida, monta-se o pêndulo e mede-se, com o máximo cuidado possível, o comprimento  $l$  do fio que liga o peso ao ponto de suspensão. Todas essas medidas preliminares serão usadas na determinação do centro de massa do pêndulo físico.

Desta vez, manteremos  $l$  constante (sugerimos  $l=1m$  para facilitar o cálculo do centro de massa) e nos concentraremos em medir  $T$ <sup>17</sup>. E, aqui, é preciso estar atento à imprevisibilidade da vida: devido a variações da temperatura ambiente (que, por dilatação ou contração térmica, alteram as características do pêndulo), falha humana ao operar o cronômetro, correntes de ar inesperadas, entre outros fatores fora do nosso controle e da nossa capacidade de previsão, dificilmente duas medições de  $T$  encontrarão valores exatamente iguais. Os valores medidos estarão distribuídos em torno do valor real de  $T$ ; mas, quanto mais medidas tivermos, mais chances teremos de eliminar essas flutuações aleatórias. Por isso, é importante tirar o maior número possível de medidas.

Como de costume, meça o tempo equivalente a 10 períodos (se não para eliminar completamente a falha humana, ao menos para minimizá-la).

i	10Ti (s)	i	10Ti (s)	i	10Ti (s)
01		11		21	
02		12		22	
03		13		23	
04		14		24	
05		15		25	
06		16		26	
07		17		27	
08		18		28	
09		19		29	
10		20		30	

Tendo calculado  $L$  a partir de  $l$  e das medidas feitas antes de se montar o pêndulo, para cada valor medido para  $T$ , (D-3) fornecerá um valor para  $g$ .

<sup>17</sup> Lembrar de não ultrapassar 1cm entre o peso e a reta vertical da posição de equilíbrio e de deixar, pelo menos, 1m de fio no pêndulo, pois só temos certeza do comportamento do pêndulo para ângulos pequenos.

Tabela 9 – Medidas de g					
i	gi (m/s <sup>2</sup> )	i	gi (m/s <sup>2</sup> )	i	gi (m/s <sup>2</sup> )
01		11		21	
02		12		22	
03		13		23	
04		14		24	
05		15		25	
06		16		26	
07		17		27	
08		18		28	
09		19		29	
10		20		30	

A partir desses valores, podemos tirar uma primeira estimativa para o verdadeiro valor de g: a média deles.

$$\bar{g} = \frac{\sum gi}{N} \quad (\text{D-4})$$

onde N é o número de valores gi que temos e o símbolo  $\Sigma$  indica que estamos somando todos eles. Ainda pode haver um desvio entre o verdadeiro valor de g e esta estimativa; porém, a Estatística diz que, muito provavelmente, o módulo desse desvio é menor ou igual a<sup>18</sup>:

$$\Delta g = \sqrt{\frac{\sum (gi - \bar{g})^2}{N - 1}} \quad (\text{D-5})$$

A quantidade  $\Delta g$  é chamada de “desvio padrão”. Assim, a nossa estimativa final de g NÃO é um número, mas um intervalo:

$$g = \bar{g} \pm \Delta g = \frac{\bar{g}}{100} [100 \pm \Delta g(\%)] \quad (\text{D-6})$$

onde

$$\Delta g(\%) = 100\% \cdot \frac{\Delta g}{\bar{g}} \quad (\text{D-7})$$

Se o valor apresentado em [8] para o lugar mais próximo da sua cidade estiver dentro do intervalo definido em (D-6), as duas estimativas (a sua e a de [8]) são compatíveis (no caso, o valor de [8] poderia ser o valor real de g); se o valor de  $\Delta g(\%)$  for pequeno, a precisão da sua estimativa foi boa. Uma boa estimativa possui essas duas características (compatibilidade com as estimativas anteriores e precisão); se você não estiver satisfeito com a sua estimativa, inclua os dados de alguns colegas nos cálculos a fim de eliminar mais os efeitos das flutuações aleatórias.

### 3 – Influências na Medida de g

Listamos, aqui, alguns fatores que podem ter interferido na sua estimativa de g.

a) incerteza nas massas envolvidas.

Apesar de o período do pêndulo simples não depender da sua massa, o L do pêndulo composto usado depende das massas do fio e do peso. Apesar de temos medido essas

<sup>18</sup> Ver Apêndice 2.

massas na balança, temos uma incerteza na medida de cada uma que é igual à escala da balança; por exemplo, se a balança fornece valores de massa de 0,1g em 0,1g, a incerteza em qualquer massa medida (ou o desvio padrão de cada massa) é 0,1g. Essa incerteza foi desconsiderada nos nossos cálculos.

#### b) rotação da Terra

A Terra gira em torno de seu eixo, e isso gera uma aceleração centrífuga que se opõe à aceleração gravitacional. Este efeito diminui com a latitude e é responsável, por exemplo, pelo achatamento dos pólos da Terra. De fato, quando o nosso planeta estava em formação, a sua distribuição de massa foi moldada pela Gravidade e pela força centrífuga, de modo que, hoje, a soma (vetorial) dessas duas forças aponta “para baixo” em qualquer ponto da Terra. Assim, o valor encontrado de  $g$  é, na verdade, a aceleração correspondente à resultante dessas duas forças, e é exatamente essa a aceleração relevante no nosso dia-a-dia. Para se ter uma idéia da influência da aceleração centrífuga: sabendo que, no equador, a Terra percorre 40.000km em 24h e o seu raio é  $20.000\text{km}/\pi$ , a teoria do Movimento Circular Uniforme<sup>19</sup> nos diz que a aceleração centrífuga (que é o negativo da aceleração centrípeta) tem um módulo de, aproximadamente,  $0,03\text{m/s}^2$ .

#### c) estrutura geológica

Um prédio que esteja próximo do peso do pêndulo também exerce Gravidade sobre ele; não teria isso interferido no valor de  $g$  que você mediu? Na verdade, os geólogos usam esse tipo de princípio para explorar a estrutura geológica de regiões que lhes interessam, e um dos possíveis métodos para essa exploração consiste justamente no estudo do período de pêndulos<sup>20</sup>. Porém, influências desse tipo quase sempre são menores que 0,0001% do valor de  $g$  geralmente usado para outros propósitos ( $9,8\text{m/s}^2$ ). Assim, esse fator tem um papel desprezível no nosso caso, se comparado com as outras fontes de erro (que, como você deve ter visto, podem gerar desvios de 1% ou até mais).

Esta lista está longe de ser completa, mas evidencia alguns efeitos físicos interessantes que se relacionam ao movimento do pêndulo real.

---

<sup>19</sup> Ver Apêndice 1, item e.

<sup>20</sup> Ver Apêndice 3.

## E – CONCLUSÕES

Começou-se quase sem conhecimento algum a respeito do pêndulo e, no decorrer do caminho, compreendeu-se o seu comportamento e utilizou-se esse novo conhecimento para se obter outro: a aceleração gravitacional  $g$ . A compatibilidade entre o valor de  $g$  medido com o pêndulo e o valor usualmente aceito reforça a validade da fórmula do período  $T$  do pêndulo.

Todo esse processo pode servir de exemplo do desenvolvimento científico: começa-se com um fenômeno ainda inexplorado, realiza-se experiências (relativamente) simples para se familiarizar com o seu comportamento geral, elabora-se uma teoria baseada em argumentos que pareçam coerentes e coloca-se a teoria à prova em experimentos mais complexos e minuciosos (e que, talvez, relacionem o fenômeno em exploração com algum outro). Assim, cria-se e sedimenta-se conhecimento novo, embora ainda haja perguntas a serem respondidas; só para citar um exemplo, será que a única influência da rotação da Terra no movimento do pêndulo estudado nas três experiências realizadas se resume apenas a atenuar a aceleração da gravidade e alterar  $T$ ?

Mais do que simplesmente propor um estudo sobre o pêndulo, este guia foi uma tentativa de propor um estudo sobre a própria formação do conhecimento humano. Esperamos que você, prezado leitor, tenha feito um bom proveito de todas as idéias aqui contidas.

## F – BIBLIOGRAFIA

- [1] [http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples\\_HTML.htm](http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples_HTML.htm)
- [2] [http://geocities.yahoo.com.br/astronals/relogios\\_atomicos.htm](http://geocities.yahoo.com.br/astronals/relogios_atomicos.htm)
- [3] [http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples\\_HTML.htm](http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples_HTML.htm)
- [4] <http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2002/massamola/massamola.html>
- [5] <http://www.ufsm.br/gef/Mhs.htm#item06>
- [6] GREF (Grupo de Reelaboração do Ensino de Física), “*Leituras em Física: Mecânica*”, bloco 2, pg 70, disponível para download em:  
<http://axpfep1.if.usp.br/~gref/mecanica.htm>
- [7] <http://www.ufsm.br/gef/Mhs.htm#item01>
- [8] [http://geocities.yahoo.com.br/galileon/1/queda/queda\\_livre.htm](http://geocities.yahoo.com.br/galileon/1/queda/queda_livre.htm)



## G – APÊNDICES

## APÊNDICE 1 – Trigonometria e Movimento Circular Uniforme

Discutimos, aqui, alguns tópicos mencionados no estudo do pêndulo e que estão relacionados com trigonometria. Assim, um conhecimento básico desse tema é necessário para seguir a leitura.

a) como variar a velocidade de um corpo sem alterar o seu módulo

A velocidade de um corpo é o parâmetro que se usa para descrever para onde este corpo está indo e com que rapidez ele vai. Não basta sabermos apenas quão veloz é um corpo para sabermos a sua velocidade; precisamos também saber em qual direção ele se move e, dentro dessa direção, em qual sentido. Por isso, a velocidade é uma grandeza vetorial [1].

Foi dito que uma aceleração sempre perpendicular à velocidade é a única forma de alterar a sua direção sem mudar o seu módulo. Agora, provaremos esta afirmação.

A aceleração também é um vetor, dado por:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad [\text{eq 1}']$$

Começaremos estudando o comportamento de  $\Delta \vec{v}$ .

Suponhamos que um corpo, devido a uma aceleração qualquer ao longo do tempo, teve a sua velocidade alterada de  $\vec{v}_i$  para  $\vec{v}_f$ , com  $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$ ; as velocidades inicial e final estão mostradas na figura 1', juntamente com a variação  $\Delta \vec{v}$ .

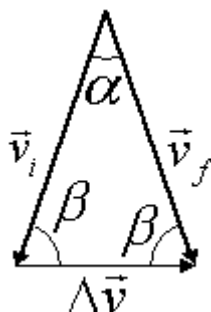


Figura 1' – Velocidades inicial e final e variação da velocidade. Como o módulo da velocidade não se alterou, os três vetores formam um triângulo isósceles, e por isso o ângulo de  $\Delta \vec{v}$  com as duas velocidades é igual.

As três velocidades ( $\vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_f$  e  $\Delta \vec{v}$ ) formam um triângulo isósceles; como a soma de todos os ângulos internos de um triângulo é sempre  $180^\circ$ , na notação da figura 1'b o ângulo  $\beta$  entre  $\vec{v}_i$  e  $\Delta \vec{v}$  é dado por

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \quad [\text{eq 2}']$$

Quanto menor for  $\alpha$ , mais próximo de  $90^\circ$  será  $\beta$ , e mais próximo  $\Delta \vec{v}$  estará de ser perpendicular a  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}_f$ . Agora, se pensarmos numa aceleração que NUNCA altere o módulo da velocidade, [eq 1'] deve ser válida para  $\Delta t$ 's muito pequenos, pequenos o suficiente para que  $\alpha$  seja tão pequeno quanto se queira, ainda que não-nulo; ou seja, válida para  $\alpha$ 's tão pequenos que seja impossível notar qualquer diferença entre  $\beta$  e  $90^\circ$ . Assim, uma aceleração que NUNCA altera o módulo da velocidade, mas muda a sua direção, só permite variações perpendiculares à mesma. Logo, a ÚNICA aceleração que nunca varia o módulo da velocidade é SEMPRE perpendicular a ela.

b) seno, co-seno e o círculo trigonométrico

“Seno” e “co-seno” são dois conceitos que foram inicialmente definidos a partir das relações geométricas no triângulo retângulo. Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de “hipotenusa”, e os outros dois são chamados de “catetos”. Cada um dos outros dois ângulos é formado pela hipotenusa e um dos catetos, conhecido como “cateto adjacente”; o cateto restante é conhecido como “cateto oposto”.

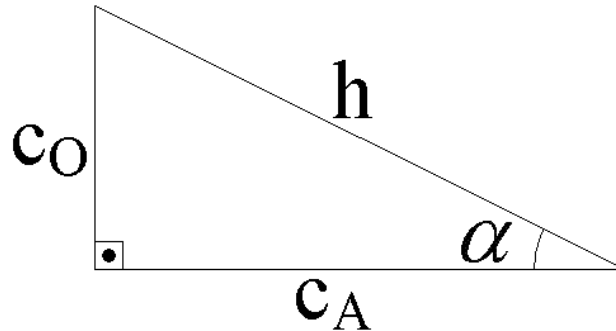


Figura 2' – Exemplo de triângulo retângulo. A hipotenusa está simbolizada por  $h$ , o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  por  $c_O$ , e o adjacente por  $c_A$ .

Para o ângulo  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ), define-se [2]

$$\text{sen} \alpha = \frac{c_O}{h}, \quad \text{cos} \alpha = \frac{c_A}{h} \quad [\text{eq } 3']$$

Com o tempo, houve a necessidade de se estender esses conceitos para ângulos maiores que  $90^\circ$ . Para isso, foi criado o “círculo trigonométrico” [3]:

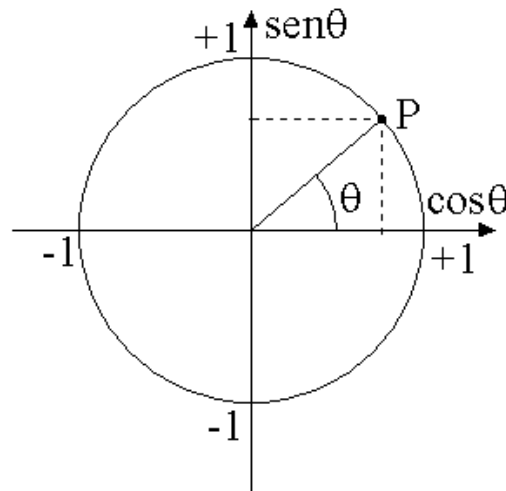


Figura 3' – O círculo trigonométrico. Dado um ângulo qualquer, obtemos o seu co-seno pela projeção do ponto  $P$  no eixo horizontal e o seu seno, pela projeção no vertical. Na figura,  $0 < \theta < 90^\circ$ .

Com ele,  $\text{cos} \theta$  e  $\text{sen} \theta$  passaram a ser vistos como as projeções do ponto  $P$  nos eixos horizontal e vertical, respectivamente ( $0 < \theta < 360^\circ$ ). Além disso, dessa associação entre ângulos e círculo surgiu uma nova unidade de medida de ângulos: o “radiano”. Se chamarmos o ponto correspondente a  $\theta = 0$  de  $A$ , um radiano (1rad) é o ângulo correspondente ao ponto  $B$ , que pode ser ligado a  $A$  por um segmento de arco  $AB = 1$ .

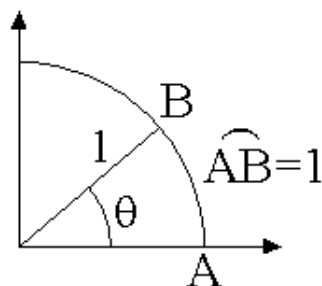


Figura 4' – O ângulo correspondente a um radiano.

Daí segue que

$$2\pi \text{rad} = 360^\circ \quad [\text{eq } 4']$$

Medir ângulos em radianos é tão comum que, quando isso é feito, geralmente se omite a unidade; assim, dizemos que a idéia do círculo trigonométrico estendeu os conceitos de “seno” e “co-seno” para  $0 < \theta < 2\pi$ . Se quisermos pensar em ângulos maiores, basta notar que, em  $\theta = 2\pi$ , os valores do seno e do co-seno coincidem com os de  $\alpha = 0$  e, a partir daí, tudo começa a se repetir; estendendo esse raciocínio também para  $\alpha < 0$ , podemos pensar em seno e co-seno para qualquer valor de  $\alpha$ .

c) a aproximação  $\text{sen}\theta \cong \theta$

Demonstraremos, agora, a validade da aproximação

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \cong 1 \quad [\text{eq } 5']$$

usada no estudo do pêndulo e em várias outras situações. Do círculo trigonométrico, segue que, para  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , podemos colocar o arco correspondente ao ângulo  $\theta$  dentro de um triângulo retângulo de catetos ( $\text{sen}\theta$ ) e  $(1 - \cos\theta)$ .

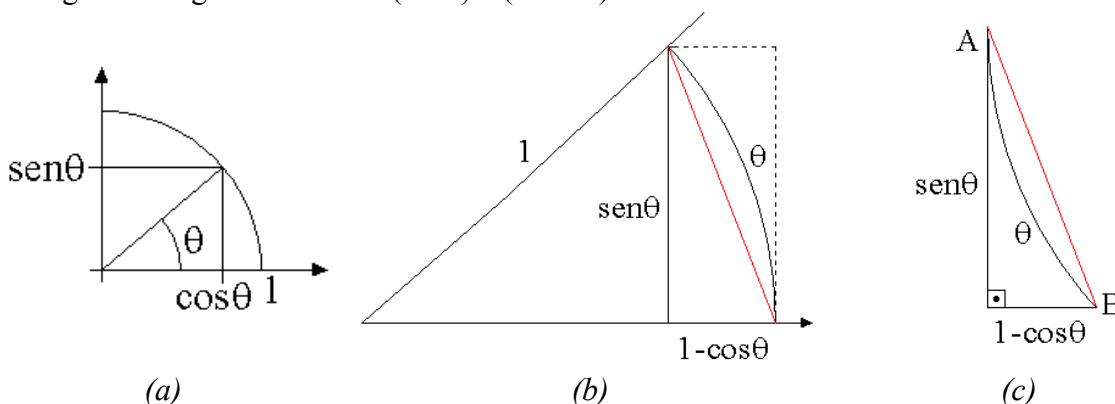


Figura 5' – (a) Ângulo  $\theta$  no círculo trigonométrico. (b) Ampliação de (a); a linha vermelha é o segmento de reta que liga as duas extremidades do arco  $\theta$ . (c) Triângulo retângulo formado pelas linhas tracejadas e pela linha vermelha, contendo o arco  $\theta$ .

Na figura 5'c, percebe-se três caminhos diferentes entre os pontos A e B: a hipotenusa do triângulo, o arco correspondente ao ângulo e os dois catetos. Visualmente, percebe-se que, para  $\theta > 0$ , o arco é maior que a hipotenusa (e, portanto, que qualquer cateto sozinho), mas também é menor que a soma dos dois catetos. Assim,

$$\text{sen}\theta \leq \theta \leq \text{sen}\theta + 1 - \cos\theta \quad [\text{eq } 6']$$

onde o igual é para o caso  $\theta = 0$ . Agora, para  $0 < \theta \ll 1 < \pi/2$ , temos

$$\cos\theta \cong 1 \Rightarrow \text{sen}\theta + 1 - \cos\theta \cong \text{sen}\theta \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \cong 1$$

que é o que queríamos demonstrar.

## d) funções trigonométricas básicas

Voltando ao seno e ao co-seno, já sabemos como obtê-los para qualquer ângulo, inclusive ângulos negativos ou maiores que uma volta inteira. Suponhamos, agora, que este ângulo possa, de alguma maneira, variar: para cada um deles, temos apenas um seno e apenas um co-seno. Portanto, temos duas funções:

$$f(\theta) = \text{sen}\theta, \quad g(\theta) = \text{cos}\theta$$

Estas funções, juntamente com outras, são chamadas “funções trigonométricas” [2], pois surgem de conceitos da trigonometria. (Estas duas funções são as funções trigonométricas básicas, pois são as mais simples e todas as outras são obtidas a partir delas.) Todas as funções trigonométricas têm uma propriedade importante: elas são periódicas, isto é, existe um intervalo  $P$  (conhecido como “período”) a partir do qual elas passam a se repetir:

$$f(x + P) = f(x)$$

No caso das funções seno e co-seno, o período é  $2\pi$ .

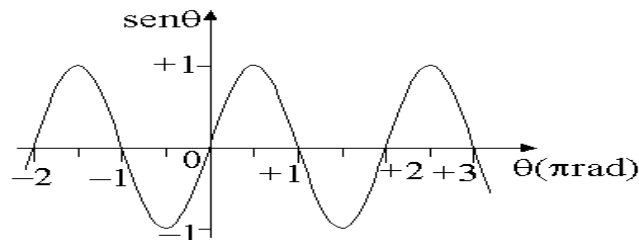


Figura 6' – Gráfico da função  $f(\theta) = \text{sen}\theta$ . Para reforçar o fato de que o período desta função é  $2\pi$ , colocamos  $\theta$  em unidades de  $\pi$  rad; Assim, por exemplo, -1 no eixo horizontal corresponde ao ângulo de  $-\pi$  rad, e +3 a  $3\pi$  rad.

## e) o movimento circular uniforme

O MCU consiste em uma partícula percorrendo uma circunferência de raio  $R$  com uma velocidade de módulo constante  $v$  [4].

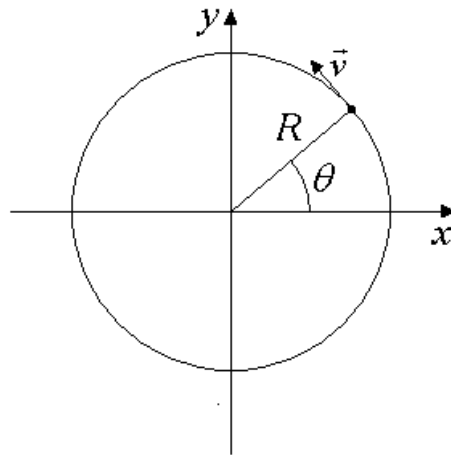


Figura 7' – Movimento Circular Uniforme: a partícula descreve uma circunferência na sua trajetória. Para isso, a sua velocidade deve ter sempre o mesmo módulo e ser sempre tangente à circunferência; ou seja, ela deve ter a sua direção (e apenas a direção) variando sempre.

Trata-se de um movimento bi-dimensional e, por isso, podemos decompô-lo em duas coordenadas,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Como  $R$  se mantém constante, apenas o ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  varia, e então temos

$$\vec{r}(t) = (x(t) \quad y(t)), \quad x(t) = R \cdot \text{sen}\theta(t), \quad y(t) = R \cdot \text{cos}\theta(t) \quad [\text{eq } 7']$$

Agora,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{R} = cte \quad [\text{eq } 8']$$

onde  $\omega$  é conhecida como “velocidade angular”; ou seja, se  $\theta(t_0)=0$ , temos

$$\theta(t) = \omega(t - t_0) \Rightarrow \vec{r}(t) = R(\cos[\omega(t - t_0)] \quad \text{sen}[\omega(t - t_0)]) \quad [\text{eq } 9']$$

Como o MCU é composto pelas funções trigonométricas básicas, ele é periódico: no período T, a partícula percorre todo o perímetro  $2\pi R$  do círculo. Assim,

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{eq } 10']$$

Mas, como já vimos, se o módulo da velocidade se mantém constante, isso se deve a uma aceleração sempre perpendicular à velocidade; no caso do MCU, essa aceleração é chamada de “aceleração centrípeta”, e está sempre orientada para o centro da circunferência<sup>21</sup>.

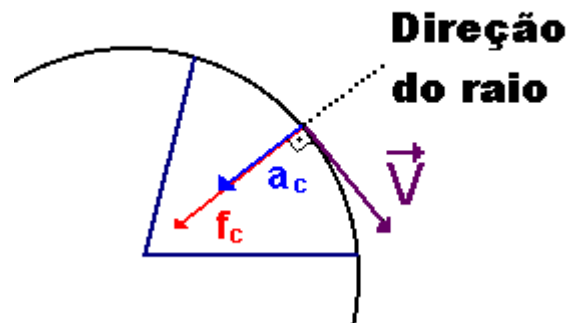


Figura 8' – Velocidade no MCU, aceleração centrípeta e a força que a gera e mantém o movimento (força centrípeta). Para que a velocidade mude de direção sem alterações no módulo, a aceleração deve ser perpendicular à velocidade; para que a trajetória da partícula seja uma circunferência, a aceleração deve apontar sempre para o centro e ter o módulo constante. (Figura extraída de [5].)

Para encontrar o seu módulo, vejamos o comportamento da partícula num intervalo  $\Delta t$ : ela vai do ponto A ao B, separados por um arco de comprimento  $v\Delta t$  e pelo segmento de reta  $\overline{AB}$ , e a velocidade muda de  $\vec{v}_A$  para  $\vec{v}_B$ .

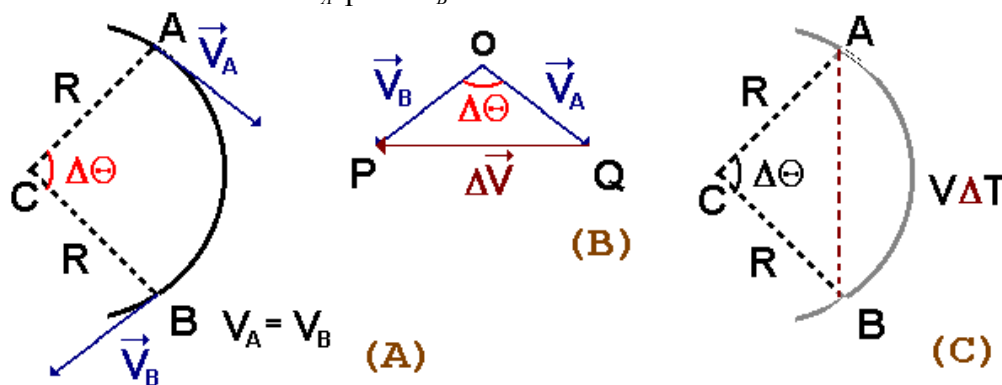


Figura 9' – (A) A partícula vai de do ponto A ao B, separados por um arco de comprimento  $R\Delta\theta$ , e a sua velocidade muda de  $\vec{v}_A$  para  $\vec{v}_B$ . (B) Triângulo formado por  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  e a variação da velocidade  $\Delta\vec{v}$ . (C)

<sup>21</sup> Se esta última afirmação não parece óbvia, imagine alguém rodando na horizontal uma pedra amarrada num barbante. A pedra descreve uma circunferência, e só não escapa por causa da tração no barbante, que a puxa para dentro da circunferência. Neste exemplo, a tração corresponde à força centrípeta e é a força resultante, e a aceleração centrípeta é paralela a ela.

Triângulo formado pelo centro da circunferência e os pontos A e B; o arco percorrido tem comprimento  $V\Delta t$ . (Figura extraída de [5].)

Porque os triângulos das figuras 9'B e 9'C são isósceles e têm o mesmo ângulo  $\Delta\Theta$  entre os seus lados iguais, temos que

$$\frac{\Delta v}{AB} = \frac{v}{R} \quad [\text{eq 11'}]$$

Mas  $\overline{AB} = 2R\text{sen}(\Delta\Theta/2)$ ; por isso, para  $\Delta\Theta \ll 1$ , [eq 5'] nos dá

$$\overline{AB} \cong v\Delta t \Rightarrow \frac{v}{R} \cong \frac{\Delta v}{v\Delta t} \quad [\text{eq 12'}]$$

e, do módulo de [eq 1'],

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad [\text{eq 13'}]$$

onde o índice “c” indica que esta é a aceleração centrípeta do MCU. Vetorialmente,

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}(t) \quad [\text{eq 14'}]$$

f) referências

- [1] [http://servlab.fis.unb.br/matdid/2\\_1999/Marlon-Eduardo/mru.htm](http://servlab.fis.unb.br/matdid/2_1999/Marlon-Eduardo/mru.htm)
- [2] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigon1/mod114.htm#trig10>
- [3] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo02.htm>
- [4] <http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/PreVestibular/2005-1/mod1/node20.html>
- [5] <http://educar.sc.usp.br/fisica/circteo.html>

## APÊNDICE 2 – Sobre O Desvio entre Os Valores Real e Estimado de Uma Quantidade Física

Ao tentarmos medir  $g$ , nos deparamos com uma dificuldade: a existência de influências externas que alteram o valor medido de forma imprevisível e das quais não podemos nos livrar completamente. Essas alterações são aleatórias, e, por isso, podemos tomar como uma boa estimativa do valor real a média entre vários valores medidos<sup>22</sup>. Porém, essa estimativa dificilmente é o valor real: há um desvio entre os dois. Por isso, fomos obrigados a procurar não o verdadeiro valor de  $g$ , mas um intervalo que (com alguma segurança poderíamos afirmar que) o incluísse; e, para determinar esse intervalo, tivemos que usar o desvio padrão, definido em (D-5).

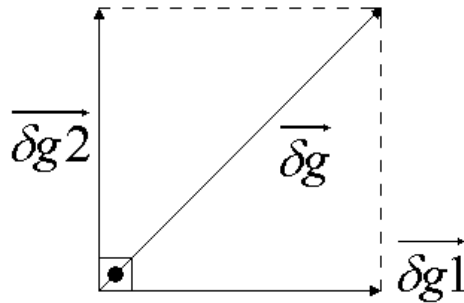
Embora (D-5) seja deduzida através de fórmulas estatísticas, é possível constatar que essa fórmula é razoável. Para isso, começemos pensando num caso em que só tivéssemos duas medidas: a estimativa para o valor real é a média entre elas, e queremos estimar o desvio entre a estimativa e o valor real; a primeira coisa em que poderíamos pensar seria calcular a metade da soma dos desvios em relação à média

$$\Delta g = \frac{\delta g_1 + \delta g_2}{2} = \frac{(g_1 - \bar{g}) + (g_2 - \bar{g})}{2}$$

porém, pela própria definição de  $\bar{g}$ , obteríamos zero. Nesta primeira tentativa, vê-se claramente o problema de como somar os desvios.

<sup>22</sup> Pois, quanto maior o número de medidas feitas sob “as mesmas” condições, maiores serão as compensações entre as influências que aumentam e as que diminuem o resultado de cada medida; para o caso ideal de infinitas medidas, essas influências se compensam totalmente e a média corresponde exatamente ao valor real.

Para resolver este problema, voltemos ao caráter imprevisível das medidas: se as influências sobre elas são aleatórias, o desvio de cada uma delas em relação à média também é; e, se os dois desvios são aleatórios, eles são independentes entre si. Se fôssemos representar isso geometricamente, teríamos dois vetores perpendiculares:



pois, assim, a direção para a qual um aponta não tem relação nenhuma com a direção do outro<sup>23</sup>. Isso significa que a forma correta de somar os desvios, no nosso caso de duas medidas, é o Teorema de Pitágoras:

$$(\delta g)^2 = (\delta g_1)^2 + (\delta g_2)^2$$

Então, uma estimativa mais razoável para o desvio seria

$$\Delta g = \sqrt{\frac{(g_1 - \bar{g})^2 + (g_2 - \bar{g})^2}{2}}$$

no caso de duas medidas, e

$$\Delta g = \sqrt{\frac{\sum (g_i - \bar{g})^2}{N}}$$

no caso de N medidas, já que uma grande quantidade de medidas deve contribuir para diminuir o desvio.

Mas, então, um problema mais sutil se mostra: para o caso de uma medida apenas, a média seria a própria medida e a estimativa do desvio, novamente, zero. E isso precisamente quando não é possível dar estimativa nenhuma para o desvio! Para contornar essa dificuldade, assume-se como estimativa do desvio a quantidade

$$\Delta g = \sqrt{\frac{\sum (g_i - \bar{g})^2}{N - 1}}$$

que é o desvio padrão apresentado em (D-5).

Referências: ???\*\*\*

### APÊNDICE 3 – Gravidade e Geologia

O texto que segue é uma tradução do conjunto de textos apresentados nas referências [1-8].

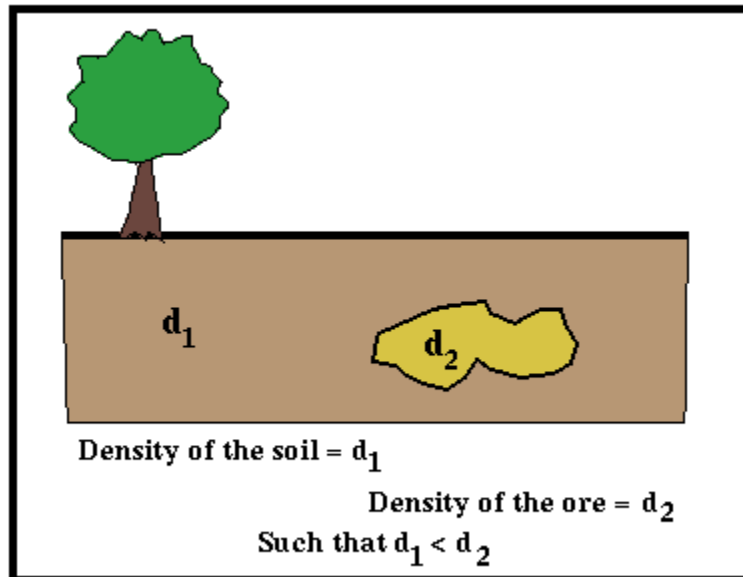
a) tradução

<sup>23</sup> Este é, provavelmente, o argumento mais difícil de se aceitar nesta “dedução”. Para compreendê-lo, imagine o caso em que os vetores não são perpendiculares; então, o vetor correspondente a  $\delta s_2$  poderia ser representado como a soma do vetor correspondente a  $\delta s_1$  com outro, perpendicular a  $\delta s_1$ . Assim,  $\delta s_2$  e  $\delta s_1$  não seriam completamente independentes; a única maneira de isso acontecer, portanto, é com vetores perpendiculares entre si.

Como a aceleração gravitacional,  $g$ , está relacionada à geologia?

*Densidade* é definida como massa por a unidade de volume. Por exemplo, se nós tivéssemos que calcular a densidade de uma sala cheia de pessoas, a densidade seria dada pelo número médio de pessoas por unidade de volume (por exemplo, por o pé cúbico) e teria a unidade de pessoas por o pé cúbico. Quanto mais pessoas na sala, mais próximas elas estão umas das outras. Assim, nós diríamos que o quarto está com uma densidade maior de pessoas. As unidades usadas tipicamente para descrever a densidade das substâncias é gramas por o centímetro cúbico ( $g/cm^3$ ); massa por a unidade de volume. Relacionando a nossa analogia do quarto às substâncias, nós podemos usar [os pontos de massa](#) descritos mais cedo como usamos as pessoas.

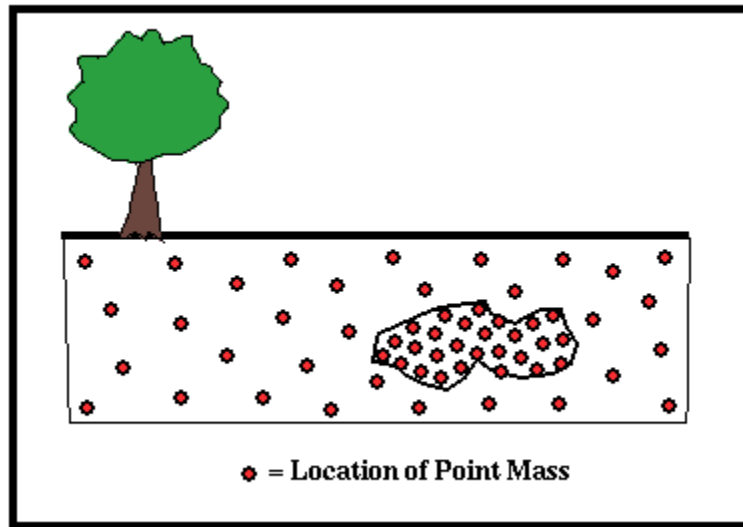
Considere um exemplo geológico simples de um corpo de minério enterrado no solo. Nós esperaríamos a densidade do corpo de minério,  $d_2$ , ser maior do que a densidade do solo circunvizinho,  $d_1$ .



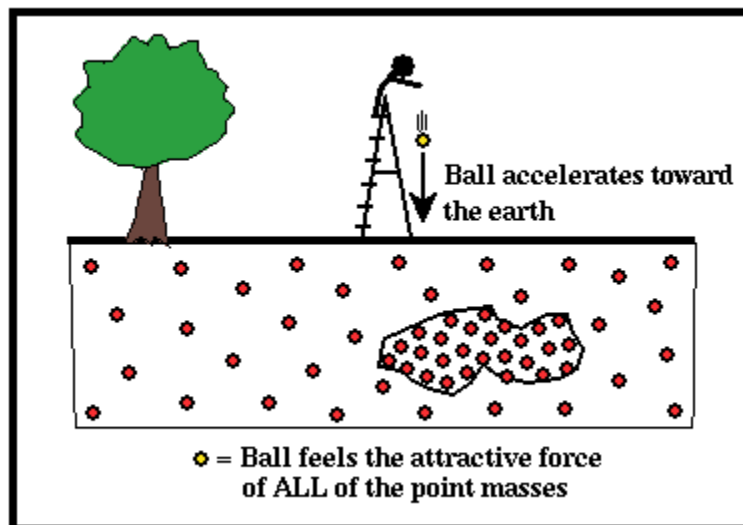
A densidade do material pode ser pensada como de um número que quantifica quantos pontos de massa por a unidade de volume é necessário se reunir para representar o material, assim como o número de pessoas por o pé cúbico no exemplo dado acima descrevia quão lotado uma certa sala era. Assim, para representar um corpo de minério de grande densidade, nós precisamos de mais pontos de massa por unidade de volume do que para o solo de uma densidade mais baixa\*.

\* Nesta discussão nós supomos que todos os pontos de massa têm massa igual.



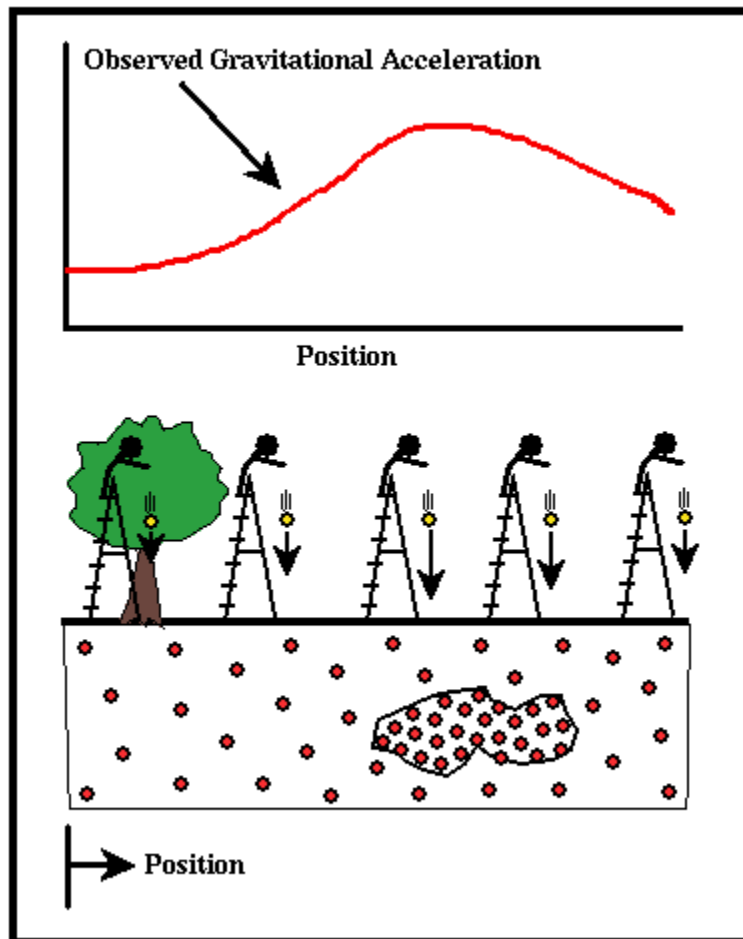


Agora, vamos descrever qualitativamente a aceleração gravitacional experimentada por uma esfera que é deixada cair de uma escada. Esta aceleração pode ser calculado medindo [a taxa de variação da velocidade no tempo](#) da esfera enquanto cai. A intensidade da aceleração que a esfera se submete será proporcional ao número das massas próximas do ponto que estão diretamente abaixo dela. Nós nos importamos com os pontos de massa próximos porque [o valor do aceleração gravitacional](#) diminui com o quadrado da distância entre a esfera e o ponto de massa. Quanto mais próximos estiverem os pontos de massa diretamente abaixo da esfera, maior sua aceleração será.



Nós poderíamos, então, deixar a esfera cair de um número de posições diferentes, e, porque o número de pontos de massa abaixo da esfera varia com a posição em que é deixada cair, mapear as diferenças na intensidade da aceleração gravitacional experimentada pela esfera

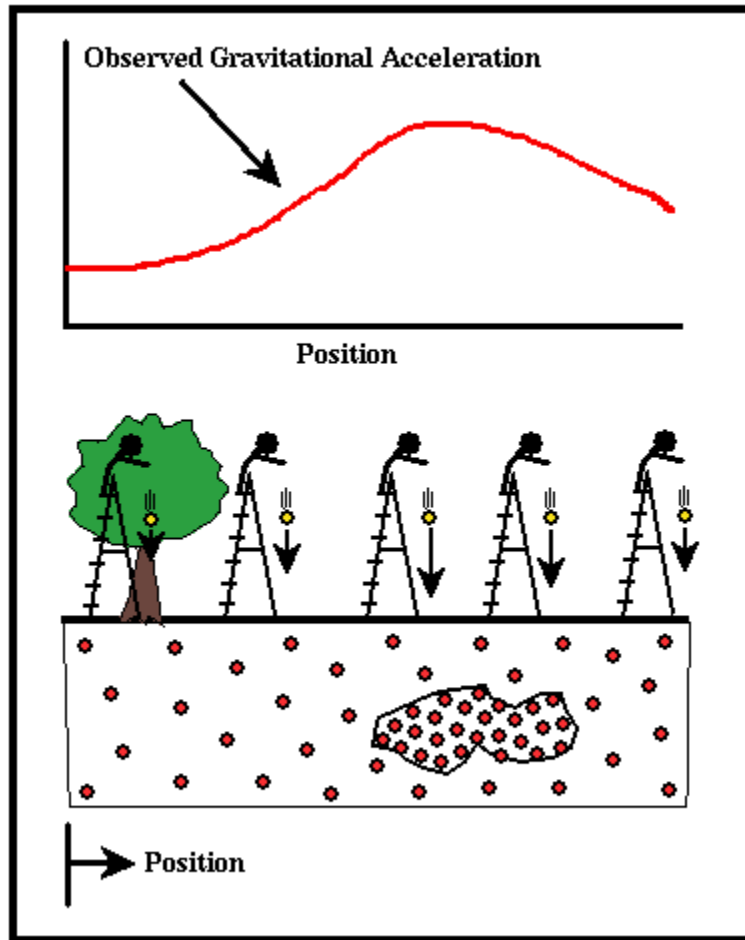
causadas por variações na geologia subjacente. Um gráfico da aceleração gravitacional pela a posição costuma ser chamado de *perfil de gravidade*.

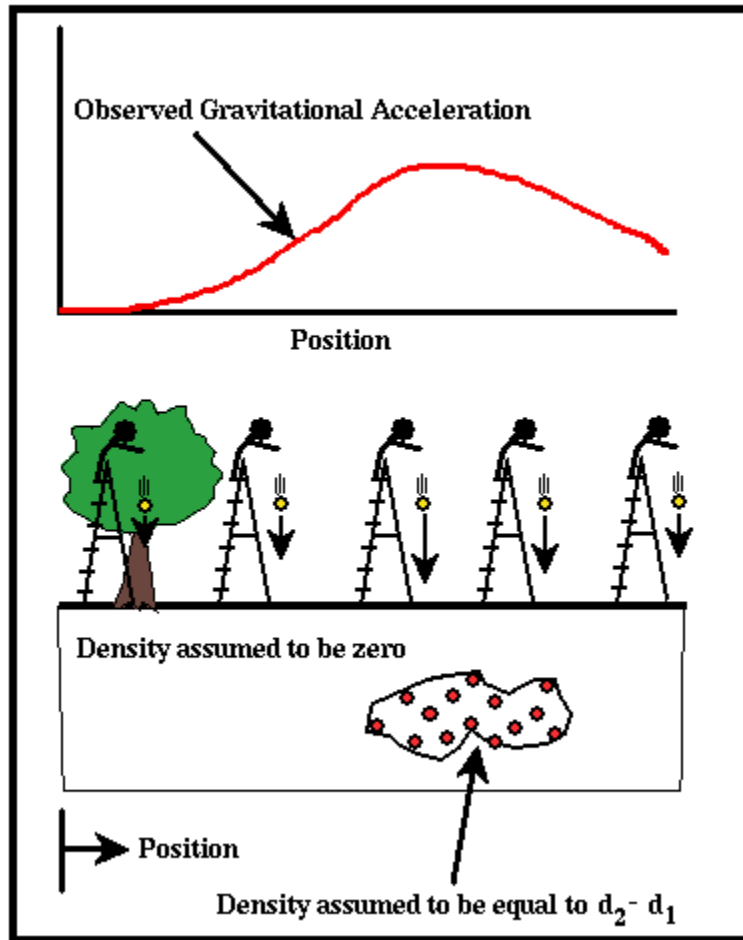


Esta experiência mental simples dá a base física da exploração da gravidade.

O parâmetro geológico relevante não é densidade, mas contraste de densidade.

Ao contrário do que você poderia pensar inicialmente, a forma da curva que descreve a variação na aceleração gravitacional não depende das densidades absolutas das rochas. Ela depende apenas da diferença entre as densidades (chamada geralmente de *contraste de densidade*) entre o corpo de minério e o solo circunvizinho. Isto é, a variação espacial da aceleração gravitacional gerada no nosso [exemplo anterior](#) seria exatamente a mesma se imaginássemos densidades diferentes para o corpo de minério e o solo circunvizinho, contanto que o contraste da densidade,  $d_2 - d_1$ , entre o corpo de minério e o solo se mantenham constantes. Um exemplo de modelo que satisfaça a esta é a densidade do solo ser zero e a densidade do corpo de minério ser  $d_2 - d_1$ .





A única diferença nas acelerações gravitacionais produzidos pelas duas estruturas mostradas acima (uma dada pelo modelo original e uma dada ajustando a densidade do solo a zero e do corpo de minério ao  $d_2 - d_1$ ) é um deslocamento na curva derivada dos dois modelos. O deslocamento é tal que, a distâncias grandes do corpo de minério, a aceleração gravitacional se aproxima de zero no modelo que usa uma densidade do solo nula ao invés do valor constante não-nulo do qual a aceleração se aproxima no modelo original. Para identificar a posição do corpo de minério, a aceleração gravitacional se aproximar de zero ou não longe do corpo de minério não importa. O que importa é o tamanho da *diferença* na aceleração gravitacional próximo ao minério e longe do minério e a forma da variação espacial da aceleração gravitacional.

Assim, o último modelo, que emprega somente o contraste da densidade do corpo de minério ao solo circunvizinho, contém toda a informação necessária para identificar a posição e a forma do corpo de minério.

---

\* É comum usar expressões como *campo da gravitacional* como um sinônimo para a aceleração gravitacional.

### *Variações da densidade de materiais da terra*

Até aqui, estimar a variação na densidade da terra devido às mudanças locais na geologia soa como uma proposição razoavelmente simples. Há, entretanto, diversas complicações significativas. A primeira tem a ver com os contrastes de densidade medidos para vários materiais da terra.

As densidades associadas com os vários materiais da terra são mostradas abaixo.

<b>Material</b>	<b>Densidade (g/cm<sup>3</sup>)</b>
<b>Ar</b>	<b>~0</b>
<b>Água</b>	<b>1</b>
<b>Sedimentos</b>	<b>1,7-2,3</b>
<b>Arenito</b>	<b>2,0-2,6</b>
<b>Xisto</b>	<b>2,0-2,7</b>
<b>Pedra calcária</b>	<b>2,5-2,8</b>
<b>Granito</b>	<b>2,5-2,8</b>
<b>Basaltos</b>	<b>2,7-3,1</b>
<b>Rochas Metamórficas</b>	<b>2.6-3.0</b>

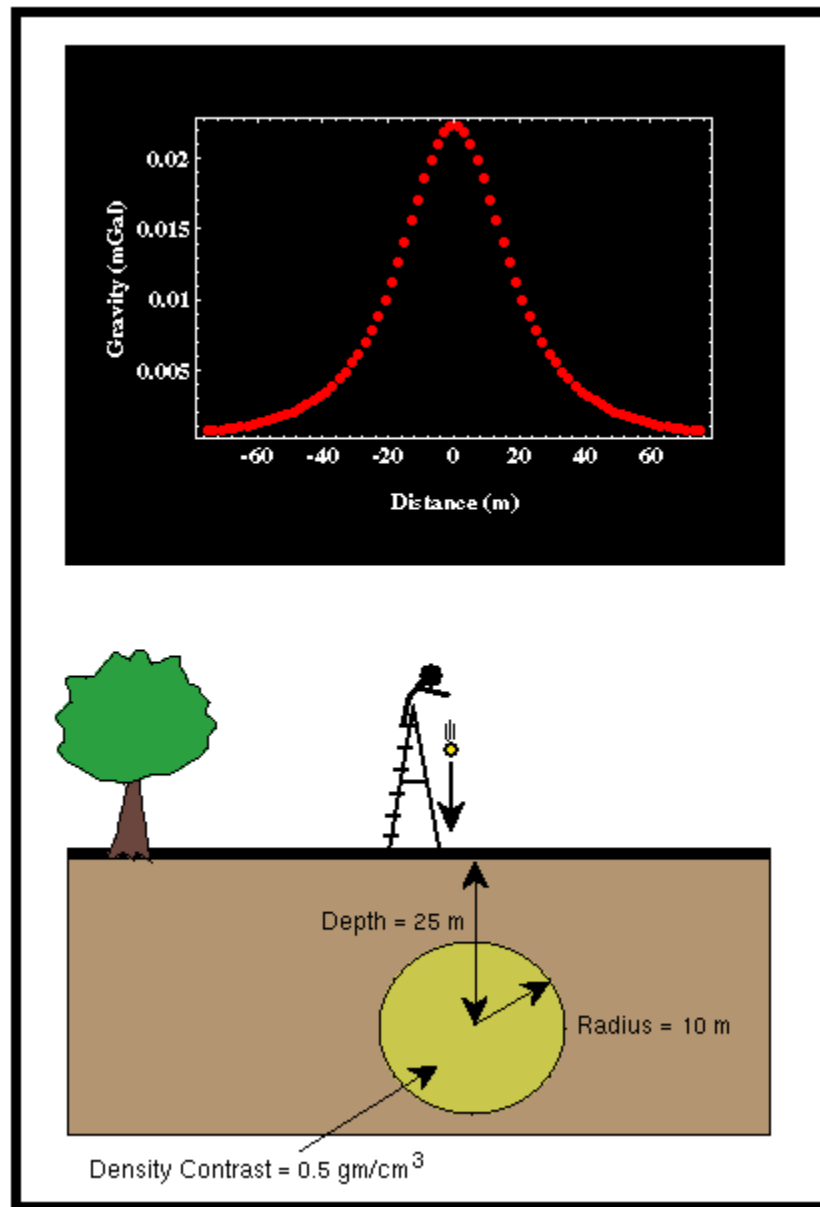
Observe que a variação relativa na densidade da rocha é muito pequena,  $\sim 0.8 \text{ g/cm}^3$ , e há uma sobreposição considerável nas densidades medidas. Assim, o conhecimento da densidade da rocha sozinho não será suficiente determinar o tipo de rocha.

Esta variação pequena na densidade da rocha implica também que as variações espaciais na aceleração gravitacional observada causadas por estruturas geológica serão muito pequenas e, assim, difíceis de detectar.

Uma unidade da densidade que está ganhando influência é a tonelada por o metro cúbico, ( $\text{t/m}^3$ ), que é numericamente o mesmo que  $\text{g/cm}^3$ , e conforma-se às convenções do SI. Esta é também uma unidade útil em relacionar volumes "visuais" com massas. A unidade formal do SI é o quilograma por o metro cúbico.

### *Um Modelo Simples*

Considere a variação na aceleração gravitacional que seria observada num modelo simples. Para este modelo, vamos supor que a única variação na densidade na subsuperfície é devido à presença de um corpo de minério pequeno. Suponha que o minério tem uma forma esférica com um raio de 10 metros, e está enterrado em uma profundidade de 25 metros abaixo da superfície, com um contraste da densidade às rochas que o cercam de 0,5 gramas por o centímetro cúbico. [Da tabela de densidades da rocha](#), observe que o contraste escolhido da densidade é realmente razoavelmente grande. Os detalhes de como [a aceleração gravitacional foi computada](#) não são, agora, importantes.



Há diversas coisas a observar sobre a anomalia gravitacional\* produzida por esta estrutura.

- A anomalia gravitacional produzida por uma esfera enterrada é simétrica sobre o centro da esfera.
- O valor máximo da anomalia é extremamente pequeno. Para este exemplo, 0,025 [mGals](#). [1Gal = 1cm / s<sup>2</sup>]
- O valor da anomalia gravitacional se aproxima de zero a distâncias horizontais pequenas (~60 metros) do centro da esfera.

Mais tarde, nós exploraremos como o tamanho e a forma da anomalia gravitacional são afetados pelos parâmetros modelo tais como o raio do corpo de minério, de seu contraste da

densidade, e de sua profundidade de enterro. Por enquanto, note simplesmente que a anomalia gravitacional produzida por este corpo de minério feito sob medida é pequena. Quando comparado à aceleração gravitacional produzida pela terra como um todo, 980.000 mGals, a anomalia produzida pelo corpo de minério representa uma mudança [no campo gravitacional](#) de somente 1 parte em 40 milhões.

Claramente, uma variação na gravidade tão pequena será difícil de medir. Além disso, outros fatores além da estrutura geológica poderiam produzir as variações na aceleração gravitacional observada tão grandes quanto essa, se não maiores.

---

\* Nós usaremos frequentemente o termo *anomalia gravitacional* para descrever variações no campo gravitacional de fundo produzidas pela estrutura geológica local ou por um modelo da estrutura geológica local.

### *Como nós medimos a gravidade?*

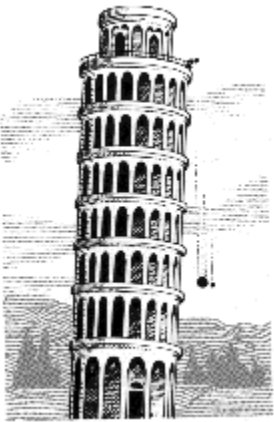
Como você pode imaginar, é difícil construir os instrumentos capazes de medir [anomalias gravitacionais](#) tão pequenas quanto 1 parte em 40 milhões. Há, entretanto, várias maneiras pelas quais isso pode ser feito, incluindo:

- [Medidas de corpo caindo](#). Estes é o tipo de medida que nós descrevemos até este ponto. Alguém deixa cair um objeto e registra diretamente a aceleração que o corpo sofre, medindo com cuidado a distância e o tempo enquanto o corpo cai.
- [Medidas de pêndulo](#). Neste tipo de medida, a aceleração gravitacional é estimada medindo a oscilação do período de um pêndulo.
- [Medidas de massa em mola](#). Suspendendo uma massa em uma mola e observando quanto a mola se deforma sob a força da gravidade, pode-se determinar uma estimativa da aceleração gravitacional.

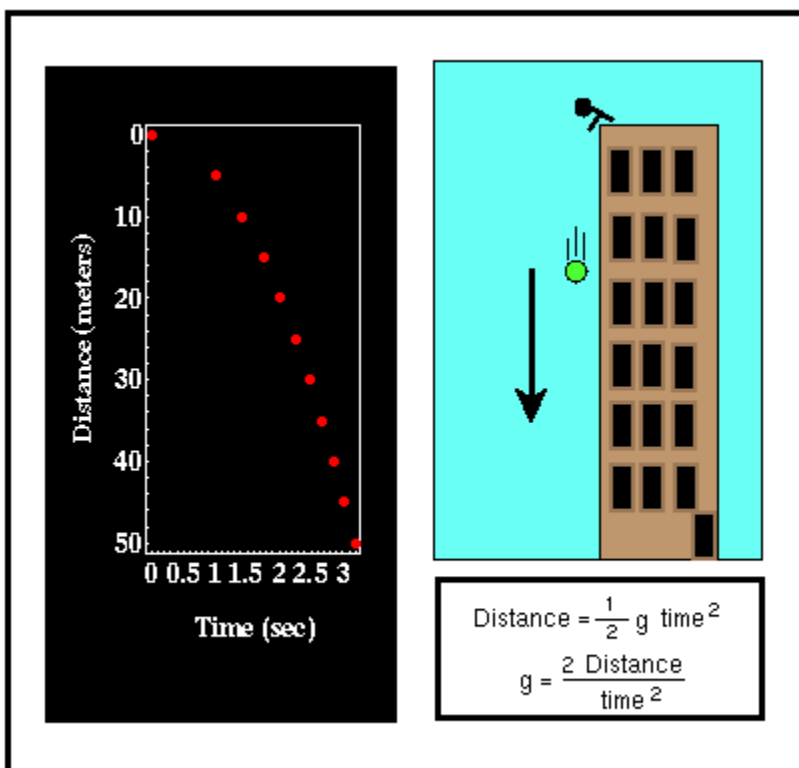
Como será descrito mais tarde, num exame de cada método, as observações de campo geralmente não produzem medidas do valor absoluto da aceleração gravitacional. Ao contrário, nós podemos somente derivar estimativas das variações da aceleração gravitacional. A principal razão para isto é que pode ser difícil caracterizar *o instrumento* de registro bem o bastante para medir variações nos valores absolutos da gravidade de 1 parte em 50 milhões para baixo. Esta, entretanto, não é uma limitação para a exploração da gravidade, já que é somente [a mudança relativa na gravidade](#) que é usada para definir a variação na estrutura geológica.

### *Medidas De Corpo Caindo*

A aceleração gravitacional pode ser medida diretamente deixando cair um objeto e medindo a sua taxa de variação da velocidade no tempo ([aceleração](#)) enquanto cai. Pela tradição, este é o método que nós geralmente atribuímos a [Galileu Galilei](#). Nesta experiência, Galileu supostamente teria deixado objetos de massas diferentes caírem da torre inclinada de Pisa e constatado que a aceleração que gravitaciona a que um objeto se submete é independente de



sua massa. É dito também que ele teria estimado o valor do aceleração gravitacional nesta experiência. Enquanto é verdade que Galileu fez estas observações, ele não usou uma experiência de queda do corpo fazê-las. Ao contrário, usou medidas baseadas [em pêndulos](#).



É fácil mostrar que a distância que um corpo cai é proporcional ao quadrado do tempo que levou para cair. A constante de proporcionalidade é a aceleração gravitacional,  $g$ . Conseqüentemente, medindo distâncias e intervalos de tempo conforme um corpo cai, é possível estimar a aceleração gravitacional.

Para medir mudanças na aceleração gravitacional de 1 parte em 40 milhões para baixo usando um instrumento de tamanho razoável (digamos um que permite que o objeto caia 1 metro), nós precisamos poder medir mudanças na distância de 1 parte em 10 milhões para baixo e mudanças de tempo de 1 parte em 100 milhões para baixo!! Como você pode imaginar, é difícil fazer medidas com este nível da exatidão.

É possível, porém, projetar um instrumento capaz de medir distâncias e intervalos de tempo exatos e de computar mudanças na gravidade absoluta menores que 1 microgal (0,001 mgals; esta é uma exatidão da medida de quase 1 parte em 1 bilhão!!). A [Micro-g Solutions](#) é um fabricante deste tipo de instrumento, conhecido como um *gravitômetro absoluto*. Ao contrário dos instrumentos descritos em seguida, esta classe de instrumentos é tem os único instrumentos de campo projetados para medir a *gravidade absoluta*. Isto é, este instrumento mede o tamanho da componente vertical da aceleração gravitacional em um ponto dado. Como descrito [previamente](#), os instrumentos geralmente usados em explorações são



capazes de medir somente a mudança na aceleração gravitacional de um ponto ao outro, e não o valor absoluto da gravidade em algum um ponto.

Embora os gravitômetros absolutos sejam mais caros do que os tradicionais, gravitômetros relativos e requeiram um tempo maior de ocupação da estação (de 1/2 dia a 1 dia por a estação), o aumento de precisão oferecido por eles e o fato que as [estratégias](#) descritas mais tarde não são necessárias para remover imprecisões do instrumento pode compensar a despesa extra em operá-los. Isto é particularmente verdadeiro quando os projetos de exploração requerem afastamentos grandes da estação ou para as experiências que necessitam de monitoração contínua da aceleração gravitacional em um único lugar. Como um exemplo desta última aplicação, é possível observar subidas da crosta tão pequenas quanto 3 mm ao longo do tempo monitorando a mudança na aceleração gravitacional em uma única posição com um destes instrumentos.

### ***Medidas De Pêndulo***

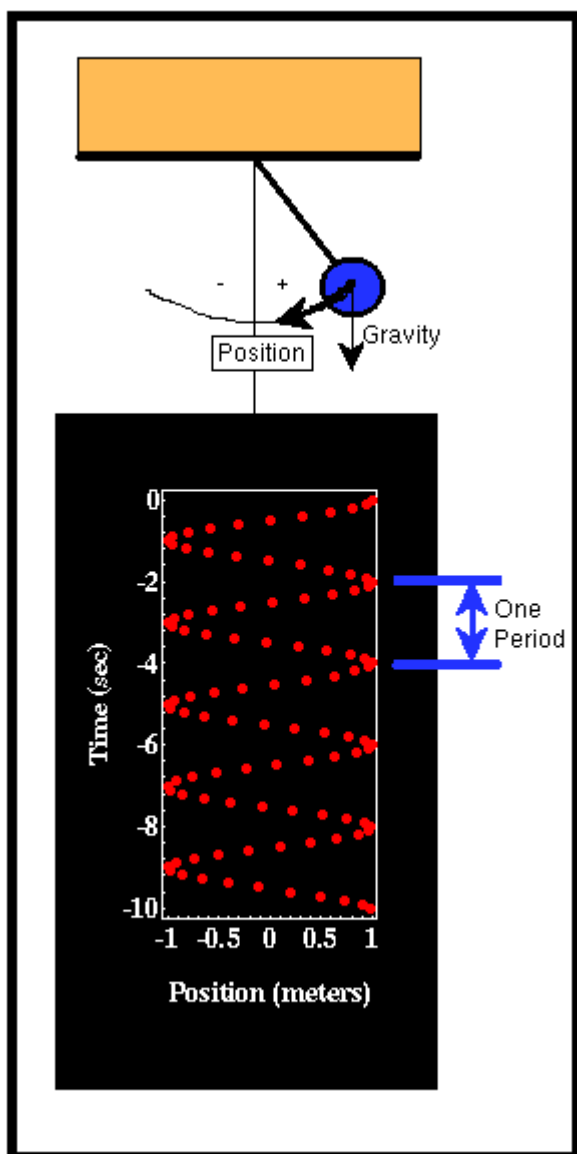
Um outro método pelo qual nós podemos medir a aceleração devida à gravidade é observar a oscilação de um pêndulo, tal como aquele encontrado em relógios antigos. Ao contrário da opinião popular, [Galileu Galilei](#) fez suas famosas observações sobre a gravidade usando um pêndulo, e não deixando cair objetos da torre inclinada de Pisa.

Se nós devêssemos construir um pêndulo simples pendurando uma massa em uma haste e então deslocar a massa da vertical, o pêndulo começaria a oscilar em torno da vertical de uma forma regular. O parâmetro relevante que descreve esta oscilação é conhecido como o período\* da oscilação.

---

\* O período da oscilação é o tempo necessário para o pêndulo terminar um ciclo no seu movimento. Ele pode ser determinado medindo o tempo necessário ao pêndulo para reocupar uma posição dada. Na figura mostrada abaixo, o período da oscilação do pêndulo é de aproximadamente dois segundos.

---



A razão pela qual o pêndulo oscila sobre a vertical é que, se o pêndulo for deslocado, a [força da gravidade](#) o puxa para baixo. O pêndulo começa a mover-se para baixo. Quando o pêndulo alcança a vertical, não pode parar instantaneamente. Ele continua após a vertical e para cima, no sentido oposto. A força da gravidade retarda-o para baixo, até que ele eventualmente pára e começa a cair outra vez. Se não houvesse nenhuma fricção onde o pêndulo está unido ao teto, nem nenhuma resistência do ar ao movimento do pêndulo, isso continuaria assim para sempre.

Porque é a força da gravidade que produz a oscilação, é de se esperar que o período da oscilação mude para valores diferentes da gravidade. Em particular, se a força da gravidade for pequena, há menos força puxando o pêndulo para baixo, o pêndulo move-se mais lentamente para a vertical, e o período observado da oscilação aumenta. Assim, medindo o período da oscilação de um pêndulo, nós podemos estimar a força ou a aceleração gravitacional. Para uma demonstração na qual todas as quantidades relevantes podem ser variadas, clique [aqui](#) [link quebrado].

Pode-se mostrar que o período da oscilação do pêndulo,  $T$ , É proporcional ao inverso da raiz quadrada da aceleração gravitacional,  $g$ . A constante de proporcionalidade,  $k$ , depende das características físicas do pêndulo tais como seu comprimento e a distribuição da massa sobre o ponto de apoio do pêndulo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$$

Assim como na experiência de [corpo caindo](#), descrita acima, parece que seria fácil determinar a aceleração gravitacional medindo o período de oscilação. Infelizmente, poder medir a aceleração a 1 parte em 50 milhões requer uma estimativa muito exata da constante  $k$ .  $K$  não pode ser determinada com precisão suficiente para fazer isso.

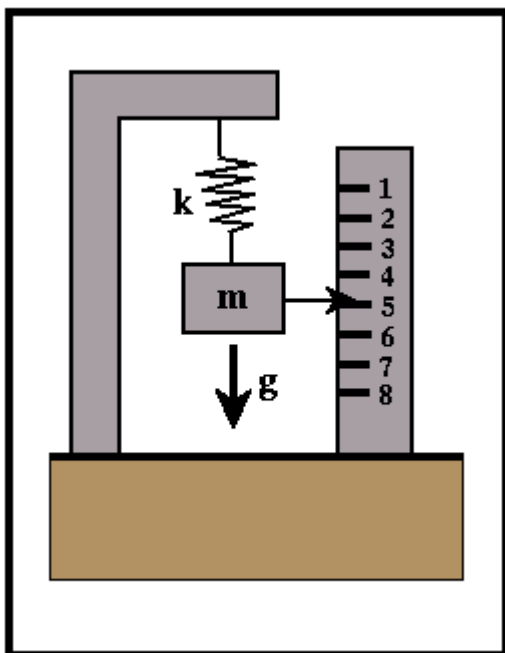
Mas nem tudo está perdido. Nós poderíamos medir o período da oscilação de um dado pêndulo em duas posições diferentes. Embora nós não possamos estimar  $k$  exatamente o bastante para permitir determinar a aceleração gravitacional em qualquer uma destas posições, porque nós usamos o mesmo pêndulo em ambas, podemos estimar a *variação* da aceleração gravitacional nas duas posições com bastante exatidão sem saber  $k$ .

As variações pequenas no período do pêndulo que nós necessitamos observar podem ser estimadas permitindo que o pêndulo oscile por muito tempo, contando o número de oscilações, e dividindo o tempo de oscilação pelo número de oscilações. Quanto mais

tempo você permitir que o pêndulo oscile, mais exata a sua estimativa do período do pêndulo será. Esta é, essencialmente, uma forma de calcular a média. Quanto mais tempo o pêndulo oscila, mais períodos você terá para calcular a média e obter a sua estimativa do período do pêndulo, e melhor a sua estimativa do período médio de oscilação do pêndulo.

No passado, as medidas de pêndulo foram usadas extensivamente para traçar as variações da aceleração gravitacional ao redor do globo. Mas, como pode levar até uma hora para observar oscilações suficientes para determinar exatamente o período, esta técnica de exploração foi largamente suplantada pela medidas de [massa em mola](#), descritas a seguir.

### *Medidas da gravidade de massa em mola*



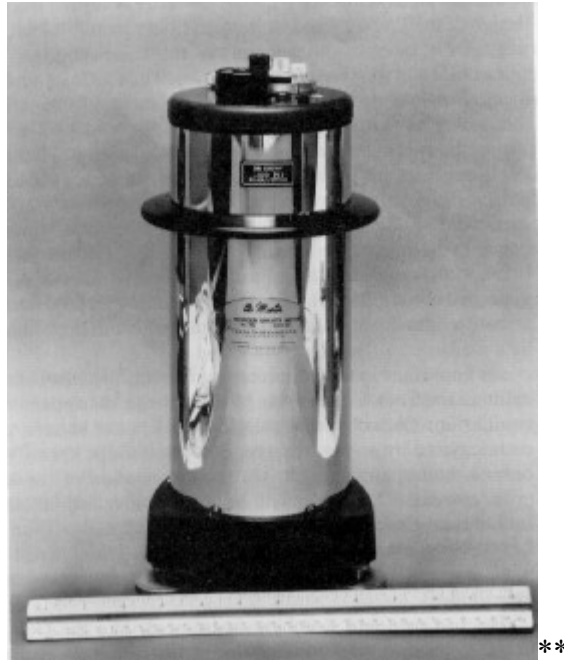
O tipo o mais comum de gravitômetro\* usado em explorações é baseado em um simples sistema massa-mola. Se nós pendurarmos uma massa em uma mola, a força da gravidade esticará a mola por uma quantidade que seja proporcional [à força gravitacional](#). Pode-se mostrar que a constante de proporcionalidade entre o estiramento da mola e a [aceleração gravitacional](#) é o valor da massa pendurada na mola dividida por uma constante,  $k$ , que descreve a rigidez da mola. Quanto maior  $k$ , mais dura é a mola, e menos ela esticará para um dado valor da aceleração gravitacional.

Como nas [medidas com pêndulo](#), nós não podemos determinar  $k$  exatamente o bastante para estimar o valor absoluto da aceleração gravitacional a 1 parte em 40 milhões. Nós podemos, entretanto, estimar variações na aceleração gravitacional de um lugar ao lugar dentro desta precisão. Para poder fazer isto, entretanto, é usado um sofisticado sistema massa-mola, que coloca a massa em um feixe<sup>24</sup> e emprega um tipo especial de mola, conhecido como *mola de comprimento nulo*.

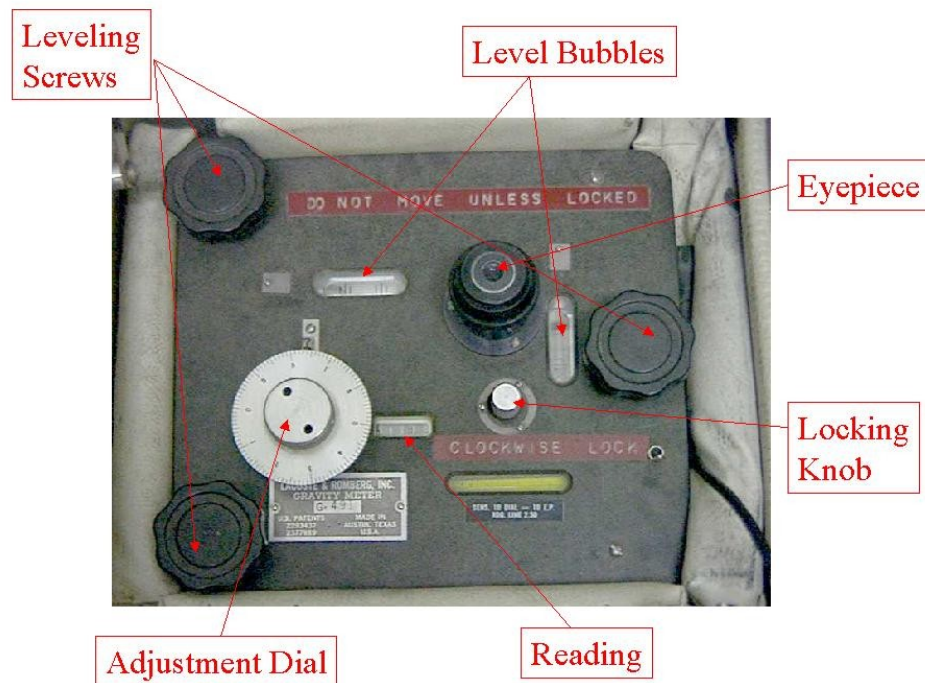
$$x = \frac{m g}{k}$$

Os instrumentos deste tipo são produzidos por diversos fabricantes, incluindo [LaCoste and Romberg](#), [Scintrex \(IDS\)](#), e [Texas Instruments \(Worden Gravity Meter\)](#). Os gravitômetros modernos são capazes de medir mudanças na aceleração gravitacional da terra menores que 1 parte em 1000 milhões. Isto leva a uma precisão de aproximadamente 0,001 mgal. Tal precisão pode ser obtida somente sob circunstâncias ótimas quando os procedimentos recomendados do campo são seguidos com cuidado.

<sup>24</sup> Não sei ao certo o que o texto quer dizer com isso. Ao que me parece, um feixe de laser seria usado para medir o deslocamento da massa com tanta precisão quanto possível. De qualquer forma, o funcionamento exato desse sistema não importa para quem pretende medir  $g$  através de um pêndulo, como é o nosso caso. (NOTA DO TRADUTOR)



Medidor de Gravidade Worden



Medidor de gravidade da LaCoste and Romberg

\* Um gravitômetro é todo o instrumento projetado medir variações espaciais da aceleração gravitacional.

\*\*Figura de *Introduction to Geophysical Prospecting*, M. Dobrin e C. Savit.

b) referências

- [1] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/gtgeo.html>
- [2] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/reldens.html>
- [3] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/densities.html>
- [4] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/simpmod.html>
- [5] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/measgrv.html>
- [6] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/fallb.html>
- [7] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/pend.html>
- [8] <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/spring.html>

Anexo 2 – Site da Internet Sobre o Pêndulo

Reprodução do conteúdo do site  
[http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples\\_HTML.htm](http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2001/pendulo/PenduloSimples_HTML.htm)

# Universidade de São Paulo

Instituto de Física de São Carlos

Licenciatura em Ciências Exatas

Disciplina: Instrumentação para o Ensino

*Pêndulo Simples*



Este trabalho consiste em apresentar uma [breve história](#) sobre a contagem do tempo e sobre o revolucionário *Pêndulo Simples*, com [aplicações físicas](#) e um exemplo prático de como utilizá-lo para medir com precisão a [aceleração da gravidade](#) .

***Aluno:*** Manoel Batista Pratavieira

***Prof. Dr.:*** Dietrich Schiel

**São Carlos, setembro de 2001**

## **Um pouco de História das incríveis máquinas do tempo**

**Sol, água, areia, pêndulo, quartzo e césio, são os principais meios de que o homem já utilizou para a contagem do tempo.**

O mais antigo instrumento para medir a duração do dia foi o relógio solar, como o gnômon egípcio, datado de 3500 a 3000 a.C. Consiste em um mastro vertical ficando sobre uma base. O tempo é medido de acordo com a sombra projetada pelo mastro. Por volta do século VIII a.C., esses instrumentos se tornaram mais preciosos, à medida que marcas passaram a ser inscritas na base onde se projetava a sombra.

Os gregos integraram os relógios solares a sistemas de considerável complexidade, nos quais se mediam os momentos do Sol, da Lua e das estrelas. Nasceu assim o relógio astronômico.

Os progressos na Astronomia ajudaram a aprimorar a medição do tempo. Com a invenção do astrolábio, por Ptolomeu, no século II d.C., tornou-se possível calcular, de acordo com a posição do Sol, a duração do dia ou da noite, assim como prever o levantar e o cair de um astro no firmamento e a hora do crepúsculo e da aurora.

Media-se o tempo pelo ritmo de escoamento de um líquido. Os relógios de água eram usados pelos egípcios para marcar o tempo à noite, ou quando não havia sol. No Museu do Cairo existe um exemplar, fabricado na época do faraó Amenófis III, em 1400 a.C.



Era um recipiente cheio de água, com um pequeno furo no fundo, que deixava escorrer o líquido para outro recipiente, marcado com escalas.

De acordo com o nível da água, podia-se saber o tempo.

Esses instrumentos foram aperfeiçoados por mecanismos que tornavam constante a pressão da água que escoava; por exemplo, a colocação de canos que jogavam continuamente líquido no primeiro reservatório. Um dos mais bem elaborados sistemas da Antigüidade foi a Torre dos Ventos, construída em 75 a.C. aos pés do Partenon, em Atenas uma torre de 20 metros de altura, com nove quadrantes solares, um catavento, uma clepsidra (o nome do relógio a água), além de outros instrumentos. Também os chineses apreciavam esse tipo de relógio. O que foi feito, já no ano de 1090, para o imperador Su Sung indicava as doze horas do dia, tinha um sino que soava a cada quarto de hora e era enfeitado com autômatos.

Mas foi só no primeiro século da era cristã que surgiu o mais conhecido dos medidores de tempo anteriores ao relógio mecânico: a ampulheta.

Ela mede o tempo de acordo com a passagem da areia de um recipiente de vidro para outro, através de uma estreita ligação. Nos séculos XVI e XVII, foram feitas ampulhetas para funcionar durante períodos de quinze e trinta minutos.

Poucos inventos moldaram tanto o mundo moderno como o relógio mecânico, surgido no século XIV. Ele tornou possível a civilização industrial e fixou a idéia de desempenho na atividade humana.

Até Idade Média, o tempo era percebido como uma coisa natural. Ao inverno seguia-se a primavera, o verão; a manhã vinha depois da madrugada, que por sua vez sucedia à noite, a contagem do tempo se fazia por longos períodos, meses e anos, materializados nos calendários.

Nos conventos, especialmente, nem hora existia. O dia era dividido de acordo com o ritual dos ofícios. Como não havia uma medida universal, cada convento tinha sua hora, assim como cada cidade vivia segundo seu ritmo.

O relógio mecânico figura entre as supremas invenções da humanidade, sendo da mesma ordem que a da imprensa, por suas conseqüências revolucionárias em relação aos valores culturais, às mudanças técnicas, à organização política e social e à personalidade. Foi o relógio que tornou possível uma civilização atenta ao tempo portanto à produtividade e ao desempenho.

E o que diferenciou tecnicamente o relógio mecânico dos que o antecederam? Antes de mais nada, o relógio mecânico é movido por um peso. A energia da queda desse peso é transmitida através de um trem de engrenagem, formado por rodas dentadas que se encaixam umas nas outras e movimentam as agulhas do mostrador. O problema é que uma força aplicada continuamente produz uma aceleração. Logo, se nada se opusesse à descida do peso, ele imprimiria um movimento cada vez mais rápido à engrenagem. O que os sábios da Idade Média descobriram foi justamente um dispositivo de retardamento capaz de bloquear o peso e frear o movimento das rodas e agulhas, de modo a criar um movimento de oscilação com um batimento regular o vaivém contínuo característico dos relógios.

Isso foi possível graças a uma pecinha composta de duas palhetas presa a um eixo horizontal móvel, que se engrenam alternadamente sobre uma roda em forma de coroa dentada (chamada roda de encontro), localizada verticalmente sobre um eixo que se move sob o efeito do peso. Os impulsos alternados provocados pela roda de encontro fazem a pecinha

oscilar sobre seu eixo de maneira regular; este movimento, então, é transmitido ao trem de engrenagem, que movimenta as agulhas. O aparecimento, dos primeiros relógios mecânicos causou uma febre nas cidades européia que começavam a sacudir a modorra medieval. Cada burgo queria ter seu relógio não apenas por uma questão de prestígio, mas também porque a atração trazia viajantes, portanto dinheiro, para a localidade.

Já para os operários das cidade mais desenvolvidas, principalmente na Itália e em Flandres, onde já existiam uma florescente indústria têxtil, um movimentado comércio, a novidade não era assim tão boa. O relógio passou a encarnar a autoridade que impunha as horas de trabalho e mais importante ainda exigia determinada produtividade ao longo da jornada. Em algumas cidades, os operários chegaram a se rebelar contra isso. Por exemplo, em Pádua, em 1390, a torre que abrigava o relógio de Dondi foi atacada.

Em 1656, na cidade de Haia, Holanda, Christian Huygens (1629-1695) concebeu um relógio de pêndulo com escapo, que substituiu o fuso como instrumento regulador da força da mola. Ao contrário dos outros progressos da relojoaria, porém, essa invenção foi antes de tudo teórica. No lugar do fuso regulador da mola-motor, Huygens imaginou um pêndulo, suspenso livremente por um cordão ou um fio. Esse achado reduziu a margem de erro dos relógios de cerca de quinze minutos por dia para meros dez ou quinze segundos, o relógio se tornou enfim um instrumento realmente confiável para medir o tempo.

A Revolução Industrial do século XVIII na Inglaterra deu uma nova importância à hora. As relações de produção passaram a se fazer de maneira mais sistematizada, com a reunião dos operários dentro de

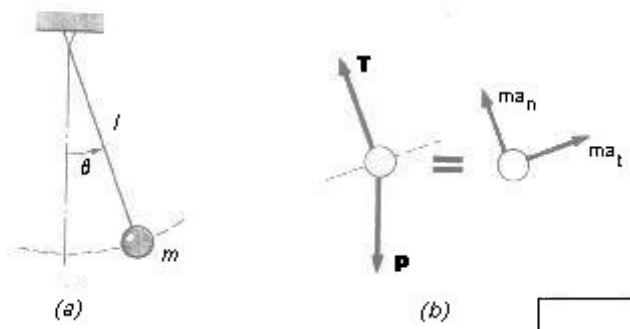
fábricas. Habitados ainda a trabalhar segundo seu próprio ritmo, de acordo com a tradição herdada das corporações de ofício dos artesãos medievais, os operários se revoltaram contra as implacáveis máquinas do tempo. Com a desconfiança de que os patrões roubavam nas horas, adiantando ou atrasando, os operários começaram a adquirir seus próprios relógios, com isso a indústria de relógios cresceu e estes tornaram-se mais baratos a medida que sua produção tornou-se seriada. Nada, porém, popularizaria tanto o relógio como uma descoberta de 1880. Os irmãos Pierre e Jacques Curie, cientistas franceses, descobriram que um pedaço de cristal de quartzo, cortado na forma de uma lâmina ou de um anel e colocado a vácuo num circuito elétrico e em baixa temperatura, vibra 32758 vezes por segundo, como um pêndulo ultra-rápido.

Em 1925, pesquisadores dos Laboratórios Bell, nos Estados Unidos, construíram o primeiro oscilador a quartzo. Mas, então, os relógios a quartzo eram ainda quase tão grandes quanto uma geladeira e assim permaneceriam por muito tempo. Pode-se considerar o 9º. Congresso Internacional de Cronometria, em Paris, em setembro de 1969, como a verdadeira data de nascimento da indústria do relógio a quartzo. Pois foi ali que a empresa japonesa Seiko apresentou seu primeiro modelo eletrônico.

O relógio a quartzo tinha dado um golpe mortal na indústria relojoeira clássica assim como o relógio atômico a césio tiraria do observatório de Greenwich, na Inglaterra, o privilégio de fornecer a hora oficial do mundo.

## **A física aplicada no Pêndulo Simples**

Um pêndulo simples é um corpo ideal que consiste de uma partícula suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscilará em um plano vertical sob à ação da gravidade; o movimento é periódico e oscilatório, sendo assim podemos determinar o período do movimento.



A figura acima exemplifica um pêndulo de comprimento  $L$ , sendo  $m$  a massa da partícula. No instante mostrado, o fio faz um ângulo  $\theta$  com a vertical. As forças que atuam em  $m$  são o peso  $m.g$  e a tração da corda  $T$ . O movimento será em torno de um arco de círculo de raio  $L$ ; por isto, escolheremos um referencial em que um dos eixos seja radial e o outro tangente ao círculo. O peso  $m.g$  pode ser decomposto numa componente radial de módulo  $m.g.\cos\theta$  e numa componente tangencial  $m.g.\sen\theta$ . A componente radial da resultante é a força centrípeta que mantém a partícula na trajetória circular. A componente tangencial é a força restauradora onde o sinal negativo indica que  $F$  se opõe ao aumento de  $\theta$ .

Note que a força restauradora não é proporcional ao deslocamento angular  $\theta$  e sim a  $\sen\theta$ . O movimento portanto não é harmônico simples. Entretanto, se o ângulo  $\theta$  for suficientemente pequeno,  $\sen\theta$  será aproximadamente igual a  $\theta$  em radianos, com diferença cerca de 0,1% e

o deslocamento ao longo do arco será  $x = L \cdot \theta$  e, para ângulos pequenos, ele será aproximadamente retilíneo. Por isto, supondo  $\text{sen } \theta \approx \theta$ ,

Obteremos:

$$F = - m \cdot g \cdot \theta = - m \cdot g \cdot (x/L) = - (m \cdot g/L) \cdot x \quad (2)$$

Para pequenos deslocamentos, a força restauradora é proporcional ao deslocamento e tem o sentido oposto. Esta é exatamente a condição para se ter movimento harmônico simples e, de fato, a equação (2) acima tem a mesma forma que a equação,  $F = - k \cdot x$ , com  $m \cdot g/L$  representando a constante  $k$ . Para pequenas amplitudes, o período  $T$  (*tempo de um ciclo*) de um pêndulo pode ser obtido fazendo-se  $k = m \cdot g / L$

$$T = 2\pi (m / k)^{1/2} = 2\pi (m / (m \cdot g / L))^{1/2}$$

$$T = 2\pi (L / g)^{1/2}$$

O Pêndulo Simples, através da equação acima, também fornece um método para medições do valor de  $g$ , a aceleração da gravidade.

Podemos determinar  $L$  e  $T$ , usando equipamentos de um laboratório de ensino, obtendo precisão melhor do que 0,1%.

$$g = 4\pi^2 L / T^2$$

*Note que o período  $T$ , é independente da massa  $m$ , da partícula suspensa.*

Durante os últimos três séculos, o pêndulo foi o mais confiável medidor de tempo, sendo substituído apenas nas últimas décadas por oscilações atômicas ou eletrônicas. Para um relógio de pêndulo ser um medidor de tempo preciso, a amplitude do movimento deve ser mantida constante apesar de as perdas por atrito afetarem todo o sistema mecânico, Variações na amplitude, tão pequenas quanto  $4^\circ$  ou  $5^\circ$ , fazem um relógio adiantar cerca de 15 segundos por dia, o que não é tolerável mesmo em um relógio caseiro. Para manter constante a amplitude é necessário

compensar com um peso ou mola, fornecendo energia automaticamente, compensando as perdas devidas ao atrito.

## Determinando a aceleração da gravidade

Utilizando material muito simples, pode-se medir com boa precisão a aceleração da gravidade local, bem como introduzir o método científico a partir de situações experimentais, esta experiência é muito interessante para os alunos.

### MATERIAL:

- Chumbadas de pesca com diferentes pesos, por ex.: 50, 100 e 200 g;
- Linha de pesca, que seja inextensível com os pesos citados acima;
- Uma fita métrica ou outro meio para medir em (mm);
- Um transferidor para medir o ângulo.

### MÉTODO:

Os pesos de chumbo já são perfurados ao meio, o que torna-os fácil de serem amarrados por uma linha de pesca. Uma vez fixado o peso de chumbo, corte a outra extremidade da linha maior que 2m, amarrando-a com um laço em um prego fixo na parede ou numa tábua, com altura acima de 2m, deixando um comprimento  $L$  entre o centro do chumbo e o ponto amarrado 2m de extensão, constituindo-se num bom pêndulo simples. Estas operações são muito simples e podem ser feitas pelos alunos, sem restrição quanto ao diâmetro de linha de pesca (identificado pelo número no carretel e os pesos utilizados).

É bom que os alunos já tenham experiências prévias de medição de espaço com fita métrica e de tempo com relógio de pulso que marque segundos, caso contrário pode-se solicitá-los a fazer algumas medidas de dimensões de alguns objetos e de tempo de algum movimento. Com o pêndulo em funcionamento pode-se pedir aos alunos que relacionem as variáveis envolvidas no fenômeno, tais como: o tempo de ida e volta, ou seja o período, o comprimento do fio, a massa das chumbadas (tendo-se uma balança por perto, podem ser aferidas), o ângulo entre o fio e a vertical, o diâmetro do prego de sustentação, a hora do dia, a temperatura da sala, etc... Com o universo de grandezas definido, pede-se que definam quais delas são relevantes para o período  $T$ . Não é necessário que o professor imponha suas preferências. Se um determinado grupo de alunos (é aconselhável no máximo 3 por experimento) considerar que o comprimento do pêndulo é uma variável irrelevante, sugira-lhe que meçam o período para dois comprimentos bem diferentes, de 2m e 0,5m por exemplo.

Qual a melhor maneira de medir o período? Coloque este problema aos alunos numa situação onde o comprimento do pêndulo é menor que 20cm. Discuta os erros cometidos ao se medir visualmente períodos da ordem de 1s, e o fato de que o período varia muito pouco com 10 oscilações.

Uma das soluções é medir o tempo de 10 oscilações, 3 vezes. As 3 medidas não devem discordar muito entre si, e a média dessas 3 medidas deve ser utilizada. Este tempo médio deve ser dividido por 10, que são as 10 oscilações, do resultado temos com boa precisão o valor do período de uma oscilação, mesmo se utilizando de um simples relógio de pulso. Pode ser que um aluno vá anotando os dados conforme



exemplo da tabela 1 abaixo, outro contando o número de vezes em que o pêndulo vai e volta, e outro cronometrando, sugere-se que a cada medição revezem suas funções.

Determinando o conjunto de observações (ou variáveis) relevantes, resta saber de quais delas depende o período. Para fixarmos idéias vamos nos deter nas variáveis principais: comprimento do fio; massa do chumbo; diâmetro do fio e o ângulo ( $\theta$ ) entre a vertical e o deslocamento inicial do fio. Para conhecer quais variáveis que influenciam o fenômeno, deve se fixar 3 quaisquer variáveis a outra, apesar do período só depender do comprimento do fio geralmente os alunos acreditam que a massa da chumbada influencia o período. Às vezes é conveniente solicitar de antemão que o ângulo  $\theta$  seja inferior a  $20^\circ$  o que pode ser descoberto pelos próprios alunos, pois se abaixo de  $15^\circ$  o período não depende do ângulo inicial, para grandes valores do ângulo  $\theta$  isto já é verdade, basta ver o caso limite de  $\theta = 180^\circ$ , quando o peso torna-se um objeto de queda livre simplesmente.

*Em uma folha separada os alunos podem anotar os dados conforme tabela 1.*

Tabela 1						
$L(m)$	$T1(s)$	$T2(s)$	$T3(s)$	$T=(T1+T2+T3)/3 (s)$	$t(s)=T/10$	variáveis
						$m = ?$
						$d = ?$
						$D = ?$
Fazer alterações em uma variável por vez e manter as outras fixas:						
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m</math> = massa da chumbada</li> </ul>						

- $d$  = diâmetro da linha
- $D$  = diâmetro do prego

Caso exista tempo suficiente pode-se pedir que cada grupo varie as grandezas que fixou anteriormente. Caso isto não seja possível deve-se comparar o resultado com outros grupos que fizeram a experiência com massas diferentes, ângulos  $\theta$  diferentes e fios diferentes, onde deve ficar claro para o aluno que este procedimento é equivalente a variar a massa, o ângulo e o diâmetro da linha por exemplo.

### DISCUSSÃO:

Deve ficar claro para o aluno que o período de um pêndulo, que a princípio poderia depender de muitas observáveis, só depende do comprimento. Essa dependência não é qualquer, mas a razão de  $T^2/L$  é aproximadamente constante, ou seja  $T^2 = k \cdot L$ .

Apesar de que a experiência pode ser desenvolvida para estudantes de qualquer nível a discussão dos resultados e a teoria envolvida depende do conhecimento prévio do aluno. De qualquer modo a confecção de um gráfico linear com  $y = T^2$  ou  $y = m \cdot x$  em função de  $x = L$ , é de grande interesse para alunos de 2º grau.

A aceleração da gravidade  $g$  pode ser obtida através do coeficiente angular  $m$ , dos gráficos com os valores de  $x$  e  $y$  acima e aplicando na equação abaixo:

$$g = 4\pi^2 / m$$

Com a equação abaixo do período  $T$  do pêndulo simples, podemos determinar a aceleração da gravidade  $g$ .

$$T = 2\pi (L / g)^{1/2}$$

$$g = 4\pi^2 L / T^2$$

Uma dedução matemática rigorosa das fórmulas acima não é de todo simples. Em analogia com o movimento harmônico simples pode-se seguir o desenvolvimento em Física Vol. 1 - Beatriz Alvarenga e Antônio Máximo - pg (146), para alunos universitários a dedução proposta por Física -II-I, Halliday-Resnick - seção 15-5, ou outros livros que abordam este assunto.

Apesar da simplicidade de construção, pode-se discutir muitos outros conceitos fundamentais, tais como:

- a) Equivalência entre massa inercial e gravitacional, na dedução das equações acima citadas.
- b) O fato de que o pêndulo simples é um modelo de uma massa pontual, pode-se levar em consideração a que o comprimento medido do pêndulo deve ser entre o ponto de fixação e o ponto médio da massa, ou seja o centro de gravidade. Aqui é uma boa oportunidade de se introduzir o conceito de centro de massa ou gravidade.
- c) Apesar do fato de que o período só depende do comprimento já ser do conhecimento de Galileu, o desenvolvimento do pêndulo simples, e a construção do primeiro relógio deve-se ao cientista amador holandês Cristian Huygens, por volta de 1656. Sua preocupação principal era construir um aparelho que solucionasse um problema fundamental na navegação marítima, que era a determinação da longitude em qualquer lugar no oceano. Pode-se discutir entre os alunos de como às vezes alguns desenvolvimentos técnicos e científicos partiram da necessidade humana de resolver problemas concretos.
- d) A construção de um pêndulo que bate segundos poderá ser uma ótima atividade para casa.

e) A discussão do pêndulo composto, do pêndulo de Foucault é outro desenvolvimento possível.

f) É de grande utilidade uma discussão sobre algarismo significativos e gráficos, através de uma análise de dados obtidos.

Com esta prática podemos explicitar aos alunos algumas observações como: o período do pêndulo depende da gravidade, e que uma das principais propriedades do pêndulo é a regularidade das suas oscilações. Por este motivo, os pêndulos eram usados em relógios. Observamos também que a massa do pêndulo não influencia no resultado do período, mas o comprimento sim, por isso é que os relógios de maior precisão, possuem o pêndulo de maior comprimento.

### Referências Bibliográficas

- **Veríssimo**, Suzana; Máquinas do Tempo. *Super Interessante* - *SUPER número 9, ano 2*, setembro de 1988.
- **Ralliday**, David; **Resnick**, Robert; **Krane**, kenneth S. . *Física 2*. 4ª edição. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.
- **Brito**, A.A.; O Pêndulo Simples, <http://www.ufpel.tche.br/~histfis/pendulo.htm>.
- Pesquise mais sobre, **Pendulum**, <http://www.howstuffworks.com/clock.htm>.

### Anexo 3 – Introdução ao Cálculo Diferencial

Texto inicialmente concebido para servir de apêndice para o guia.  
[EM SEPARADO]