F609 - Tópicos de ensino de Física I

Construção e funcionamento de um esferômetro de baixo custo

Aluno: Guilherme Orelli Paiva 043856 (pitupaiva@gmail.com)
Orientador: Fernando Iikawa (iikawa@ifi.unicamp.br)

UNICAMP

Campinas, 08 de Dezembro de 2009.

1) Lista de materiais

- Um parafuso, com porcas, com passo em milímetros.
- 3 parafusos com porcas.
- Placa de plástico, ou de Duratex.
- Escala milimetrada ou papel milimetrado.
- Cola Durepoxi.
- Placa de plástico mais fino , ou de papelão rígido.
- Furadeira.
- Lima.
- Tampa de creme dental.
- Paquímetro.
- Calotas esféricas e esferas de dimensões variadas.

2)Resultados obtidos

Primeiramente, foram obtidos todos os materiais necessários. Basicamente, foram obtidos numa loja especializada em parafusos. Como a imagem abaixo mostra, os parafusos foram obtidos por meio do corte de uma barra de 1 metro, parafusada, com o passo de 1mm e 6mm de diâmetro. Além disso foram necessários uma furadeira (com esmeril acoplável, serra de arco para serrar os parafusos, régua, transferidos, cola branca, resina epoxi, óculos de proteção (segurança), porcas, ruelas, pote de maionese 500g (de plástico). Foram cortados três parafusos de 6,5 cm e um de 8.8 cm. Depois, por meio do uso da furadeira, com esmeril acoplável, e alicate todos os parafusos foram apontados. É importante ressaltar o uso do óculos de proteção para uso de tal aparelhagem. Parafusos com pontas facilitarão as medições.

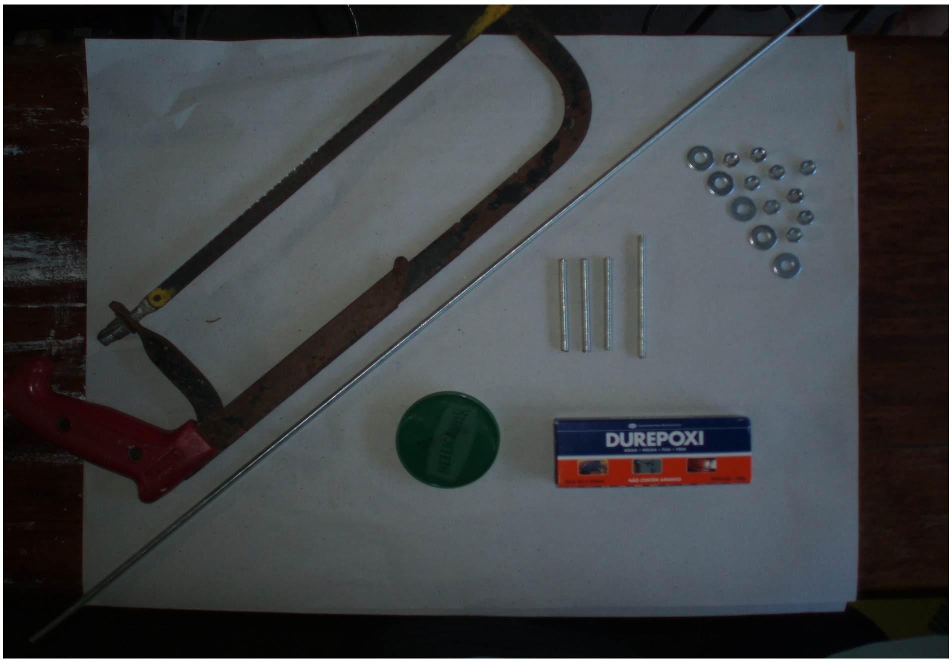

Figura 1: Parcela dos materiais necessários.

Foram cortados três parafusos de 6,5 cm e um de 8.8 cm. Depois, por meio do uso da furadeira, com esmeril acoplável, e alicate todos os parafusos foram apontados. É importante ressaltar o uso do óculos de proteção para uso de tal aparelhagem. Parafusos com pontas facilitarão as medições.

Figura 2: Etapa de apontamento dos parafusos.

Figura 3: Parafusos apontados com porcas enroscadas.

Depois, obtidos os parafusos da forma desejada, trabalhou-se a tampa do pote de maionese. Como a figura 4 mostra, foi desenhado (com régua e transferidor) um triângulo equilátero sobre uma folha branca colada na tampa. Com isso, os três parafusos menores foram encaixados em cada ponta do triângulo e o parafuso maior foi encaixado no incentro do triângulo. Esquentou-se os parafusos, para facilitar o processo de encaixe dos mesmos.

Figura 4: Processo utilizado para o encaixe do parafuso.

Conforme apresenta *figura 6*, a construção do aparato foi finalizada. Desde a entrega do relatório parcial, o trabalho progrediu no sentido de que houve as inserções do disco graduado (para ajuste fino) e da régua com graduação milimetrada. Além disso, utilizou-se uma tampa de creme dental junto ao disco graduado para facilitar o giro do mesmo.

Finalizado o processo de fabricação do instrumento, foram efetuadas medidas em lentes obtidas no laboratório de óptica e uma bola de bilhar. Além disso, foram feitas comparações com as medidas de um esferômetro de precisão (esferômetro de relógio comparador). Na parte de descrição do trabalho também serão apresentados estudos acerca da precisão do aparato e a exposição de relações matemáticas que devem ser conhecidas para entender o funcionamento do esferômetro.

Da maneira que mostra a *figura 5,* efetuamos algumas medidas do deslocamento do parafuso para avaliar o raio de curvatura das lentes. Foi necessário bastante cuidado para que as lentes não fossem riscadas pelos parafusos. Utilizando as relações (2) e (4), calculamos o raio de curvatura da lente e avaliamos os erros envolvidos.

Para fins de comparação, as medições com o esferômetro "caseiro" e com um esferômetro de precisão (de relógio comparador). Os resultados são apresentados a seguir:

ESFERÔMETRO "CASEIRO"		
Lente Convexa		
(x ± Δx) mm	(y ± Δy) mm	(R± ?) mm
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
3,30±1,50	25,0±0,5	96,35
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
3,30±1,50	25,0±0,5	96,35
3,30±1,50	25,0±0,5	96,35
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
3,30±1,50	25,0±0,5	96,35
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
3,35±1,50	25,0±0,5	94,95
Δx'=0,02mm	Δy=0,5mm	
Δx"=1,50mm		
Δx=1,50mm		**R = 95.51± ?**
		ΔR=164,74mm

Esferômetro "caseiro"		
Bola de bilhar		
(x ± Δx) mm	(y ± Δy) mm	(R± ?) mm
14,50±1,50	25,0±0,5	28,80
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,50±1,50	25,0±0,5	28,80
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,50±1,50	25,0±0,5	28,80
14,45±1,50	25,0±0,5	28,85
14,50±1,50	25,0±0,5	28,80
Δx'=0,02mm	Δy=0,5mm	
Δx"=1,50mm		ΔR=5,23mm
Δx=1,50mm		
R = (28,83± 5,23)mm		

ESFERÔMETRO DE PRECISÃO
R = (101,38 ± 0,01) mm

ESFERÔMETRO DE PRECISÃO
R = (23,05 ± 0,01) mm

Tabela 1: Resultados obtidos. Medições obtidas com dois tipos de instrumentos: esferômetros caseiro e de precisão.

É importante ressaltar:

I) Este esferômetro não é indicado para efetuar medidas em esferas (ou calotas) onde o valor de *y* seja próximo ao valor *R.* Analisando a *figura 7*, você pode concluir que o esferômetro não terá o encaixe ideal.

II) Para esferas onde *x* tenha valores próximos de 3.0mm, o erro propagado em R é muito alto (até maior do que o próprio raio). Isso ocorre porque o valor do erro instrumental (que é de 1,5mm) é muito próximo do próprio valor medido. O erro em x é de 1,5mm devido a irregularidade considerável do disco com 20 divisões. Logo, como pode ser observado, para o caso da lente convexa, o esferômetro não funciona. Já no caso da bola de bilhar, o erro padrão é consideravelmente menor e obtivemos valores próximos aos obtidos pelo esferômetro de relógio comparador.

III) ***Conclui-se, portanto, que a irregularidade no disco (com 20 divisões) é um fator determinante na precisão do instrumento. O desvio padrão das medidas e o***

próprio ajuste fino do disco, que é de 1/20 de milímetro, são desprezíveis em relação ao erro causado por esta irregularidade. Para futuros aperfeiçoamentos, um ponto essencial é melhorar a estrutura deste disco.

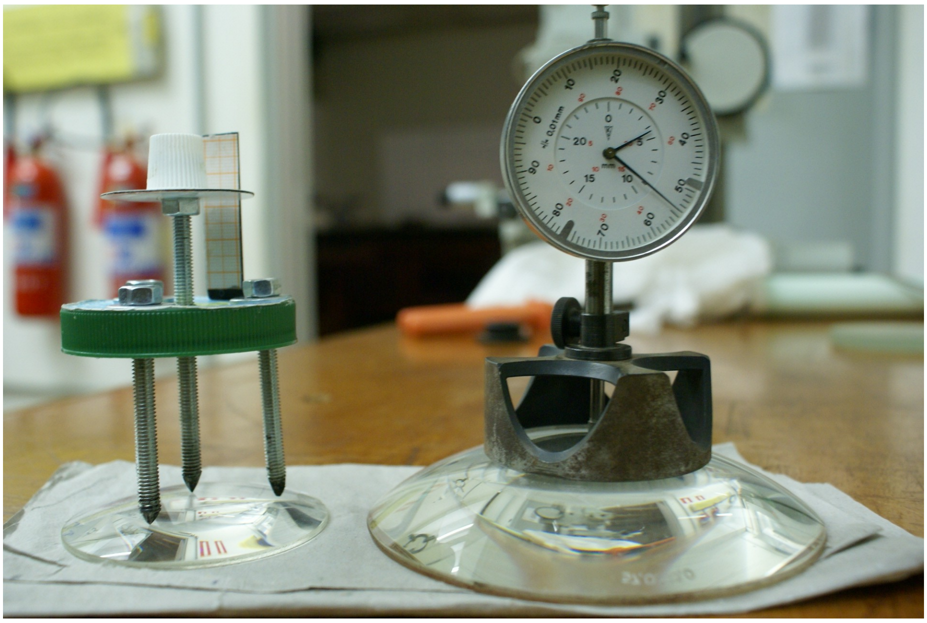

Figura 5: Utilização de dois tipos de esferômetro para avaliação do raio de curvatura de uma lente.

3) Experiência na etapa final

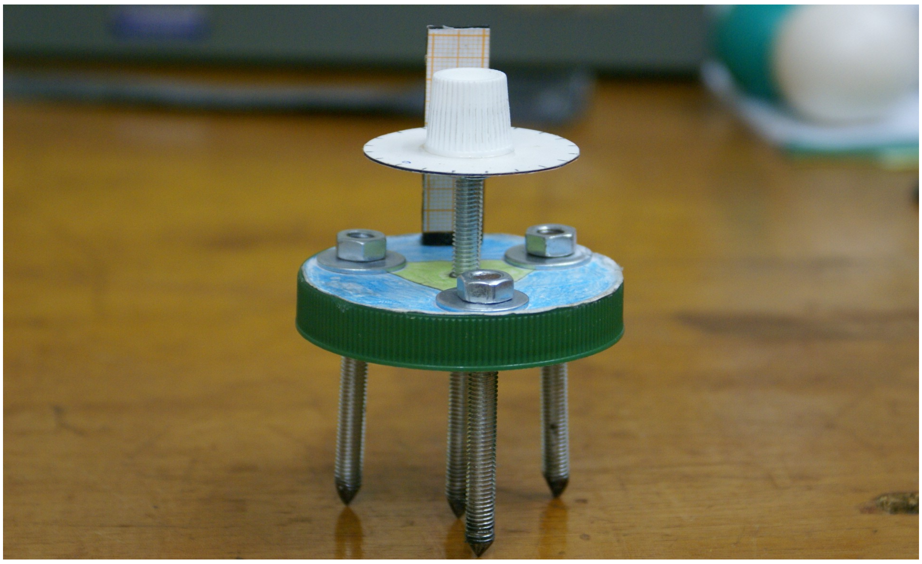

Figura 6: Esferômetro de baixo custo. Experimento finalizado.

4) Dificuldades encontradas

Na primeira etapa, a principal dificuldade encontrada foi no corte do parafusos, pois a serra de arco não estava em boas condições. Isto só ocorreu porque não foram encontrados os parafusos já prontos, no tamanho ideal, com passo desejado (1mm). Além disso, apontar os parafusos não foi um processo fácil, exigindo prática do manuseador.

Na segunda etapa, algumas dificuldades também foram encontradas. Primeiramente, o disco com vinte divisões, utilizado para ajuste fino do instrumento, não é perfeitamente plano. Conforme referência [2]: "ao usarmos a escalinha vertical e em função do movimento do disco ser meio irregular, podemos estar errando no valor da medida de até uma volta e mais a volta quebrada (o que equivale a um erro de 1.5mm)." Contudo, um ponto importante a ser melhorado em futuros trabalhos de aperfeiçoamento, é a irregularidade do disco. Além disso, foi trabalhoso ajustar os quatro parafusos de tal modo que ficassem no mesmo plano e os três parafusos periféricos tivessem o mesmo comprimento.

5) Sobre a pesquisa realizada

[1]http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/viewFile/7056/6532,acessado em 08/12/2009; a fonte é basicamente onde se encontrar todo auxílio e instruções de como montar um esferômetro caseiro. A fonte dá idéia de materiais a serem utilizados, além disso traz teoria necessária;

[2]www.ludoteca.if.usp.br/experimentos/ripe/esferometro.pdf, acessado em 08/12/2009; a fonte traz o mesmo tipo de informações do que a referência anterior. Entretanto, utiliza alguns materiais diferentes. Traz teoria também.

[3]http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/incertezas/, acessado em 08/12/2009; a fonte. A fonte discute como o processo de medida, assim como o instrumento utilizado, tem limites de precisão e exatidão. Também discute propagação de erros. Foi a fonte na qual baseou-se os estudos de erros envolvidos no experimento.

6) Descrição do trabalho

6.1) Resumo

O esferômetro se presta para a medição de espessuras de amostras de chapas, de raios de curvatura de calotas esféricas (ou raios de esferas), tais como lentes e espelhos; foi usado durante muito tempo pelos oculistas e técnicos em fabricação de lentes. Este trabalho propõe a construção de um esferômetro, que pode ser facilmente construído com materiais de baixo custo encontrados sem dificuldades no mercado. Além disso, pretende-

se explicar o funcionamento do aparato, por meio de medições de materiais variados.

6.2) Descrição

Na escola, o esferômetro pode fazer parte das atividades experimentais dos cursos de primeiro e segundo graus de ciências ou de matemática (ou mesmo interdisciplinarmente). No caso da disciplina de matemática, o aparelho utiliza princípios de geometria, e assim é possível aplicar esses conceitos em situações reais. Da mesma forma, o esferômetro é útil em Física, mais especificamente, no conteúdo de óptica geométrica.

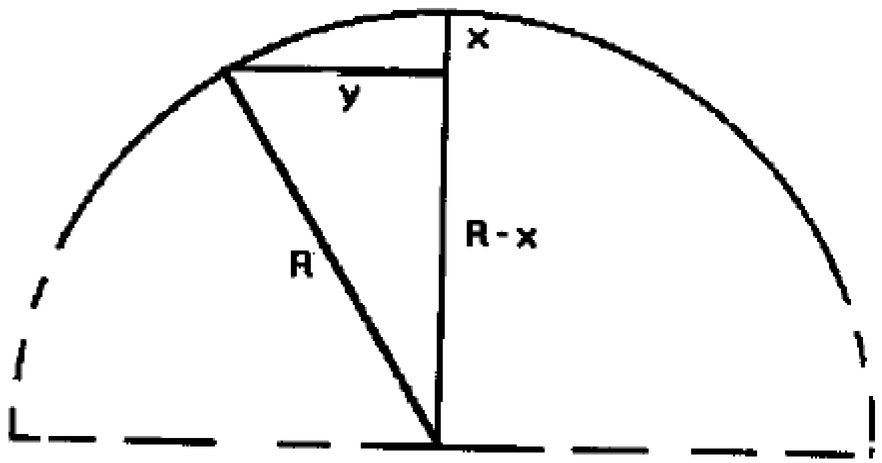

Figura 7: Tridimensional, vista em perspectiva lateral.

Para entendermos como se funciona o esferômetro, vejamos a *figura 7.* Suponha, para exemplificar, a situação em que o esferômetro esteja por cima da calota. Na figura, temos *x* representando o quanto o parafuso milimétrico sobe (desce) na calota esférica convexa (côncava). No triângulo, observamos:

$$R^2 = y^2 + (R - x)^2 \quad , \qquad (1)$$

Desta maneira,

$$R = (x^2 + y^2)/2\mathrm{x} \quad , \qquad (2)$$

Daí, a distância y é a medida entre o parafuso periférico e o parafuso central. A distância x é medida pelo deslocamento do parafuso central. Contudo, podemos calcular o raio da calota R. Para o caso da esfera côncava nada muda nas relações, apenas que, nesse caso, o giro do esferômetro seria ao contrário.

6.3) Estudo dos erros

O erro padrão de *x* é composto da seguinte maneira:

$$\Delta x=\sqrt{\Delta x'^2+\Delta x''^2} \quad , \qquad (3)$$

onde

$\Delta x'$ *é o desvio padrão das medidas* ,

$\Delta x''$ *é o erro instrumental* ($\Delta x''=1.5\text{mm}$ *conforme referência* [1]).

O erro padrão de y é:

$\Delta y=0{,}5\, mm$ (*metade da menor medida da régua*) .

Contudo, o erro propagado em R:

$$\Delta R=\sqrt{\Delta x^2(\partial R/\partial x)^2+\Delta y^2(\partial R/\partial y)^2} \quad , \qquad (4)$$

7) Opinião do orientador

Meu orientador concorda com o expressado neste relatório parcial e deu a seguinte opinião:

"O trabalho desenvolvido pelo aluno está de acordo com o plano de atividades proposto inicialmente. O relatório mostra o resultado final, bem como as limitações do aparelho montado. Por causa dessas limitações que fez com que o aluno testasse em diferentes sistemas e encontrasse os elementos que limitavam a precisão do aparelho. Por minha parte estou satisfeito com o trabalho desenvolvido pelo aluno."

8)Dia e horário de apresentação

Segundo dia, segundo horário.

9) Referência

[1]http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/viewFile/7056/6532,acessado em 08/12/2009;

[2]www.ludoteca.if.usp.br/experimentos/ripe/esferometro.pdf, acessado em 08/12/2009;

[3]http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/incertezas/, acessado em 08/12/2009;

[4]http://physicslabs.phys.cwru.edu/MECH/Manual/Appendix_V_Error%20Prop.pdf , acessado em 08/12/2009.

10) Anexos

(referências [1],[2] e [4] serão enviadas separadamente, pois não é possível juntá-las em um arquivo único).

Referência [3]: (segue em anexo somente uma parcela, pois o site é bastante extenso)

Desvio Padrão

Um processo de medida tem sempre por objetivo determinar o valor médio verdadeiro, y_{mv} , de uma grandeza, cujo valor verdadeiro é y_v. Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro, são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, ...y_n\}$, o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mu} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Como em geral y_{mv} é um valor inacessível, usam-se estimativas: a média dada pela equação

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i ,$$

a estimativa do desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - m)^2}$$

e do desvio padrão da média

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n}\sum(x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Apenas relembrando alguns termos novos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuidos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

ERRO SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO PADRÃO: Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser ‘corrigido’ enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplos

Medida da tensão de uma pilha.

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de 1σ = 0,25% do valor indicado.

A incerteza do processo de medida deve, portanto, ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. As medidas realizadas estão na tabela a seguir.

n	U (volt)	incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Tabela 1 - Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

Antes, um comentário: a tabela 1 acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo:

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Tabela 2 - Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

Vamos aos cálculos. Note que em cálculos intermediários usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

Valor médio:

$$\bar{U} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i = 1{,}5763\ \mathrm{V}$$

Desvio padrão das medidas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(V_i - 1{,}5763)^2} = 0{,}0066\ \mathrm{V}$$

Desvio padrão do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0066}{\sqrt{6}} = 0{,}0027\ \mathrm{V}$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida):

$$L_r = \left(\frac{0{,}25}{100}\right) 1{,}5763 = 0{,}0039\ \mathrm{V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do **processo de medição**) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo, a primeira medida na Tabela 2, pode ser expressa como:

$$U_1 = (1{,}572 \pm 0{,}007)\ V$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.

Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\bar{U} = (1{,}5763 \pm 0{,}0027)\ V$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um **erro de calibração**. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com **voltímetros diferentes**? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse.

(Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?). Podemos supor então que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal.

Dessa forma é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada de erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

Erro padrão:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0{,}0048V$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\bar{U}_p = (1{,}5763 \pm 0{,}0048)\ V$$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média $\bar{U}$ e o desvio padrão da média.

Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão.

Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.