

Relatório Final
F 809 Instrumentação para Ensino

Projeto de ondas estacionárias circulares



Aluno: Luis Fernando Katsuda Ito Cypriano (RA: 016684)
Orientador: Prof.: Fernando Jorge da Paixão Filho
Coordenador: Prof.: José Joaquin Lunazzi

Unicamp, IFGW

Resumo:

O projeto consiste em apresentar uma onda estacionária gerada em uma tira circular. Esta onda é produzida pelas vibrações de um auto-falante nas frequências características de cada harmônico da tira. São anotadas as frequências que geram ondas estacionárias e quantidade de nós observáveis em tiras de raios diferentes. Com isso confrontamos os dados com a teoria de ondas em meios contínuos.

Introdução:

É muito importante que um aluno de ensino médio tenha conhecimento e familiaridade com o comportamento ondulatório. Este pode descrever inúmeros fenômenos. Entretanto a compreensão fenomenológica e matemática de uma onda são muito complexas. Em particular as ondas estacionárias representam um papel fundamental no conhecimento por serem mais simples de se entenderem pois são ondas que não evoluem no tempo (justamente estacionárias) facilitando a compreensão. As ondas estacionárias também são de grande importância prática, pois resultam de condições limitantes; por exemplo: ao limitar as extremidades da corda de um violão a forçamos vibrar em uma determinada frequência. Sendo assim, o estudo das ondas estacionárias consiste em uma bela introdução ao conhecimento de ondas de uma forma mais geral. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma nova configuração de uma onda estacionária. Sendo esta a onda circular, cuja limitação que impomos é que a onda se repita após uma volta completa, senão ela não seria uma onda estacionária

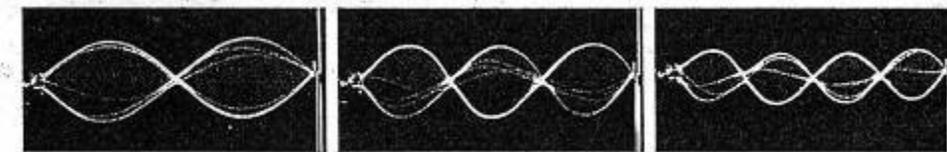


Fig.1- Ao limitarmos o comprimento de uma corda vibrante obtemos ondas estacionárias

.Quando fixamos as extremidades de uma corda e causamos uma perturbação, puxando ela para cima, por exemplo, ela irá vibrar. Esta vibração é uma onda mecânica e tem necessariamente nós em suas extremidades. Como os nós estão fixos na ponta ela só pode vibrar de maneiras específicas, assim como é visto na figura1. Ou seja é como se dividíssemos a corda em um número inteiro de divisões – cada qual corresponde a um nó. Ou em outras palavras, para cada duas divisões associamos um **comprimento de onda**. Essas ondas são ditas estacionárias porque seus nós não evoluem com o tempo, permanecem estacionários.

Então, para uma corda de comprimento L , teremos:

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad n=1,2,3,4,\dots \quad (1)$$

Ou seja, temos um número inteiro vezes meio comprimento de onda igual ao comprimento da corda. Isto significa que os únicos comprimentos de onda permitidos nas vibrações devem dividir perfeitamente a corda em n pedaços.

Como a relação entre o comprimento de onda e a frequência de vibração é dada por:

$$V = \lambda \cdot f \quad (2)$$

V é a velocidade de propagação do som no meio que a onda é produzida. Então teremos:

$$f = \frac{1}{2} \frac{nV}{L} \quad n = 1, 2, 3, 4,\dots \quad (3)$$

Este resultado nos diz que não podemos ter qualquer frequência de oscilação, mas somente alguns valores. Como a velocidade de propagação do som e o comprimento da corda são constantes percebemos que a frequência só depende da multiplicidade de n. E ainda mais, n não pode ter qualquer valor, ele é **discreto** só pode ter valor inteiro (um ou dois ou três, etc.). Para cada vibração que temos nestas condições teremos somente a possibilidade de que a corda se encontre no seu n-ésimo harmônico (natural), na fig. 1 podemos observar o segundo, terceiro e quarto harmônico da esquerda para direita.

No caso de uma onda circular, basta imaginar que esta corda seja trocada por um arame e que este tenha suas pontas soldadas. Quando o colocamos a vibrar teremos impondo uma nova condição, desta vez não é que caiba meia onda em seu comprimento simplesmente, mas que de qualquer ponto, após uma volta inteira do aro a onda se repita. Isto implica que agora serão permitidos somente comprimentos de onda que caibam inteiramente ao longo de todo o arco.

Com a condição imposta podemos deduzir que as ondas estacionárias só poderão ter comprimentos de ondas inteiros e são restritos ao seguinte vínculo:

$$n\lambda = L = 2\pi R \quad n = 1, 2, 3, 4,\dots \quad (4)$$

Onde R é o raio médio da onda circular.

E obteremos novamente as frequências permitidas em função dos harmônicos:

$$f = n \frac{V}{2\pi R} \quad n = 1, 2, 3, 4,\dots \quad (5)$$

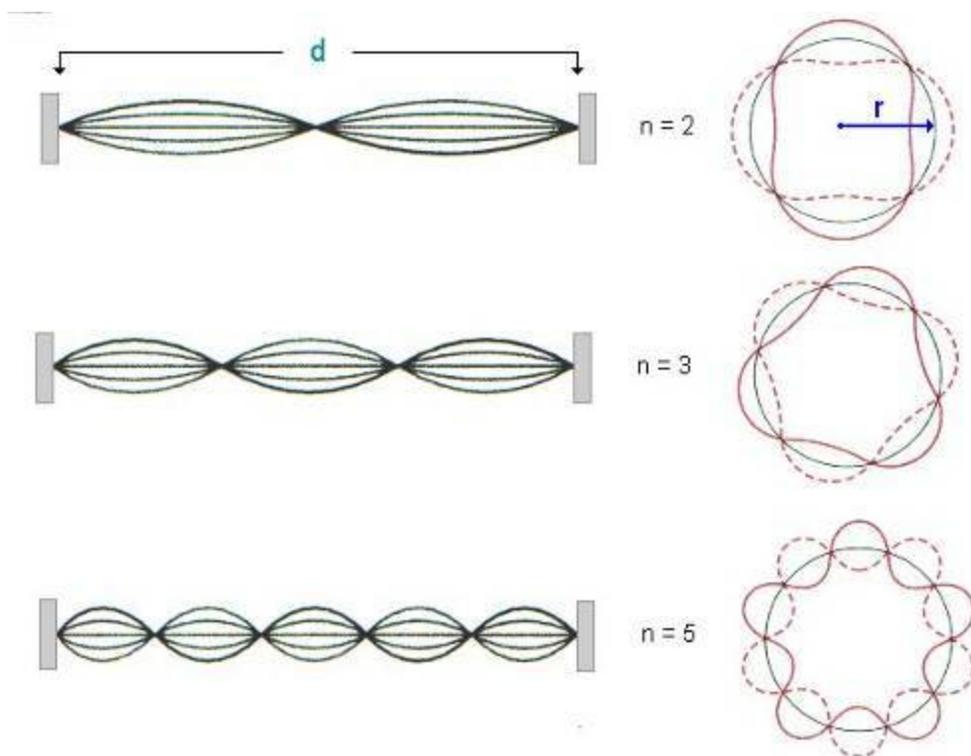


Fig. 2 – Ilustração das configurações permitidas para o caso de ondas estacionárias em uma corda vibrante e em um aro.

Montagem Experimental:

A montagem experimental apresentada inicialmente^[1] foi modificada para uma montagem mais simples, mas de mesmos efeitos, com as seguintes vantagens:

- Por excesso de peso a membrana de um dos auto-falantes rompeu-se, então adotamos uma montagem mais leve.

- A montagem se tornou mais barata e mais simples para que um estudante de ensino médio possa construí-la.

A montagem, por fim, consiste de um auto-falante de 6,5 Ohms (a impedância do auto-falante não altera nenhum resultado experimental, escolhemos este auto-falante por sugestão do vendedor quanto a qualidade da membrana).



Fig.3 – Material utilizado



Fig.4 – Rolo de papel higiênico colado no centro do auto-falante

Não precisamos utilizar a tampa de refrigerante, pois este auto-falante possui um “escudo” no centro da membrana que serve como base.

Substituímos o cilindro de madeira por um rolo de papel higiênico e cortamo-lo ao meio. No topo cortamos duas fendas para que apóie um palito de sorvete em seu diâmetro. Colamos, então, o palito ao rolo e este no “escudo da membrana”. Ao invés de utilizarmos tiras metálicas, optamos por tiras de plásticos de embalagens circulares como embalagens de paçoca, balas, etc...

Utilizamos o osciloscópio e o gerador de frequências do laboratório de ensino LF-25 que nos permitem uma análise e seleção muito precisa quanto as frequências utilizadas.



Fig.5 – Aro de plástico encaixado no suporte.



Fig.6 – Aparato experimental, o auto-falante está ligado a um gerador de frequências e a um osciloscópio.

Resultados experimentais:

Utilizamos duas embalagens produtos diferentes para o experimento. Todas embalagens plásticas e cilíndricas. Recortamos tiras destas embalagens para formar os aros que irão vibrar no auto-falante.

Utilizamos três raios diferentes para cada embalagem, e obtivemos as seguintes frequências:

	Tira 1			Tira 2		
	2 nós	4 nós	6 nós	2 nós	4 nós	6 nós
$R_1 = 5 \text{ cm}$	$f=27\text{Hz}$	-	$f=83\text{Hz}$	$f=26\text{Hz}$	$f=67\text{Hz}$	-
$R_2 = 6 \text{ cm}$	$f=13\text{Hz}$	$f=48\text{Hz}$	$f=66\text{Hz}$	$f=16\text{Hz}$	$f=65\text{Hz}$	-
$R_3 = 7 \text{ cm}$	-	-	$f=41\text{Hz}$	-	-	$f=46\text{Hz}$

Tabela 1 – frequências obtidas para cada arco.

Pela tabela 1 já podemos observar que de fato, quanto maior o raio menor a frequência para o mesmo harmônico. Comportamento já esperado pela eq. (5).

Podemos concluir também que as embalagens possuem propriedades físicas semelhantes, uma vez que suas velocidades de propagação do som devem ser muito próximas, resultando em frequências semelhantes para aros de mesmo raio correspondentes a mesmos harmônicos.

Faremos, entretanto uma nova tabela. Agora para analisar a precisão e as possíveis frequências fundamentais (correspondentes ao primeiro harmônico). Como, para cada comprimento inteiro de onda temos dois nós, dividimos as frequências pela metade do valor do nó correspondente.

	Tira 1			Tira 2		
	2 nós	4 nós	6 nós	2 nós	4 nós	6 nós
$R_1 = 5 \text{ cm}$	$f=27\text{Hz}$	-	$f=27,6\text{Hz}$	$f=26\text{Hz}$	$f=33,5\text{Hz}$	-
$R_2 = 6 \text{ cm}$	$f=13\text{Hz}$	$f=24\text{Hz}$	$f=22\text{Hz}$	$f=16\text{Hz}$	$f=32,5\text{Hz}$	-
$R_3 = 7 \text{ cm}$	-	-	$f=13,6\text{Hz}$	-	-	$f=15,3\text{Hz}$

Tabela 2 – frequências fundamentais obtidas para cada arco

Observamos o mesmo comportamento nesta tabela. As frequências fundamentais decrescem a medida que o raio aumenta.

Apêndices

Ap.1 – Solução para ondas estacionárias em uma dimensão – Corda com extremidades fixas:

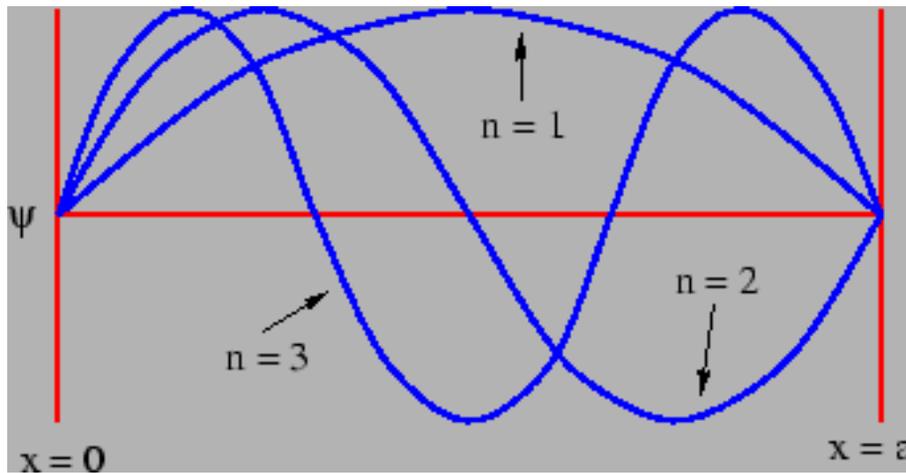


Fig. 7 – configurações possíveis para a corda de comprimento a

Como podemos ver através da fig.7 a onda pode ser descrita como uma senóide, e podemos representa-la pela seguinte função:

$$\Psi(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t) \quad (6)$$

Onde A é a amplitude da onda, K é dado por:

$$k = \frac{\omega}{V} \quad (7)$$

E ω é a frequência angular.

Esta equação já mostra naturalmente que na posição $x = 0$ existe um nó, ou seja $\psi = 0$ também. Vamos, agora, impor a condição de que na posição $x = L$ também tenhamos a função da onda nula, isso implica que:

$$\text{sen}(KL - \omega . t) = 0 \quad (8)$$

Como a onda é estacionária, não depende do tempo, logo:

$$\text{sen}(KL) = 0$$

$$KL = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3\dots$$

$$\frac{\omega}{V}L = n\pi$$

$$\frac{2\pi f}{V}L = n\pi$$

$$f = \frac{1}{2} \frac{nV}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Repare que não consideramos o valor de $n=0$, pois isso significa que não há oscilação, este estado representaria a corda não perturbada. Este é o resultado discutido na introdução deste relatório. Apresentamos, então, em uma linguagem mais formal e através de dedução matemática a validade da eq. (3).

Ap.2 – Solução para ondas estacionárias circulares

Para a dedução das frequências permitidas para uma onda estacionária circular partiremos do seguinte princípio:

Uma onda plana é uma onda de frequência constante cuja frente de onda (superfícies com fase constante) são infinitos planos paralelos, de amplitudes constantes, normais ao vetor velocidade de fase.

Com esta noção, podemos considerar a onda estacionária circular em questão como uma componente de uma onda plana, cuja frente são planos radiais e sempre perpendiculares ao vetor velocidade que é tangencial.

Sabemos que a equação de uma onda plana em uma dimensão é dada por:

$$\Psi(x, t) = \exp[i(Kx - \omega t)] \quad (9)$$

Da mesma forma que no apêndice anterior, nossa onda é estacionária e independente do tempo:

$$\Psi(x) = \exp(iKx) \quad (10)$$

Entretanto em coordenadas polares $x=R\theta$:

$$\Psi(\theta) = \exp(iKR\theta) \quad (11)$$

Aplicando, agora, a condição de que a onda se repita após uma volta completa, $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$:

$$\exp(iKR2\pi) = 1$$

$$\cos(KR2\pi) = 1$$

$$KR2\pi = 2\pi n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$f = n \frac{V}{2\pi R} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Esta é a demonstração da equação(5) admitida anteriormente.

É importante também perceber que a partir das suposições de ondas planas podemos, partindo da eq. (9) deduzir a eq. (8), mas independente do tempo e chegar a mesma conclusão, eq.(3).

Ap.3 – Comparação entre as soluções de onda clássica e a função de onda associada a uma partícula (Schroedinger):

O conhecimento e familiarização do comportamento ondulatório é muito importante para a compreensão e solução de muitos sistemas e problemas. Um exemplo disso está na descrição de certos eventos a nível quântico, cuja descrição abandona a teoria particular e recorre ao comportamento ondulatório.

Este apêndice compara com matemática de ensino superior o comportamento de uma onda mecânica unidimensional, com as funções de onda de matéria. Este apêndice serve para comparação.

Classicamente, para oscilações em uma corda vibrante, independentemente do tempo temos a equação diferencial de helmholtz.:

$$\nabla^2 q + \frac{\omega^2}{V^2} q = 0 \quad (5)$$

Onde q é uma coordenada generalizada.

A solução desta equação com auxílio das condições de contorno de cada problema, nos permite encontrar a equação correta da nossa onda. Onde V é a velocidade do som no meio e ω é a frequência angular.

Lembrando que:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V^2}$$

Da mesma forma a equação de Schroedinger vai nos dar a assistência necessária para formar a função de onda; e sua equação diferencial independente do tempo é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(x)\Psi = E\Psi \quad (7)$$

Onde $V(x)$ é o potencial sobre o qual a partícula sofre ação, m é a massa da partícula e \hbar é a constante de plank dividido por 2π .

A solução destas equações em coordenadas radiais com a condição de contorno necessárias nos permite deduzir que em ambos os casos as ondas estacionárias só poderão ter comprimentos de ondas inteiros e são restritos ao vínculo (4):

É importante perceber que no caso das ondas com extremos fixos, a solução de ondas estacionárias permite comprimentos de onda cujos múltiplos inteiros ou semi-inteiros caibam dentro de L . No caso de uma onda circular teremos somente múltiplos inteiros. Esse resultado é muito importante, pois refletirá nas energias permitidas para um elétron ligado – é fácil observar pela equação de Schroedinger que a solução para a função de onda permitida está intimamente ligada a energia da partícula. Este resultado é uma prova direta que o aprisionamento de um elétron – que consiste em atar sua função de onda em uma simetria esférica – resulta em discretização de sua energia.

Referências:

[1] Feira de Ciências: www.feiradeciencias.com.br

Este site contém vários experimentos lúdicos detalhadamente e comentando seus princípios.

[2] http://www.lightandmatter.com/html_books/3vw/ch03/ch03.html

Este site, em inglês, possui muita informação e exemplos de ondas. Apresenta seções separadas para perturbações em cordas, som e luz e efeito dopler, além de exercícios no final.

[3] *Fundamentos de Física 2*; Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J.

[4] <http://kestrel.nmt.edu/~raymond/classes/ph13xbook/node1.html>

Compêndio didático sobre física moderna, possui seções de ondas, dinâmica de múltiplas partículas e relatividade especial a termodinâmica e física nuclear. Cada capítulo possui uma lista de exercícios como última seção.

[5] Física Quântica; *Eisberg, Robert; Resnick, Robert*

[6] *Classical dynamics of particles and systems; Marion, Jerry B.; Thornton, Stephen T*

[7] www.unb.br/iq/kleber/CursosVirtuais/QQ/aula-7/aula-7.htm

.Aulas do professor Profs. Kleber Mundim da Universidade de Brasília

Anexos:

A-1

Anexo referente a [1].

Ondas estacionárias circulares

(Ondas de De Broglie)

Prof. Luiz Ferraz Netto
leobarretos@uol.com.br

Apresentação

Em 1924, Louis de Broglie propôs uma teoria segundo a qual os elétrons possuem uma [onda associada](#), que influenciaria nas características de seu movimento. A tese de De Broglie foi aperfeiçoada por Erwin Schrödinger, que usou-a para chegar, em 1926, ao que é hoje a mais usada formulação matemática da Mecânica Quântica (a equação de Schrödinger). A teoria ondulatória conseguiu explicar como os elétrons dos átomos não podem possuir qualquer energia, e, conseqüentemente, não podem ocupar qualquer órbita ao redor do núcleo, mas apenas algumas pré-determinadas - um caso particular do fenômeno da quantização da energia. A existência de apenas algumas freqüências permitidas em vibrações de estruturas circulares (no caso dos elétrons, as freqüências de suas "ondas de De Broglie" correspondem às suas energias) é um efeito natural que ocorre com qualquer tipo de onda. Isso pode ser compreendido qualitativamente através do experimento abaixo, que mostra como ondas distribuídas em tiras metálicas circulares só ocorrem em certas freqüências determinadas. O experimento pode ser feito com material acessível a qualquer pessoa.

O experimento

Objetivo

Visualizar ondas estacionárias que se estabelecem sobre um aro metálico flexível; visualizar a formação de sistemas estacionários harmônicos; ilustrar qualitativamente o modelo teórico do elétron-onda e as ondas de De Broglie.

Material

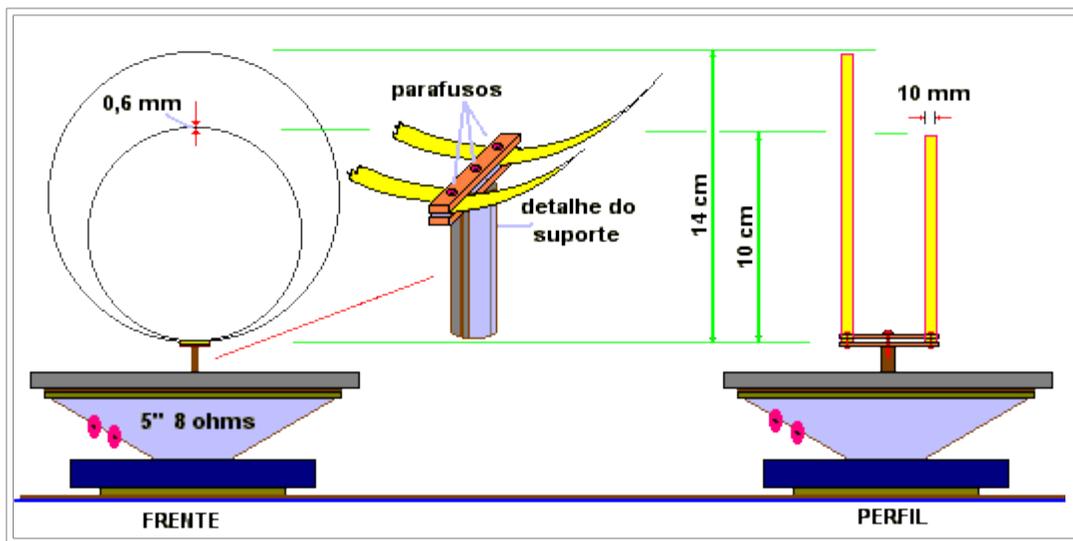
Base de madeira de (15 x 20 x 1) cm;
alto-falante de 5" e 8 ohms;
2 tiras metálicas flexíveis de (450 x 10 x 0,6) mm e (33 x 10 x 0,6) mm;
uma tampa plástica para refrigerantes;

cilindro de madeira de diâmetro 1 cm e altura 3 cm;
2 bornes;
gerador de áudio-freqüências (e eventualmente, pequeno amplificador de 5 W);
parafusos, cola.

Nota: Nenhum desses componentes têm especificações críticas.

Montagem

Mediante 2 longos parafusos, prende-se o alto-falante sobre a base de madeira, com o cone voltado para cima. No centro desse cone (sobre o 'chapeuzinho coco') cola-se a tampa plástica de refrigerantes e, sobre ela, o pequeno tarugo de madeira.



Com duas pequenas tiras plásticas prendem-se as tiras metálicas que fazem círculos de diâmetros 14 cm e 10 cm, aproximadamente (ver detalhes). O centro dessas tiras plásticas é parafusado sobre o pequeno tarugo de madeira. Num primeiro experimento usei como tiras metálicas flexíveis o material retirado de dentro de uma trena obtida em loja de R\$1,99.

Os terminais do alto-falante são conectados mediante fios comum (cabinho #22) aos bornes fixados na base de madeira. A esses bornes deve-se ligar os terminais de saída do gerador de áudio-freqüências.

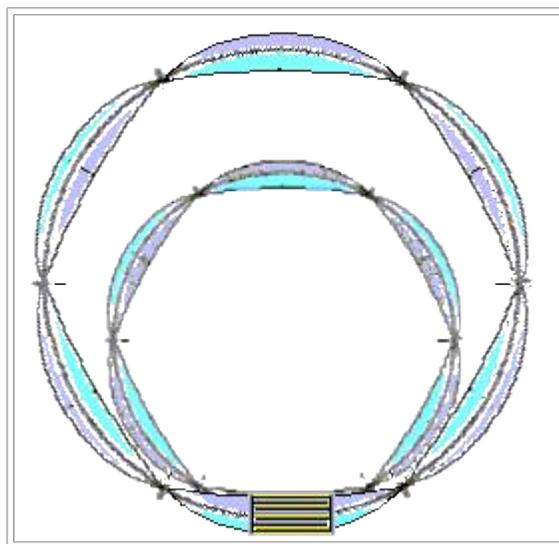
Nota: A intensidade do sinal para excitar o alto-falante não deve ser exagerada mas, se o sinal de saída do gerador de áudio estiver abaixo do 1 V é conveniente intercalar entre o gerador e o aparelho produtor de ondas estacionárias circulares um pequeno amplificador de áudio.

As figuras a seguir têm o propósito de ilustrar o objeto em questão:



Procedimento

Liga-se o gerador de áudio e ajusta-se a frequência de modo que se possa observar duas ondas estacionárias transversais completas no aro de maior diâmetro. Ajusta-se a intensidade do sinal do gerador para que a onda não apresente amplitude exagerada. Se o aro interno ficou devidamente ajustado (se isso não acontecer, basta soltar seu parafuso de fixação e ajustar novamente o diâmetro do círculo) começará a ressoar no segundo harmônico. A frequência do sinal pode ser ajustado para várias 'soluções' da equação da onda que se estabelece estacionariamente.



Temos ai uma 'bela' visualização de ondas estacionários circulares e o fenômeno da ressonância. Todavia, a ilustração não faz jus ao que realmente se observa; convém ver na prática.

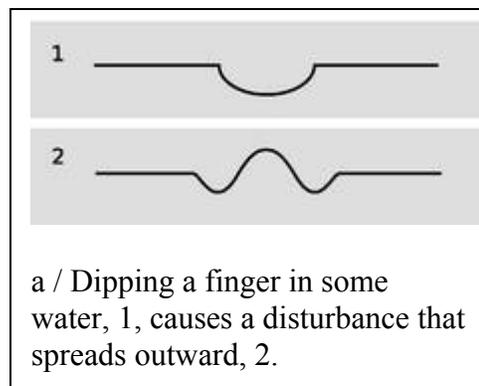
Nota final: Esse experimento faz parte de uma excelente reportagem apresentada pela **Comciencia** e pode ser visto em www.comciencia.br/reportagens/fisica/fisica07.htm .

A-2

Este anexo está relacionado ao relatório parcial e está incluído aqui a pedido do coordenador e foi base da discussão sobre ondas nos relatórios, ref [2]:

Chapter 3. Free Waves

Your vocal cords or a saxophone reed can vibrate, but being able to vibrate wouldn't be of much use unless the vibrations could be transmitted to the listener's ear by sound waves. What are waves and why do they exist? Put your fingertip in the middle of a cup of water and then remove it suddenly. You will have noticed two results that are surprising to most people. First, the flat surface of the water does not simply sink uniformly to fill in the volume vacated by your finger. Instead, ripples spread out, and the process of flattening out occurs over a long



b / The two circular patterns of ripples pass through each other. Unlike material objects, wave patterns can overlap in space, and when this happens they combine by addition.

period of time, during which the water at the center vibrates above and below the normal water level. This type of wave motion is the topic of the present chapter. Second, you have found that the ripples bounce off of the walls of the cup, in much the same way that a ball would bounce off of a wall. In the next chapter we discuss what happens to waves that have a boundary around them. Until then, we confine ourselves to wave phenomena that can be analyzed as if the medium (e.g., the water) was infinite and the same everywhere.

It isn't hard to understand why removing your fingertip

creates ripples rather than simply allowing the water to sink back down uniformly. The initial crater, (a), left behind by your finger has sloping sides, and the water next to the crater flows downhill to fill in the hole. The water far away, on the other hand, initially has no way of knowing what has happened, because there is no slope for it to flow down. As the hole fills up, the rising water at the center gains upward momentum, and overshoots, creating a little hill where there had been a hole originally. The area just outside of this region has been robbed of some of its water in order to build the hill, so a depressed “moat” is formed, (b). This effect cascades outward, producing ripples.

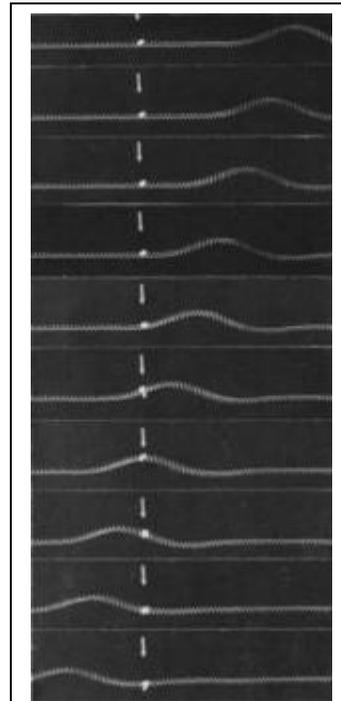
3.1 Wave Motion

There are three main ways in which wave motion differs from the motion of objects made of matter.

1. Superposition

The most profound difference is that waves do not display anything analogous to the normal forces between objects that come in contact. Two wave patterns can therefore overlap in the same region of space, as shown in figure b. Where the two waves coincide, they add together. For instance, suppose that at a certain location in at a certain moment in time, each wave would have had a crest 3 cm above the normal water level. The waves combine at this point to make a 6-cm crest. We use negative numbers to represent depressions in the water. If both waves would have had a troughs measuring -3 cm, then they combine to make an extra-deep -6 cm trough. A +3 cm crest and a -3 cm trough result in a height of zero, i.e., the waves momentarily cancel each other out at that point. This additive rule is referred to as the principle of superposition, “superposition” being merely a fancy word for “adding.”

Superposition can occur not just with sinusoidal waves like the ones in the figure above but with waves of any shape. The figures on the following page show superposition of wave *pulses*. A pulse is simply a wave of very short duration. These pulses consist only of a single hump or trough. If you hit a clothesline sharply, you will observe pulses heading off in both directions. This is analogous to the way ripples spread out in all directions when you make a disturbance at one point on water. The same occurs when the hammer on a piano comes up and hits a string.



e / As the wave pulse goes by, the ribbon tied to the spring is not carried along. The motion of the wave pattern is to the right, but the medium (spring) is moving up and down, not to the right.

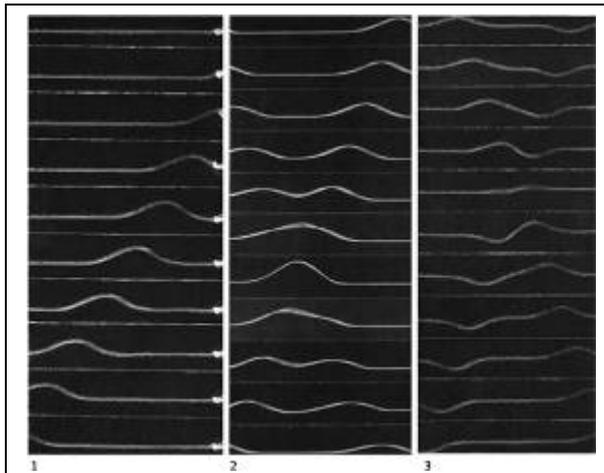


f / Example 2. The surfer is dragging his hand in the water.

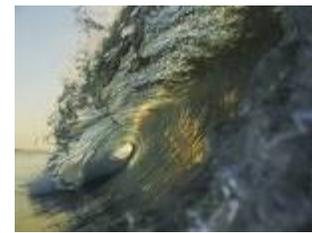
Experiments to date have not shown any deviation from the principle of superposition in the case of light waves. For other types of waves, it is typically a very good approximation for low-energy waves.

Discussion Question

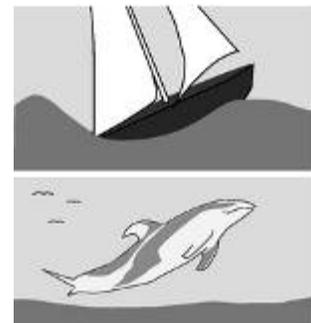
◇ In figure [c](#), the fifth frame shows the spring just about perfectly flat. If the two pulses have essentially canceled each other out perfectly, then why does the motion pick up again? Why doesn't the spring just stay flat?



c / These pictures show the motion of wave pulses along a spring. To make a pulse, one end of the spring was shaken by hand. Movies were filmed, and a series of frame chosen to show the motion. 1. A pulse travels to the left. 2. Superposition of two colliding positive pulses. 3. Superposition of two colliding pulses, one positive and one negative.



g / Example 3: a breaking wave.

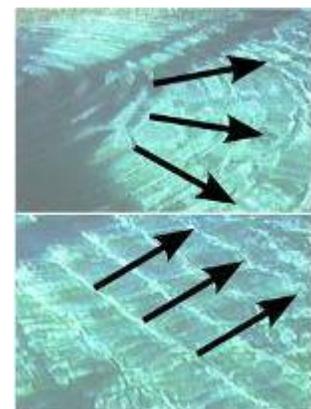


h / Example 4. The boat has run up against a limit on its speed because it can't climb over its own wave. Dolphins get around the problem by leaping out of the water.



d / As the wave pattern passes the rubber duck, the duck stays put. The water isn't moving forward with the wave.

2. The medium is not transported with the wave.



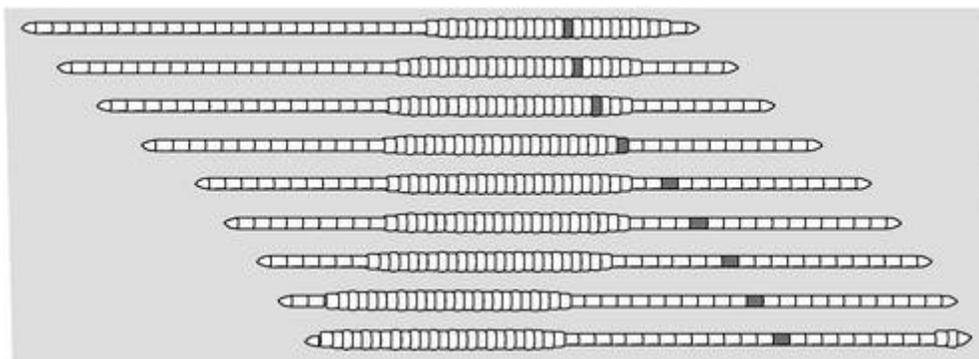
i / Circular and linear wave patterns.

Figure [d](#) shows a series of water waves before it has reached a rubber duck (left), having just passed the duck (middle) and having progressed about a meter beyond the duck (right). The duck bobs around its initial position, but is not carried along with the wave. This shows that the water itself does not flow outward with the wave. If it did, we could empty one end of a swimming pool simply by kicking up waves! We must distinguish between the motion of the medium (water in this case) and the motion of the wave pattern through the medium. The medium vibrates; the wave progresses through space.

self-check: In figure [e](#), you can detect the side-to-side motion of the spring because the spring appears blurry. At a certain instant, represented by a single photo, how would you describe the motion of the different parts of the spring? Other than the flat parts, do any parts of the spring have zero velocity? (answer in the back of the PDF version of the book)

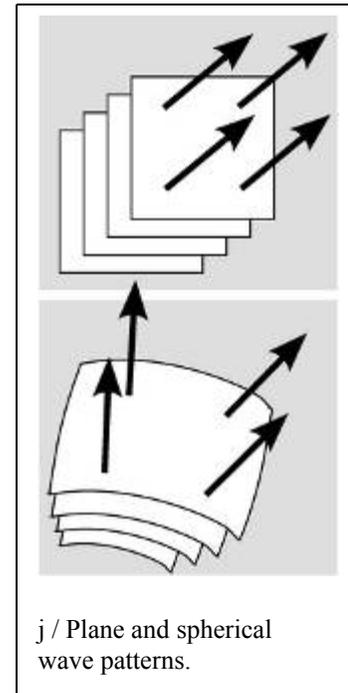
Example 1: A worm

The worm in the figure is moving to the right. The wave pattern, a pulse consisting of a compressed area of its body, moves to the left. In other words, the motion of the wave pattern is in the opposite direction compared to the motion of the medium.



Example 2: Surfing

The incorrect belief that the medium moves with the wave is often reinforced by garbled secondhand knowledge of surfing. Anyone who has actually surfed knows that the front of the board pushes the water to the sides, creating a wake --- the surfer can even drag his hand through the water, as in in figure [f](#). If the water was moving along with the wave and the surfer, this wouldn't happen. The surfer is carried forward because forward is downhill, not because of any forward flow of the water. If the water was flowing forward, then a person floating in the water up to her neck would be carried along just as quickly as someone on a surfboard. In fact, it is even possible to surf down the back side of a wave, although the ride wouldn't last very long because the surfer and the wave would quickly part company.



3. A wave's velocity depends on the medium.

A material object can move with any velocity, and can be sped up or slowed down by a force that increases or decreases its kinetic energy. Not so with waves. The magnitude of a wave's velocity depends on the properties of the medium (and perhaps also on the shape of the wave, for certain types of waves). Sound waves travel at about 340 m/s in air, 1000 m/s in helium. If you kick up water waves in a pool, you will find that kicking harder makes waves that are taller (and therefore carry more energy), not faster. The sound waves from an exploding stick of dynamite carry a lot of energy, but are no faster than any other waves. In the following section we will give an example of the physical relationship between the wave speed and the properties of the medium.

Example 3: Breaking waves

The velocity of water waves increases with depth. The crest of a wave travels faster than the trough, and this can cause the wave to break.

Once a wave is created, the only reason its speed will change is if it enters a different medium or if the properties of the medium change. It is not so surprising that a change in medium can slow down a wave, but the reverse can also happen. A sound wave traveling through a helium balloon will slow down when it emerges into the air, but if it enters another balloon it will speed back up again! Similarly, water waves travel more quickly over deeper water, so a wave will slow down as it passes over an underwater ridge, but speed up again as it emerges into deeper water.

Example 4: Hull speed

The speeds of most boats, and of some surface-swimming animals, are limited by the fact that they make a wave due to their motion through the water. The boat in figure [h](#) is going at the same speed as its own waves, and can't go any faster. No matter how hard the boat pushes against the water, it can't make the wave move ahead faster and get out of the way. The wave's speed depends only on the medium. Adding energy to the wave doesn't speed it up, it just increases its amplitude.

A water wave, unlike many other types of wave, has a speed that depends on its shape: a broader wave moves faster. The shape of the wave made by a boat tends to mold itself to the shape of the boat's hull, so a boat with a longer hull makes a broader wave that moves faster. The maximum speed of a boat whose speed is limited by this effect is therefore closely related to the length of its hull, and the maximum speed is called the hull speed. Sailboats designed for racing are not just long and skinny to make them more streamlined --- they are also long so that their hull speeds will be high.

Este anexo refere-se à referência [7]:

Aula-7

- [A Mecânica Ondulatória e o Significado de \$\Psi\$](#)
- [Princípio da Incerteza de Heisenberg](#)

●2- A Mecânica Ondulatória e o Significado de Ψ

Vimos que com as observações experimentais sobre o efeito de interferência no caso da matéria, assim como da luz, tornou-se claro que ambas, matéria e radiação, têm comportamento ondulatório. Por outro lado, o efeito fotoelétrico indica que a luz se comporta como uma coleção de partículas viajando como velocidade $c = 300.000 \text{ km/s}$. Estas partículas foram chamadas de fótons. Sabemos também, que os elétrons comportam-se como se fossem partículas, mesmo sabendo que eles podem produzir também efeitos de interferência. **Como podemos reconciliar este aparente conflito ?** Isto é, tanto a matéria quanto a luz têm comportamentos duais onda-corpúsculo ?

Em 1926, Max Born sugeriu uma unificação pictórica para estes conceitos introduzindo o significado de **amplitude de onda de matéria**.



Max Born

Primeiro, vamos lembrar que a densidade de energia de uma onda eletromagnética, ou energia por unidade de volume, é proporcional ao quadrado de sua amplitude (A^2). Isto pode ser demonstrado usando as equações de Maxwell para o eletromagnetismo (veja apêndices 1 a 3). Isto significa que;

$$\frac{\text{Energia}}{\text{Volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A^2$$

Levando em conta o comportamento corpuscular da luz (fóton), sua energia é igual a $E = n(h\nu)$, onde ν é a frequência da luz e n é o número de fótons. Dai tiramos que;

$$\frac{\text{Energia}}{\text{Volume}} = \frac{n}{\text{Volume}} h\nu$$

Das duas últimas equações vemos que o número de fótons por unidade de volume é proporcional ao quadrado da amplitude da radiação eletromagnética. Isto é,

$$\frac{n}{\text{Volume}} \propto A^2$$

Isto levou Born assumir que a onda de matéria, representada pela função $\Psi(x,t)$, tem uma amplitude tal que o seu quadrado é igual ao número de partículas por unidade de volume,

$$\frac{n}{\text{Volume}} \propto \Psi^2$$

Esta conexão, tanto para as radiações eletromagnéticas quando para as ondas de matéria, produzia um casamento perfeito entre os conceitos onda e partícula.

Para entender um pouco dessas perturbações vamos estudar um problema simples, unidimensional, dado pelos movimentos possíveis de uma partícula de massa m situada entre paredes rígidas, separadas entre si por uma distância d , como se vê na Fig.1. A função de onda pode ser obtida por analogia com um problema conhecido de Mecânica, os dos modos naturais de vibração de uma corda de comprimento d , fixa em uma de suas extremidades, como mostra a Fig.1.

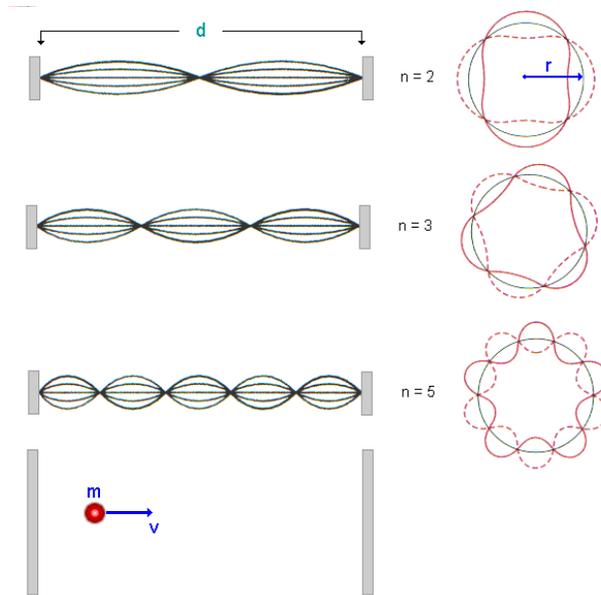


Fig.1 - Ondas Estacionárias

As condições de contorno para uma corda vibrante impõem que em cada extremidade, haja um nó. Isso significa que o comprimento de onda λ deve ser escolhido de tal forma que

$$\lambda = \frac{2d}{n} \quad \text{ou} \quad d = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

o que implica na quantização do comprimento de onda λ .

Equivalentemente, a perturbação ondulatória de uma corda é representada por uma onda estacionária, cuja dependência espacial e temporal é igual a $A \text{sen}(kx - \omega t)$, onde A é uma constante e $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda. Visto que λ é quantizado, k também deverá ser, isto é,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{d} \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar}$$

o que nos leva a

$$\Psi(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t) \tag{1}$$

Examinando-se a equação anterior para $t = 0$, conclui-se que, qualquer que seja o valor de n , existirão sempre nós em $x = 0$ e $x = d$, como as condições de contorno o exigem.

Considere-se agora uma partícula confinada entre duas paredes rígidas. Como as paredes são supostas perfeitamente rígidas, a partícula não pode penetrar nelas, e portanto, Ψ , que de alguma forma representa o movimento da partícula, deve anular-se para $x = 0$ e $x = d$. Os comprimentos de onda permitidos para as ondas de matéria devem ser dados por $\lambda = 2d/n$. Substituindo λ por h/p , tem-se

$$p = \frac{nh}{2d},$$

o que mostra que o momento linear da partícula é quantizado. De acordo com a mecânica Newtoniana o momento linear $p (=mv)$ pode ser relacionado com a energia E (que é inteiramente cinética e igual, portanto, a $mv^2/2$) pela expressão

$$p = \sqrt{2mE}$$

Combinando entre si as duas equações anteriores, obtém-se a condição de quantização de E , a saber,

$$E = n^2 \frac{h^2}{8md^2} \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A partícula não pode ter uma energia qualquer, como seria de se esperar classicamente, mas apenas os valores dados por E . Dessa forma a onda de matéria pode ser descrita, em estrita analogia com a equação (1) para o caso de uma onda em mecânica em cordas, isto é,

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \text{sen} \frac{1}{\hbar} (px - Et)$$

onde a amplitude $A = \Psi_0$.

A Fig.2, pode servir, igualmente, para mostrar como variam dentro da caixa, as amplitudes das ondas estacionárias para os estados de movimento correspondentes a $n = 2, 3$ e 5 . Vê-se claramente neste problema, como o fato de se localizar ou confinar uma partícula provoca a quantização de sua energia.

A-4

Referência (4):

Orbital Angular Momentum

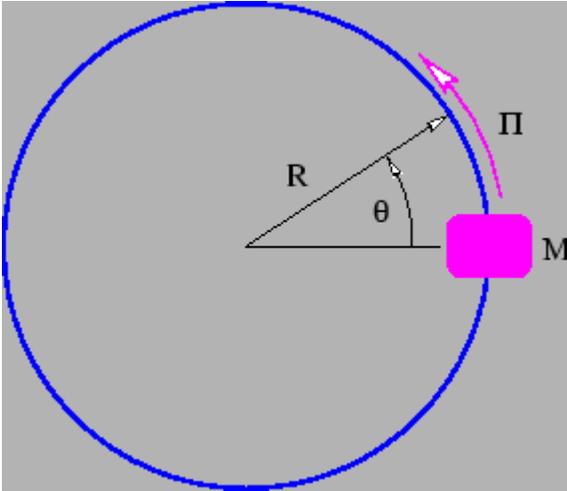


Figure 9.5: Illustration of a bead of mass M sliding (without friction) on a circular loop of wire of radius R with momentum Π .

Another type of bound state motion occurs when a particle is constrained to move in a circle. (Imagine a bead sliding on a circular loop of wire, as illustrated in figure 9.5.) We can define x in this case as the path length around the wire and relate it to the angle θ : $x = R\theta$. For a plane wave we have

$$\psi = \exp[i(kx - \omega t)] = \exp[i(kR\theta - \omega t)]. \quad (10.26)$$

This plane wave differs from the normal plane wave for motion along a Cartesian axis in

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$$

that we must have . This can only happen if the circumference of the

$$2\pi R/\lambda = m$$

loop, $2\pi R$, is an integral number of wavelengths, i. e., if where m is an

$$2\pi/\lambda = k$$

integer. However, since , this condition becomes $kR = m$.

$$\Pi_m R = m\hbar$$

Since $\Pi = \hbar k$, the above condition can be written . The quantity

$$L_m \equiv \Pi_m R \quad (10.27)$$

is called the *angular momentum*, leading to our final result,

$$L_m = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.28)$$

We see that the angular momentum can only take on values which are integer multiples of \hbar . This represents the *quantization of angular momentum*, and m in this case is called the *angular momentum quantum number*. Note that this quantum number differs from the energy quantum number for the particle in the box in that zero and negative values are allowed.

The energy of our bead on a loop of wire can be expressed in terms of the angular momentum:

$$E_m = \frac{\Pi_m^2}{2M} = \frac{L_m^2}{2MR^2}. \quad (10.29)$$

This means that angular momentum and energy are compatible variables in this case, which further means that angular momentum is a conserved variable. Just as definite values of linear momentum are related to invariance under translations, definite values of angular momentum are related to invariance under rotations. Thus, we have

$$\text{invariance under rotation} \iff \text{definite angular momentum} \quad (10.30)$$

for angular momentum.

We need to briefly address the issue of angular momentum in three dimensions. Angular momentum is actually a vector oriented perpendicular to the wire loop in the example we are discussing. The direction of the vector is defined using a variation on the right-hand rule: Curl your fingers in the direction of motion of the bead around the loop (using your right hand!). The orientation of the angular momentum vector is defined by the direction in which your thumb points. This tells you, for instance, that the angular momentum in figure [9.5](#) points out of the page.

In quantum mechanics it turns out that it is only possible to measure simultaneously the square of the length of the angular momentum vector and one component of this vector. Two different components of angular momentum cannot be simultaneously measured because of the uncertainty principle. However, the length of the angular momentum vector may be measured simultaneously with one component. Thus, in quantum mechanics, the angular momentum is completely specified if the length and one component of the angular momentum vector are known.

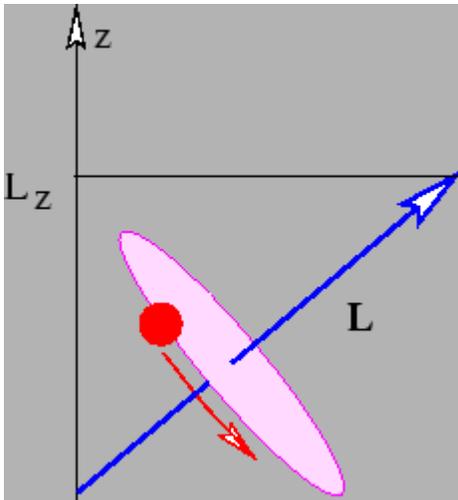


Figure: Illustration of the angular momentum vector \mathbf{L} for a tilted loop and its z component L_z .

Figure 9.6 illustrates the angular momentum vector associated with a bead moving on a wire loop which is tilted from the horizontal. One component (taken to be the z component) is shown as well. For reasons we cannot explore here, the square of the length of the angular momentum vector L^2 is quantized with the following values:

$$L_l^2 = \hbar^2 l(l + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (10.31)$$

One component (say, the z component) of angular momentum is quantized just like angular momentum in the two-dimensional case, except that l acts as an upper bound on the possible values of $|m|$. In other words, if the square of the length of the angular momentum vector is $\hbar^2 l(l + 1)$, then the z component can take on the values

$$L_{zm} = \hbar m, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (10.32)$$

The quantity l is called the *angular momentum quantum number*, while m is called the *orientation* or *magnetic quantum number*, the latter for historical reasons.

Comentários do Coordenador:

Foi pedido que se substituísse o gerador de frequências do laboratório por um programa que fizesse o mesmo através da saída de áudio do computador. O programa aconselhado foi VA – **VisualAnalyser** da **sillanumsoft**, cujas versão

utilizada foi a **8.30.12**. Este programa está disponível na internet e pode ser encontrado no seguinte endereço eletrônico: <http://www.sillanumsoft.com/>.

Entretanto ao testar o experimento observou-se que, apesar de gerar a frequência no auto-falante como se esperava, os anéis de plástico vibravam com amplitudes muito pequenas e não eram possíveis distinguir visualmente as ondas estacionárias. Mesmo utilizando um amplificador observou-se que o som do auto-falante tornou-se mais intenso, entretanto ainda não foram observáveis as ondas estacionárias.