

## O Disco De Euler



Marcelo Caetano Rorato - RA 024508  
Orientador: Alberto Saa (IMECC-UNICAMP)  
Coordenador: Jose Joaquin Lunazzi (IFGW-UNICAMP)



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Física Gleb Wataghin  
Cidade Universitária Zeferino Vaz  
Barão Geraldo 13083-970 Campinas SP



# 1 Introdução

Um simples movimento de uma moeda girando em uma mesa nos inspirou a realizar esse experimento. O que acontece enquanto a moeda gira? Quais os conceitos físicos envolvidos? Por que o movimento fica mais rápido antes de parar? Por que o movimento pára?

Essas são perguntas que uma pessoa qualquer poderia ter ao observar uma moeda girando. Podem parecer simples demais mas necessitam de conceitos físicos bem explicados para saná-las, e mesmo atualmente não conseguimos responder a alguns pontos referentes a esse movimento.

Construímos quatro discos que nos ajudarão a estudar esses movimentos e formular algumas respostas às dúvidas surgidas. salientamos o quanto as fotos desse relatório ilustram muito bem o experimento e dão uma idéia do que ocorrerá na apresentação dia 22. Também sugerimos o vídeo anexado com um giro de duração bastante surpreendente, servindo como prévia de nossa demonstração.

## 2 Teoria

Como vimos no relatório parcial, para um disco de raio  $R$ , massa  $m$  e momento de inércia  $I$ , girando em torno do seu eixo conforme a figura 1, a energia total será dada por:

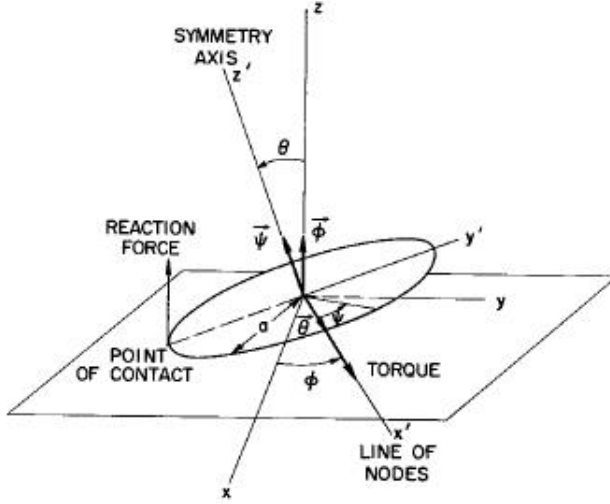
$$E = mgR \sin \alpha + \frac{1}{2} I \Omega^2 \sin^2 \alpha \quad (1)$$

Em uma análise básica, a velocidade angular  $\Omega$  aumenta e o ângulo  $\alpha$  diminui até que o movimento termine completamente.

Como o movimento pára, devemos considerar que há uma perda de energia por dissipação de alguma forma e adiantamos que há muitas discordâncias sobre quais devem ser consideradas as principais causas de dissipação de energia nesse movimento, como a viscosidade do ar e o atrito com a superfície.

## 2.1 Equações de movimento

Analisaremos agora o movimento por completo e obteremos as equações de movimento. Sempre nos referiremos às grandezas indicadas na figura 1 abaixo.



Partimos do fato de que o momento angular é conservado ao longo dos eixos de simetria [3]. Temos:

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (2)$$

$$L_z = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta \quad (3)$$

onde  $I_3$  e  $I$  são, respectivamente, o momento de inércia no eixo de simetria e o momento de inércia perpendicular ao eixo de simetria.

De forma análoga à equação de energia já apresentada acima (1), temos que a energia do disco pode ser escrita considerando seu centro de massa da seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgz + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad (4)$$

onde  $z = a \sin \theta$ . Derivando as equações acima no tempo, obtemos as equações de movimento:

$$\ddot{\theta} (I + Ma^2 \cos^2 \theta) - Ma^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + Mga \cos \theta - I \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 \omega_3 \dot{\phi} \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$I \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2I \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad (6)$$

Essas equações também poderiam ser obtidas diretamente a partir das equações de Euler [3]. Adotaremos a seguinte condição inicial de vínculo:

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = 0 \quad (7)$$

pele simples motivo de que o movimento do centro de massa começa a partir do repouso e com um ângulo de  $\pi/2$  com a mesa horizontal. Definimos o seguinte termo:

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{Mga}{I}} \quad (8)$$

Para um movimento de precessão somente, fazemos  $\theta$  constante na equação (5) e obtemos:

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\sin \theta}} \quad (9)$$

A componente vertical da velocidade angular será então:

$$s = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (10)$$

Mas, pela equação de vínculo (7), encontramos

$$s = \dot{\phi} \sin^2 \theta = \omega_0 (\sin \theta)^{3/2} \quad (11)$$

Substituindo  $\omega_0$  temos:

$$\dot{\phi} = \left( \frac{Mga}{I \sin \theta} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Essa foi uma forma mais formal do ponto de vista do desenvolvimento de Euler. Poderíamos obter esse mesmo resultado de forma mais direta, como foi feito em [?]. Assumimos  $\theta$  constante e temos o momento angular:

$$L = (I\dot{\phi} \sin \theta)\hat{y} + I_3\omega_3\hat{z} \quad (13)$$

Como temos  $\omega_3 = 0$  (vínculo), o torque será:

$$N = \frac{dL}{dt} = \dot{\phi} \times L = -I\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{x} \quad (14)$$

Mas o torque é dado por:

$$N = -Mga \cos \theta \hat{x} \quad (15)$$

Usando (13) e (14), temos:

$$\dot{\phi} = \left( \frac{Mga}{I \sin \theta} \right)^{1/2} \quad (16)$$

Como obtido em (12).

Observando essa fórmula para a velocidade angular conseguimos concluir que quando o movimento vai parando, ou seja,  $\theta \rightarrow 0$ , o movimento torna-se cada vez mais rápido em sua precessão. Isso é facilmente observado no nosso experimento. No final há uma bela demonstração de como funcionam as equações de movimento, pela simples observação do aumento da frequência.

Resta-nos agora analisar as possíveis causas de dissipação do movimento, pois como vemos pelas equações, não há motivos para que ele cesse. Porém, é fato mais do que provado que ele realmente pára. Deixamos isso para os artigos das referências, que serão acrescentados juntamente com esse relatório. É uma análise mais avançada e recomendamos apenas para os interessados e com um bom conhecimento de física.

### 3 Montagem Experimental

Para o relatório parcial, fizemos o estudo do movimento com dois discos encontrados no dia-a-dia de um estudante. Utilizamos duas moedas e dois discos de HD. A figura 2 mostra esses discos.



Figura 1: Disco de HD de computador comum (diâmetro=95mm) e duas moedas (1 real e 50 centavos com diâmetros de 27mm e 23mm respectivamente). As espessuras de todos estão em torno de 1mm.

Os discos foram girados em duas superfícies distintas. Uma de vidro e uma de madeira, ambas bem lisas e lustradas. Relembrando os resultados obtidos, acrescentamos a tabela com os tempos de giro de cada disco.

Disco	Média do tempo no vidro (s)	Média do tempo na madeira (s)
HD1	6,4	5,5
HD2	3,7	3,4
Moeda 1 Real	7,1	5,4
Moeda 50 centavos	5,3	3,9

Tabela 01- Resultados parciais, tempos de giro dos HD's e moedas no vidro e na madeira.

Nossa principal conclusão foi que na superfície de vidro o desempenho é melhor para todos os discos. Entre os discos, o HD com mais massa foi melhor em relação a todos os outros.

Dando prosseguimento ao experimento, construímos quatro discos com diâmetros e espessuras distintas. O material utilizado foi o aço com teor médio de carbono:

- **Aço 1020 trefilado** (comprado bruto, em uma usina da cidade)

Procuramos uma oficina com torno mecânico (particular) para usinar nossos discos da forma que supomos ser a melhor. Deixamos a borda do disco, que ficará em contato com a superfície durante o movimento, **bastante arredondada**. Isso aumentou nossa área de contato sem deslizamento e acreditamos que aumentou nosso tempo de giro. Comprovaremos mais adiante. Fizemos dois discos e depois com novas suposições de medidas, fizemos mais dois. Tivemos tempo entre essas situações pela demora da oficina no torno do disco.

Os discos contruídos, e suas respectivas grandezas na legenda, foram os seguintes:



Figura 2: Os 4 discos utilizados. Da esquerda pra direita temos diâmetros (mm): 1-69.0; 2-75.5; 3-76.0; 4-89.0;



Figura 3: Os 4 discos utilizados (vista lateral). Da esquerda pra direita temos espessuras (mm): 1-15.0; 2-12.5; 3-19.5; 4-14.5;

Para dar um visual mais didático e atraente ao público em geral, criamos alguns desenhos e fizemos ímãs, semelhantes aos de geladeira, para colocar na superfície superior do disco. Isso nos dá além do visual mais interessante, uma base para ver qual a velocidade de giro, acompanhando a movimentação do desenho. Cortamos os ímãs em forma circular para os quatro discos. A foto a seguir ilustra o resultado, com resolução grande para maiores detalhes.



Figura 4: Os 4 discos com os ímãs em sua superfície. Além de homenagear a universidade, o instituto e a disciplina (com os símbolos), acrescentei minha foto satisfazendo uma das exigências do programa e ao mesmo tempo como, no mínimo, um "fator cômico" para o dia da apresentação.

O próximo passo foi a pesquisa com superfícies nas quais os discos realizarão o movimento. Juntamos quatro superfícies distintas que nos darão parâmetros para estudar as vantagens e desvantagens de todas elas. As fotos seguinte mostram as escolhas.



- Superfícies

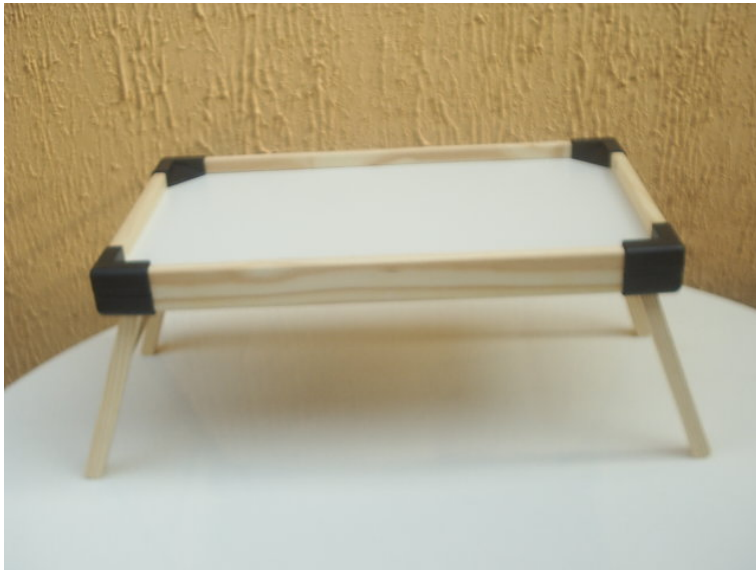


Figura 5: Tábua de madeira. Utensílio doméstico.



Figura 6: Tigela de aço inox. Utensílio doméstico.

- Superfícies - continuação



Figura 7: Tábua de madeira. Utensílio doméstico.



Figura 8: Prato de plástico. Utensílio doméstico.

Com todo esse aparato realizamos os giros várias vezes. Variamos todos os discos em todas as superfícies e obtivemos resultados bastante interessantes. De maneira análoga ao relatório anterior, iniciamos o movimento verticalmente tentando deixar o giro começar a precessão naturalmente. Isso o ocorre quando ele inclina-se formando o ângulo  $\theta$  visto na teoria. A figura a seguir ilustra como iniciamos o movimento.



Figura 9: Início do movimento dando um impulso lateralmente.

Com a prática, o impulso inicial já era conseguido diretamente na precessão. Isso será demonstrado na apresentação do experimento ao público e pode ser visto no vídeo em anexo.

Antes de comentarmos sobre os movimentos em si, vejamos algumas fotos dos discos em ação.

## Discos em movimento



Figura 10: Disco girando na superfície da tigela de aço inox.



Figura 11: Disco girando em superfície de madeira

## Discos em movimento - continuação

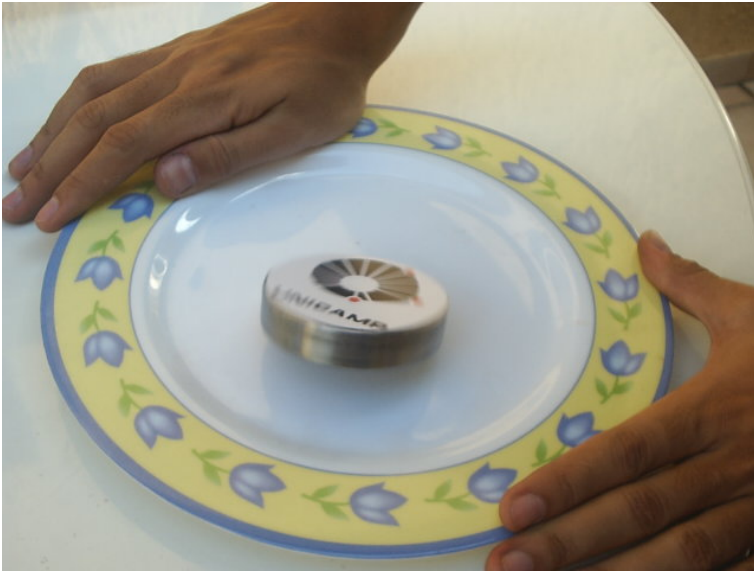


Figura 12: Disco girando na superfície do prato de plástico.



Figura 13: Disco girando em superfície de madeira.

## 4 Resultados e Conclusão

Enquanto realizamos a experiência no dia da apresentação, alguns dados foram colhidos e, juntando com a análise dos movimentos dos discos anteriormente, apresentamos a seguinte tabela com os valores dos tempos de giro obtidos pelos discos em todas as superfícies estudadas.

Disco	Sup1 - t(s)	Sup2 - t(s)	Sup3 - t(s)	Sup4 - t(s)
1	14.2	8.1	36.5	50.5
2	18.1	9.3	41.7	58.1
3	17.3	8.9	39.8	65.1
4	15.7	8.5	36.8	53.2

Tabela 02 - Média dos tempos (em segundos) dos giros dos discos nas superfícies indicadas. A legenda abaixo descreve os discos e as superfícies.

Legenda:

- Sup1: Mesinha de madeira
- Sup2: Tábua de madeira
- Sup3: Prato de plástico
- Sup4: Tigela de aço inox
- Disco1: diâmetro (d)=69.0mm / espessura (e)=15.0mm
- Disco2: d=75.5mm / e=12.5mm
- Disco3: d=76.0mm / e=19.5mm
- Disco4: d=89.0mm / e=14.5mm

Vemos que há uma enorme variação entre os tempos de giro nas diferentes superfícies. Isso se deve principalmente por dois fatores: a rigidez e a polidez. O aço mostrou-se como a melhor superfície e é a mais rígida e mais polida das estudadas. Os discos também obtiveram desempenhos distintos. O melhor, no geral, foi o disco 2, mas o disco 3 foi o recordista na tigela de aço, com tempos maiores de um minuto. Na tabela apresentamos as médias entre muitos lançamentos, mas os picos do disco 3 no aço foi de 1min17s !!!

Podemos fazer várias hipóteses sobre os motivos que levaram um disco ser melhor que outro, como a razão entre diâmetro/espessura ou diâmetro/massa, por exemplo. As razões diâmetro/espessura foram:

- 1- 4.6
- 2- 6.0
- 3- 3.9
- 4- 6.1

Isso consegue explicar porque os discos 2 e 3 foram os melhores.

Lembramos que todas as superfícies foram obtidas de utensílios domésticos, de cozinha. Isso possibilitou que pudéssemos estudar se plástico é melhor do que madeira, por exemplo, a partir de itens do dia-a-dia.

Para concluir, o melhor par disco/superfície é o disco 2 e a tigela de cozinha de aço inox, ficando o disco 2 um pouco a frente, no geral, do disco 3 e a tigela de aço um pouco à frente do prato de plástico, atestando o sucesso do experimento com coisas simples e corriqueiras.

## 5 Para se pensar com esse experimento!!!

Entrando no espírito da disciplina, gostaríamos aqui de preparar as idéias para verificarmos no dia da apresentação do experimento ao público. Perguntamos:

1. Será que os discos giram bastante? **Resposta:** Giram surpreendentemente muito. Cerca de dez vezes mais do que uma moeda comum.
2. Há diferença entre os discos e uma simples moeda? **Resposta:** Principalmente o diâmetro, espessura e, conseqüentemente, a massa.
3. O que eles possuem de especial? **Resposta:** Além das grandezas citadas acima, possuem um polimento bastante acentuado na borda em contato com a superfície.
4. Qual disco gira mais? **Resposta:** O disco 2 (com diâmetro 75.5mm e espessura 12.5mm)
5. Qual é a melhor superfície? **Resposta:** A de aço inox (tigela comum de cozinha)
6. Podemos ver a frequência do movimento aumentando com o tempo? **Resposta:** Sim, com o aumento do barulho emitido pelo disco durante o movimento podemos perceber a frequência aumentando até o final.
7. Por que o movimento pára? Quais as causas? **Pelas dissipações de energia, principalmente por atrito com a superfície.**
8. Há como melhorar mais ainda esse experimento? **Resposta:** Sim, basta construir mais discos, testando várias combinações entre espessuras e diâmetros; variar materiais e principalmente testar outras superfícies.

## 6 Agradecimentos

Agradeço ao orientador Alberto Saa pelas idéias e ajuda durante o desenvolvimento do experimento; ao coordenador Jose Joaquin Lunazzi pelos comentários ao projeto e ao final do experimento, com sugestões; e principalmente aos meus pais pela ajuda na procura de soluções como compra de materias e busca de profissionais. Agradeço também ao Instituto de Física IFGW deixando disponível toda sua infra-estrutura, mesmo que não sendo utilizada para o experimento.

## Referências

- [1] H. K. Moffatt, *Euler's Disk and its finite-time singularity*, Nature, Vol. 404, página 833.
- [2] A. J. McDonald, K. T. MacDonald, *The Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane*, arXiv:physics/0008227 v3
- [3] Goldstein, Poole, Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Third edition, 2002 - Capítulo de Dinâmica Circular e Equações de Euler.
- [4] <http://www.eulersdisk.com>, site do criador do brinquedo comercializado. Apenas para referência. Não foi utilizado no relatório.

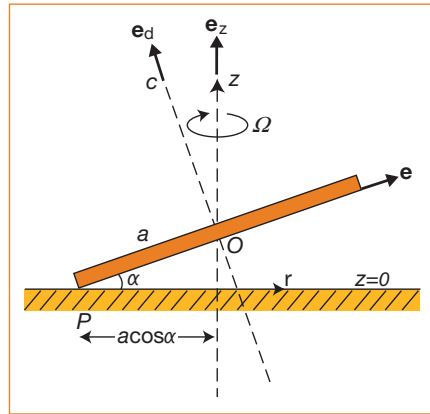


# Euler's disk and its finite-time singularity

Air viscosity makes the rolling speed of a disk go up as its energy goes down.

It is a fact of common experience that if a circular disk (for example, a penny) is spun upon a table, then ultimately it comes to rest quite abruptly, the final stage of motion being characterized by a shudder and a whirring sound of rapidly increasing frequency. As the disk rolls on its rim, the point  $P$  of rolling contact describes a circle with angular velocity  $\Omega$ . In the classical (non-dissipative) theory<sup>1</sup>,  $\Omega$  is constant and the motion persists forever, in stark conflict with observation. Here I show that viscous dissipation in the thin layer of air between the disk and the table is sufficient to account for the observed abruptness of the settling process, during which, paradoxically,  $\Omega$  increases without limit. I analyse the nature of this 'finite-time singularity', and show how it must be resolved.

Let  $\alpha$  be the angle between the plane of the disk and the table. In the classical description, and with the notation defined in Fig. 1, the points  $P$  and  $O$  are instantaneously at rest in the disk, and the motion is therefore instantaneously one of rotation about line  $PO$  with angular velocity  $\omega$ , say. The angular momentum of the disk is therefore  $\mathbf{h} = A\omega\mathbf{e}(t)$ , where  $A = \frac{1}{4}Ma^2$  is the moment of inertia of the disk of mass  $M$  about its diameter;  $\mathbf{e}(t)$  is a unit vector in the direction  $PO$ ;  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_d$  are unit vectors in the directions  $Oz, OC$ , respectively (see Fig. 1). In a frame of reference rotating with angular velocity  $\Omega_d = \Omega\mathbf{e}_z$ , the disk rotates about its axis  $OC$  with angular velocity  $\Omega_d = \Omega\mathbf{e}_d$ ; hence the rolling condition is  $\Omega_d = \Omega\cos\alpha$ . The absolute angular velocity of the disk is thus  $\omega = \Omega(\mathbf{e}_d\cos\alpha - \mathbf{e}_z)$ , and so



**Figure 1** A heavy disk rolls on a horizontal table. The point of rolling contact  $P$  moves on a circle with angular velocity  $\Omega$ . Owing to dissipative effects, the angle  $\alpha$  decreases to zero within a finite time and  $\Omega$  increases in proportion to  $\alpha^{-1/2}$ .

$$\omega = \omega \cdot \mathbf{e} = -\Omega\sin\alpha.$$

Euler's equation for the motion of a rigid body is here given by  $d\mathbf{h}/dt = \Omega \wedge \mathbf{h} = \mathbf{G}$ , where  $\mathbf{G} = Mg\mathbf{a}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}$  is the gravitational torque relative to  $P$  ( $\wedge$  indicates the vector product). This immediately gives the result  $\Omega^2\sin\alpha = 4g/a$ , or, when  $\alpha$  is small,

$$\Omega^2\alpha \approx 4g/a \tag{1}$$

The energy of the motion  $E$  is the sum of the kinetic energy  $\frac{1}{2}A\omega^2 = \frac{1}{2}Mg\sin\alpha$ , and the potential energy  $Mg\sin\alpha$ , so

$$E = \frac{3}{2}Mg\sin\alpha \approx \frac{3}{2}Mg\alpha \tag{2}$$

In the classical theory,  $\alpha, \Omega$  and  $E$  are all constant, and the motion continues indefinitely. As observed above, this is utterly unrealistic.

Let us then consider one of the obvious mechanisms of energy dissipation, namely that associated with the viscosity  $\mu$  of the surrounding air. When  $\alpha$  is small, the dominant contribution to the viscous dissipation comes from the layer of air between the disk and the table, which is subjected to strong shear when  $\Omega$  is large.

We may estimate the rate of dissipation of energy in this layer as follows. Let  $(r, \theta)$  be polar coordinates with origin at  $O$ . For small  $\alpha$ , the gap  $h(r, \theta, t)$  between the disk and the table is given by  $h(r, \theta, t) \approx \alpha(a + r\cos\phi)$ , where  $\phi = \theta - \Omega t$ . We now concede that  $\alpha$  is a slowly varying

function of time  $t$ : we assume that  $|\dot{\alpha}| \ll \Omega$ , and make the 'adiabatic' assumption that equation (1) continues to hold. Because the air moves a distance of order  $a$  in a time  $2\pi/\Omega$ , the horizontal velocity  $\mathbf{u}_H$  in the layer has order of magnitude  $r\Omega\sin\phi$ ; and as this velocity satisfies the no-slip condition on  $z=0$  and on  $z=h (= O(\alpha a))$ , the vertical shear  $|\partial\mathbf{u}_H/\partial z|$  is of the order  $(r\Omega/\alpha a)|\sin\phi|$ . The rate of viscous dissipation of energy  $\Phi$  is given by integrating  $\mu(\partial\mathbf{u}_H/\partial z)^2$  over the volume  $V$  of the layer of air: this easily gives  $\Phi \approx \pi\mu g a^2/\alpha^2$ , using equation (1). The fact that  $\Phi \rightarrow \infty$  as  $\alpha \rightarrow 0$  should be noted.

The energy  $E$  now satisfies  $dE/dt = -\Phi$  (neglecting all other dissipation mechanisms). Hence, with  $E$  given by equation (2), it follows that

$$\frac{3}{2}Mg\alpha da/dt \approx -\pi\mu g a^2/\alpha^2 \tag{3}$$

This integrates to give

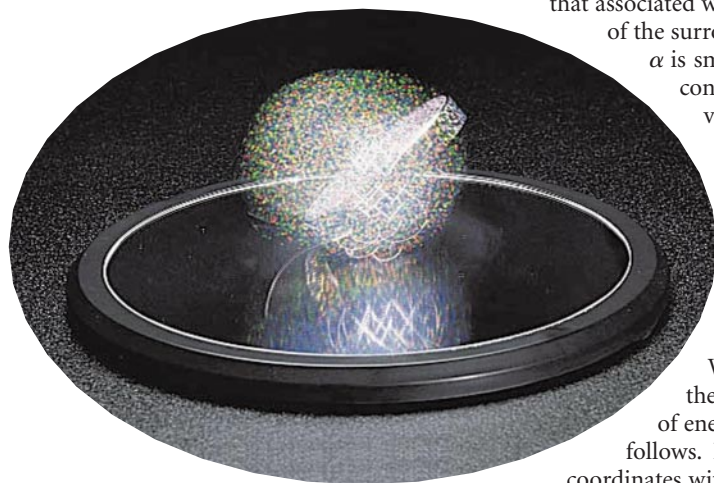
$$\alpha^3 = 2\pi(t_0 - t)/t_1 \tag{4}$$

where  $t_1 = M/\mu a$ , and  $t_0$  is a constant of integration determined by the initial condition: if  $\alpha = \alpha_0$  when  $t = 0$ , then  $t_0 = (\alpha_0^3/2\pi)t_1$ . What is striking here is that, according to equation (4),  $\alpha$  does indeed go to zero at the finite time  $t = t_0$ . The corresponding behaviour of  $\Omega$  is  $\Omega \approx (t_0 - t)^{-1/6}$ , which is certainly singular as  $t \rightarrow t_0$ .

Of course, such a singularity cannot be realized in practice: nature abhors a singularity, and some physical effect must intervene to prevent its occurrence. Here it is not difficult to identify this effect: the vertical acceleration  $|\dot{h}| = |\dot{\alpha}a|$  cannot exceed  $g$  in magnitude (as the normal reaction at  $P$  must remain positive). From equation (4), this implies that the above theory breaks down at a time  $\tau$  before  $t_0$ , where

$$\tau = t_0 - t \approx (2a/9g)^{3/5}(2\pi/t_1)^{1/5} \tag{5}$$

A toy, appropriately called Euler's disk<sup>2</sup>, is commercially available (Fig. 2; Tangent Toys, Sausalito, California). For this disk,  $M = 400$  g, and  $a = 3.75$  cm. With these values and with  $\mu = 1.78 \times 10^{-4}$  g cm<sup>-1</sup> s,  $t_1 = M/\mu a \approx 0.8 \times 10^6$  s, and, if we take  $\alpha_0 = 0.1$  ( $\approx 6^\circ$ ), we find  $t_0 \approx 100$  s. This is indeed the order of magnitude (to within  $\pm 20\%$ ) of the observed settling time in many repetitions of the spinning of the disk (with quite variable and ill-controlled initial conditions), that is, there is no doubt that dissipation associated with air friction is sufficient to account for the observed behaviour. The value of  $\tau$  given by equation (5) is  $10^{-2}$  s for the disk values given above; that is, the behaviour described by equation (4) persists until within  $10^{-2}$  s of the singularity time  $t_0$ . At this stage,  $\alpha \approx 0.5 \times 10^{-2}$ ,  $h_0 = \alpha a \approx 0.2$  mm,  $\Omega \approx 500$  Hz (and the adiabatic approximation is still well



**Figure 2** Euler's disk is a chrome-plated steel disk with one edge machined to a smooth radius. If it were not for friction and vibration, the disk would spin for ever. Photo courtesy of Tangent Toys. See <http://www.tangenttoy.com/>.

satisfied). This is as near to a ‘singularity’ as this simple toy can approach. The effect is nevertheless striking in practice.

**H. K. Moffatt**

Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences,

20 Clarkson Road, Cambridge CB3 0EH, UK

e-mail: hkm2@newton.cam.ac.uk

1. Pars, L. A. *Treatise on Analytical Dynamics* (Heinemann, London, 1965).
2. Euler, L. *Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum* (Greifswald, 1765).

Molecular transistors

## Potential modulations along carbon nanotubes

True molecular-scale transistors have been realized using semiconducting carbon nanotubes<sup>1–5</sup>, but no direct measurements of the underlying electronic structure of these have been made. Here we use a new scanning-probe technique to investigate the potential profile of these devices. Surprisingly, we find that the potential does not vary in a smooth, monotonic way, but instead shows marked modulations with a typical period of about 40 nm. Our results have direct relevance for modelling this promising class of molecular devices.

The principle of our scanning-gate potential-imaging (SGPI) technique is as follows. An individual semiconducting single-wall carbon nanotube is connected to two metal electrodes, and this transistor is switched to a conducting state by a negative gate voltage,  $V_g$  (Fig. 1a). A current flows when a bias voltage,  $V_b$ , is applied. At a close

distance above the device surface, we scan the tip of an atomic-force microscope (AFM), on which a positive tip voltage,  $V_t$ , is applied. The AFM tip acts as a local gate and induces a local potential barrier (Fig. 1b) when it is above the tube. This can reduce the hole current through the nanotube, which is recorded as a function of the tip position (Fig. 1c). The main point of SGPI is that the current reduction depends on the original local potential of the tube. In this way, SGPI maps out the local potential profile of the nanotube.

The top images in Fig. 1d,e show regular AFM images of two different samples with their corresponding SGPI measurements at different bias voltages underneath. The most remarkable feature of these images is that they show a sequence of current dips along the tubes. The dips appear to be confined to the region between the electrodes. Surprisingly, they are rather evenly spaced, with a distance of about 40 nm for the sample in Fig. 1d, and 36 nm for the sample in Fig. 1e. These observations indicate that the edge of the valence band does not vary in a smooth monotonic way. Instead, they point

to a potential that is significantly modulated, creating a sequence of barriers for the hole carriers (Fig. 1b). Similar SGPI measurements on metallic tubes did not show any contrast.

The effect of increased bias voltage is illustrated in the lower panels of Fig. 1d,e. The emphasis of the dot pattern appears to shift towards the electrode with the lower potential. Existing dots vanish (particularly clear for very large bias; see Fig. 1e) and new dots appear (bottom right of Fig. 1d; bottom left of Fig. 1e) that were not present for low bias. These trends may be due to the effective gate voltage near the right and left electrodes being different at higher bias voltages. Contrast also diminishes when the tube potential approaches the tip voltage.

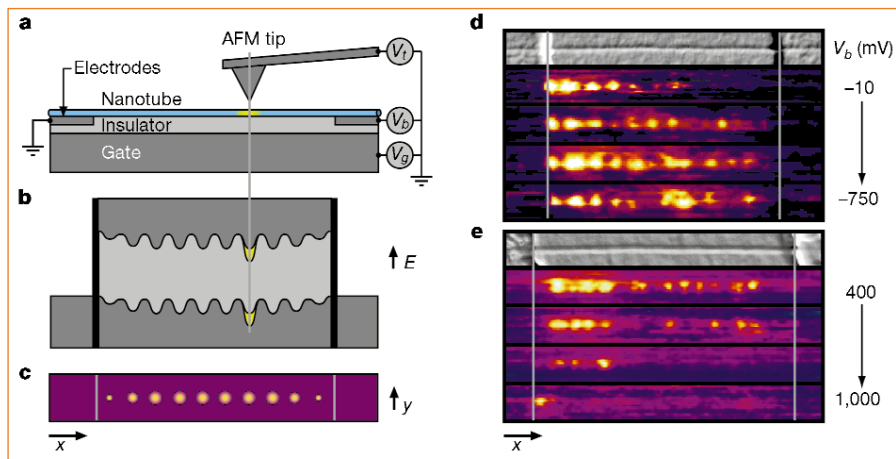
The electronic properties of semiconducting nanotubes have been proposed to be sensitive to perturbations by local disorder<sup>2,6–8</sup>. Our results confirm the occurrence of such electronic disorder by direct spatial images. The microscopic origin of this disorder is still unclear, however. The most likely causes are localized charges near the nanotube, or mechanical deformations. Detailed height measurements by AFM did not reveal any correlation between height and electronic features.

Our results shed a new light on other reported transport data. Step features have been found in current–voltage ( $I$ – $V$ ) curves of TUBEFET devices (ref. 3, and S. J. T. *et al.*, unpublished results). Our findings may explain these observations because an increasing bias voltage can bring down the potential barriers one at a time, leading to step-like features. Reported asymmetries in  $I$ – $V$  curves<sup>1,3,4</sup> can now be corroborated by the asymmetries in the potential profile along tubes at low bias. In conduction experiments at low temperatures (ref. 8, and Z. Yao *et al.*, unpublished results), phenomena related to multiple metallic islands have been observed, which can be explained by the barrier sequence seen in our SGPI images. Near the tube on top of the electrodes, no contrast could be found in the SGPI images, even for large tip voltages (up to  $\pm 3$  V). This indicates that Schottky barriers do not exist at the metal interface, as was suggested earlier<sup>4</sup>.

New scanning techniques that give a direct view of the potential landscape, such as the one presented here, provide a promising starting point for a better understanding of the electronic structure of nanotube devices. It should, for example, be feasible to study the effect of deliberate bending of nanotubes, different substrate and electrode materials, and the different geometry of devices such as intramolecular kinked-nanotube diodes<sup>5</sup> and nanotube crossings.

Sander J. Tans\*†, Cees Dekker\*

\*Delft University of Technology, Department of



**Figure 1** Scanning-gate potential imaging (SGPI) along a semiconducting carbon nanotube. **a**, SGPI measurement set-up. Variable bias voltages,  $V_b$ , and a gate voltage,  $V_g$ , of  $-6$  V are applied to the TUBEFET device. An atomic-force microscope (AFM) tip at 500 mV is scanned at a constant height of about 10 nm above the surface by retracing each line taken in regular tapping mode AFM while setting a certain height offset and the cantilever amplitude to zero. **b**, Potential landscape of the device. In the conducting state, the valence band edge is horizontal and pinned to the edge of the Fermi level of the electrode<sup>1,9</sup>. The tip voltage creates a potential dip (yellow) which provides a probe for the local potential. SGPI measurements (**d,e**) show that the band edge of the nanotube is not smooth but strongly modulated. **c**, Corresponding SGPI measurement. The device current (colour) is displayed as a function of tip position. Current is reduced when the AFM-tip-induced barrier aligns with minima in the original potential profile. The spatial resolution of the SGPI measurements, which we estimate to be of the order of 10 nm, is determined by the tip-sample distance and the tip radius. **d**, AFM image of the first sample and the corresponding SGPI images for  $V_b$  values of  $-10$ ,  $-100$ ,  $-500$  and  $-750$  mV (top to bottom). The sample consists of an individual single-wall carbon nanotube (horizontal line) on top of two 25-nm-high platinum electrodes (on the left and right) that are spaced by 650 nm. **e**, AFM image of a second sample and the corresponding SGPI images for  $V_b$  values of 400, 500, 700 and 1,000 mV (top to bottom). The sample consists of an individual single-wall carbon nanotube on top of two 750-nm-spaced gold electrodes. The electrodes of this sample are embedded in the  $\text{SiO}_2$  substrate to create a flat surface<sup>5</sup> (see **a**).

# Euler's Disk™

THE OFFICIAL WEBSITE

## Current Features:

[History](#)

[Publications](#)

[Events](#)

[Physics](#)

[Email the Inventor](#)

[Ordering](#)

[Custom Ordering](#)

