

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”**

F609 A – Tópicos de Ensino de Física I

**RELATÓRIO FINAL: DUPLO CONE**

Aluna: Sarah Vergueiro Ceron RA: 035928

sarahvceron@gmail.com

Orientador: Prof. David M. Soares

soares@ifi.unicamp.br

Coordenador: Prof. José Joaquim J. Lunazzi



04 de dezembro de 2009

## 1) Experimento: Montagem e Resultados atingidos:

### 1.1 Lista de Materiais:

A princípio serão utilizados os seguintes materiais:

- 4 cones de plástico iguais
- Cabo de vassoura
- Dobradiça
- “parafuso de rosca sem fim”, porcas sextavadas e porcas borboleta
- Furadeira
- Serra
- Cola araldite
- Tubo de PVC

### 1.2 Coleta e preparação dos materiais:

A figura abaixo (figura 1) ilustra o projeto do *duplo cone sobre uma rampa em V*.

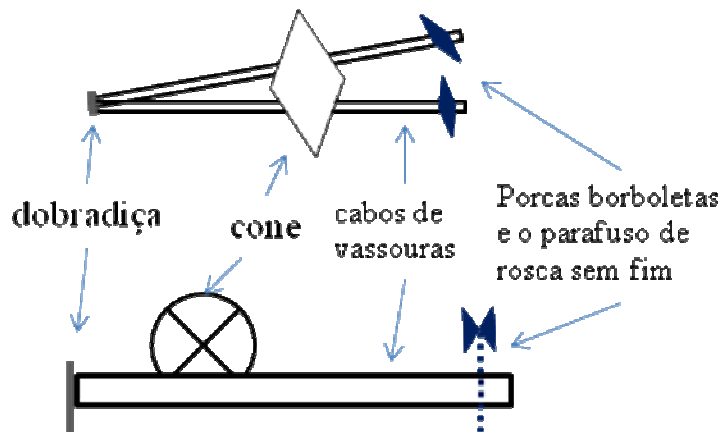


Figura 1: Ilustração do projeto do duplo cone sobre uma rampa em V. Acima a vista superior e abaixo a vista lateral.



Figura 2: Objetos reunidos para a construção do aparato.

Para fazer a rampa, usei 2 cabos de vassoura de madeira devido ao tamanho da rampa que seria necessário para os funis. Com cuidado, serrei e lixei as pontas (as quais apresentam uma rosca de encaixe e um gancho) para uniformizar o cabo.

O parafuso de rosca sem fim possui 4mm de diâmetro. com 2 porcas sextavadas e 2 porcas borboletas de modo a servir na barra

Há vários formatos de funis de plástico encontrados no mercado, porém apenas 2 tipos se encaixaram no esperado para o experimento e ambos possuem uma pequena aba, a qual foi retirada utilizando um estilete afiado, de modo a deixá-los com as laterais uniformes. Usando a cola araldite, colei as bocas dos funis, formando o duplo cone, conforme figura 3.

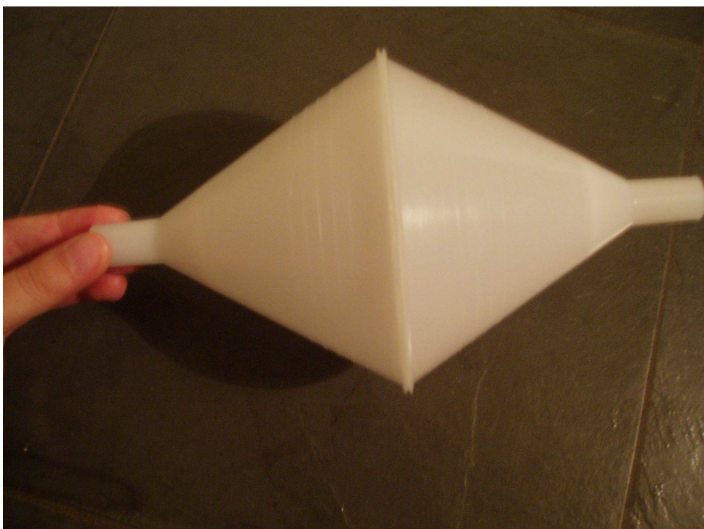


Figura 3: Imagem dos dois funis colados pelas bocas.

### **1.3 Montagem Experimental:**

- Em um dos lados de cada cabo de vassoura, fiz um furo a 3cm da ponta, com o auxílio de uma furadeira para o parafuso de rosca sem fim. O furo foi feito para que o parafuso entrasse ao ser rosqueado. Isso foi possível porque os cabos de madeira disponíveis eram de um material tipo compensado.
- Para a fixação da dobradiça nos cabos, muito cuidado foi tomado para que os furos ficassem paralelos. Para ajudar, passei fita crepe segurando os cabos na posição desejada. Coloquei a dobradiça sobre a lateral dos cabos contrária aos furos (como mostra figura 4) e marquei a posição dos parafusos com uma caneta.

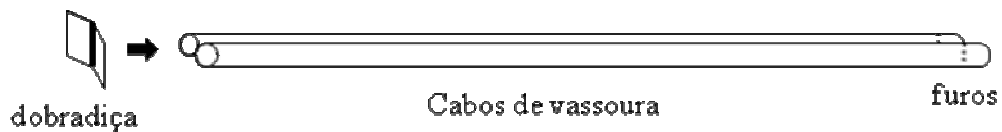


Figura 4: Figura mostrando o lado em que a dobradiça deve ser colocada nos cabos e os furos feitos para a passagem da rosca.

Para ajudar na fixação dos cabos na dobradiça, passei cola araldite na lateral do cabo que seria coberta pela dobradiça. Só depois fixei a dobradiça com os parafusos. Devido ao material dos cabos não foi necessário usar uma furadeira para isso.

Para a fixação da porca borboleta no parafuso de rosca sem fim, primeiramente coloquei a porca borboleta em uma das pontas do parafuso e rosqueei até que a rosca do parafuso começasse a sair do outro lado da porca. Esse ponto foi marcado na rosca, logo abaixo da porca, e foi levemente amassado com um alicate, para que a porca não passasse dali. Nessa ponta da rosca coloquei cola araldite e rosqueei a porca até que ela travasse. O mesmo procedimento foi usado para a outra extremidade da barra, com a outra porca borboleta.

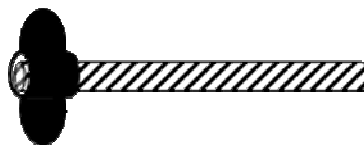


Figura 5: Posição da rosca borboleta no parafuso de rosca sem fim.

- Depois de estimada a altura da rampa para os cones, cortei em 2 o parafuso de rosca sem fim, de tal maneira que cada pedaço fique com uma porca borboleta de um dos lados. Depois de cortada, encaixei nos cabos de vassoura, com as porcas borboletas para o mesmo lado.
- O tubo de PVC será usado como cilindro para que o espectador veja que a rampa está realmente inclinada.



Figura 6: Vista lateral da rampa em V com o duplo cone feito de funis.



Figura 7: Vista da rama em V com o duplo cone mostrando a dobradiça na junção dos cabos de vassoura e ao fundo a barra roscada com a porca borboleta na ponta.

#### **1.4 Resultados:**

O experimento funciona satisfatoriamente. Não conseguimos avaliar muito bem o movimento do centro de massa até o ponto de queda, pois nosso duplo cone possui em suas extremidades o formato de um cilindro, alterando a posição dos pontos de contatos entre ele e os trilhos, conseqüentemente alterando assim a angulação que a força peso faz sobre esses pontos e o sentido do torque. Dessa maneira, o duplo cone vai até um momento em que para e volta, oscilando ao redor de um ponto até que entra em equilíbrio parando no limite entre o formato de cone e de cilindro.

Fizemos alguns testes para as aproximações geométricas desenvolvidas na seção 4.2. Nosso funil usado possui um ângulo de abertura da ponta de aproximadamente  $60^\circ$ , ou seja,  $\gamma=30^\circ$ . Medindo-se com uma régua, obtemos a distância entre a dobradiça e a rosca sem fim,  $D=91\text{cm}$ , e com uma régua subimos os cabos de vassoura até alcançar uma inclinação da rampa de aproximadamente  $\alpha=3^\circ$ . Com nosso  $\alpha$  fixo alteramos a angulação de abertura da rampa e medimos  $2\beta$  com um transferidor.

<b>Tabela 1:</b> Tabela dos ângulos de abertura da rampa com respectiva observação do fenômeno		
$\beta / ^\circ$	<b>Observado</b>	<b>Esperado pelas aproximações<sup>+</sup></b>
2,5	Quando colocado sobre a rampa com cuidado <sup>a</sup> ele desce a rampa	Descer rampa.
3,5	Quando colocado sobre a rampa com cuidado <sup>a</sup> ele desce algumas vezes mas não sobe.	Descer rampa.
5	Quando colocado com cuidado <sup>a</sup> sobre a rampa ele se mantém no lugar, sem subir nem descer.	Equilíbrio estático.
6	Quando colocado com cuidado <sup>a</sup> sobre a rampa, ele tende a não ficar mais em equilíbrio, sobe algumas vezes.	Subir rampa.
6,5	Quando colocado com cuidado <sup>a</sup> sobre a rampa ele sobe lentamente todas as vezes.	Subir rampa.

<sup>a</sup>duplo cone colocado no centro da rampa, de forma mais simétrica possível.

<sup>+</sup>equações 8, 9 e 10.

## 2) Dificuldades encontradas:

Com relação à montagem experimental, não houve grandes problemas ou dificuldades, a não ser para encontrar no mercado um funil que tivesse uma forma cônica da maneira esperada e com uma abertura não muito grande. Porém a análise do fenômeno físico e as equações relacionadas ao movimento possuem uma certa complexidade e interessante de se mostrar somente para um público de graduação, com um certo nível de conhecimento prévio.

## 3) Referências:

- [1] Gandhi, S. C. & Efthimiou, C. J., The ascending double cone: a closer look at a familiar demonstration. *European Journal of Physics*, vol. 25, pp. 681-694, 2005.
- [2] Medeiros, A. & Medeiros, C. F. de, Desvendando o Mistério do Duplo Cone. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 25, no. 3, Setembro, 2003.

- [3] FERRAZ NETO, L. Paradoxo Mecânico: Duplo Cone. Publicação on line no site Feira de Ciência. [http://www.feiradeciencias.com.br/sala06/06\\_08.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala06/06_08.asp) \*
- [4] Sobe ou Desce. Publicação on line no site Pavilhão do Conhecimento. [http://www.pavconhecimento.pt/exposicoes/modulos/index.asp?acao=showmodulo&id\\_exp\\_modulo=133&id\\_exposicao=5](http://www.pavconhecimento.pt/exposicoes/modulos/index.asp?acao=showmodulo&id_exp_modulo=133&id_exposicao=5) \*
- [5] Duplo cone e réguas de madeira inclinadas. Publicação on line no site Museu de Física. <http://museu.fis.uc.pt/6.htm> \*
- [6] Feynman, R. P., *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1977, Massachusetts, vol.1, 6a. ed.
- [7] Canalle, J. B. G & Moura, R., Duplo cone, Quádrupla finalidade. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, vol.15, no. 3: p. 323-327, dez. 1998.
- [8] Bartoš, J. & Musilová, J., Small surprises in ‘rolling-physics’ experiments. *European Journal of Physics*, vol. 25, pp. 675-687, 2005.

#### **4) Descrição do trabalho:**

##### **4.2 Resumo :**

Este trabalho tem como objetivo, atrair o espectador e instigá-lo a pensar sobre os fenômenos físicos que acontecem à sua volta. O duplo cone que “sobe” uma rampa em V quando colocado na parte de baixo, foi construído com materiais fáceis de adquirir e pensando em uma montagem que torne fácil o manuseio por crianças em período escolar e adultos.

##### **4.2 Descrição:**

Quando nos detemos ao detalhes de um problema é possível que consigamos visualizar sua solução, ou ao menos chegar bem próximo dela.

Com o duplo cone não é diferente. Ao prestarmos atenção no movimento que o cone realiza ao passar da parte mais baixa da rampa para a mais alta, notamos que além do deslocamento óbvio ao longo da rampa, na horizontal, ele sofre um deslocamento inesperado na vertical.

\*: Material dos sites encontra-se nos apêndices



Fig 8 : A figura acima chama a atenção para o avanço do duplo cone sobre a rampa e sua descida quando o mesmo avança da direita para a esquerda em uma aparente “subida”<sup>[2]</sup>.

Vamos começar a pensar sobre o eixo do nosso objeto, mostrado na figura acima, que sofre deslocamento. Podemos imaginar um corpo como um conjunto de partículas materiais, com a Terra exercendo sobre cada partícula uma força atrativa, sendo o peso de um corpo nada mais que a resultante de todas as forças atrativas que a Terra exerce sobre as suas partículas<sup>[6]</sup>. Qualquer que seja a orientação do corpo em relação à Terra, a direção da força peso passa sempre por um mesmo ponto do corpo, chamado de centro de gravidade. Supondo a gravidade constante para todos os pontos do corpo, esse centro de gravidade coincide com o centro de massa do corpo. Temos duas regras práticas para determinar o centro de massa ou de gravidade do corpo para essas condições:

- 1) Se um corpo homogêneo admite um centro de simetria, o seu centro de massa coincide com ele. Por exemplo, o centro de uma esfera homogênea está no centro dela.
- 2) Se um corpo homogêneo admite um eixo de simetria, o seu centro de massa encontra-se sobre esse eixo<sup>[7]</sup>.

Por exemplo, o centro de massa de um cilindro encontra-se sobre seu eixo.

Com as regras 1 e 2 podemos dizer que o nosso duplo cone, homogêneo e apresentando um eixo de simetria, possui seu centro de massa no seu centro geométrico. À luz desses termos podemos analisar a figura 8 acima e notamos que o centro de massa do duplo cone, na verdade, desce a rampa.

Ao ser apoiado sobre a rampa ele está em equilíbrio instável, ou seja, ao ser afastado do seu ponto de equilíbrio inicial ele se afasta ainda mais, e qualquer corpo em equilíbrio instável está com máxima energia potencial, ou seu centro de massa está na posição mais alta possível. Para que ele diminua sua energia potencial, deve abaixar seu centro de massa, implicando em um aumento de energia cinética. Dessa maneira nosso duplo cone rola e translada sobre a rampa “subindo-a”.

A maior parte dos textos explica a ilusão de óptica causada pelo artefato, como o deslocamento do centro de massa. *“Você ficará surpreso ao ver o duplo cone rolar ladeira acima ao longo da rampa. Mas, realmente, sobe? Olhe para as extremidades do cone. Elas descem e assim também o próprio duplo cone realmente desce. Mas ele ‘parece’ estar desafiando a lei da gravidade. Que alguma coisa poderia rolar ladeira acima é algo verdadeiramente altamente inesperado e realmente impossível, a menos que esta coisa tenha a velocidade necessária. O que nós vamos fazer agora não é*



*tornar o impossível realmente possível, mas fazer o impossível parecer possível” (De Vries, 19 72, p. 55)<sup>[2]</sup>.*

Porém atentemos para outro fator que faz com que o duplo cone aparentemente suba a rampa: os pontos de contato. A figura seguinte resalta esses pontos:

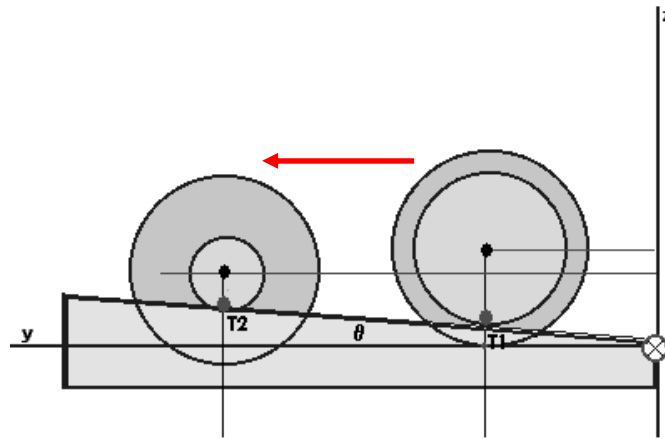


Figura 9: Ilustração mostrando o deslocamento do centro de massa e também na subida dos pontos de contato.

Devido ao tipo de movimento sofrido pelo duplo cone notamos que embora os pontos de contato “subam” eles nunca são os mesmos. Ao mantermos nossa atenção nesses pontos de contato o duplo cone dá a ilusão de subir.

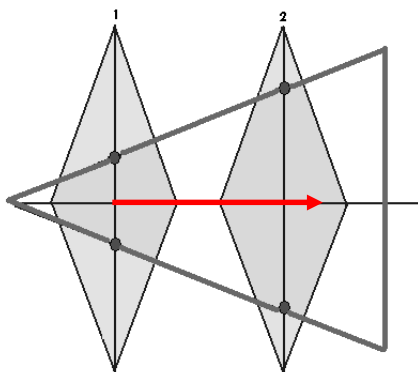


Figura 10: Vista de cima da rampa com o duplo cone em duas posições<sup>[2]</sup>.

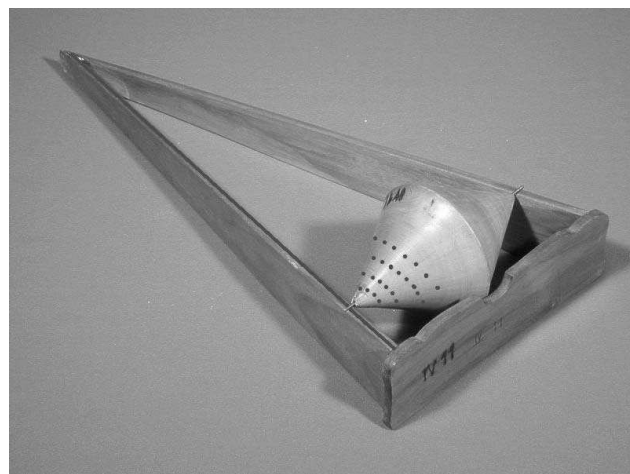


Figura 11: O lugar geométrico dos pontos de contato entre o duplo cone e a rampa é a espiral formada com o avanço do aparato<sup>[2]</sup>.

A figura 10 mostra a vista de cima da rampa e destaca os pontos de contato entre a rampa e o cone quando este avança da esquerda para a direita. Vale ressaltar que os pontos de contato das figuras 9 e 10, para que o duplo cone mova-se no sentido desejado para a ilusão, não são exatamente esses, sendo apenas ilustrativos. Porém, são

úteis ao mostrar que os pontos nunca são os mesmos, já com a figura 11 fica claro que eles nunca são os mesmos e que eles vão se afastando cada vez mais do centro do duplo cone.

Por tentativas ou intuitivamente vemos que a abertura da rampa, sua altura e a abertura do cone são de grande importância para o fenômeno de “subida”. Para ilustrar isso vejamos as figuras abaixo (12 e 13) que apresentam o duplo cone sobre trilhos paralelos e horizontais e sobre trilhos em “V” e horizontais.

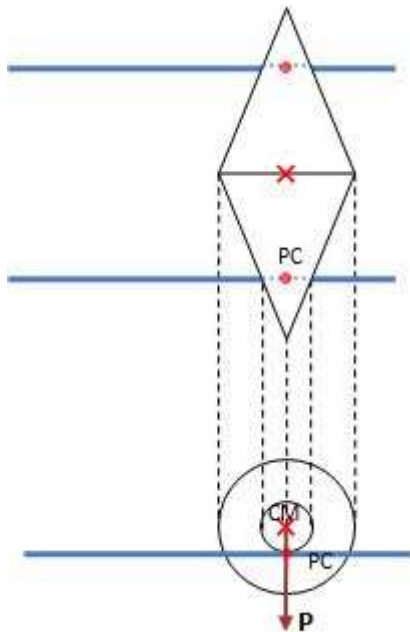
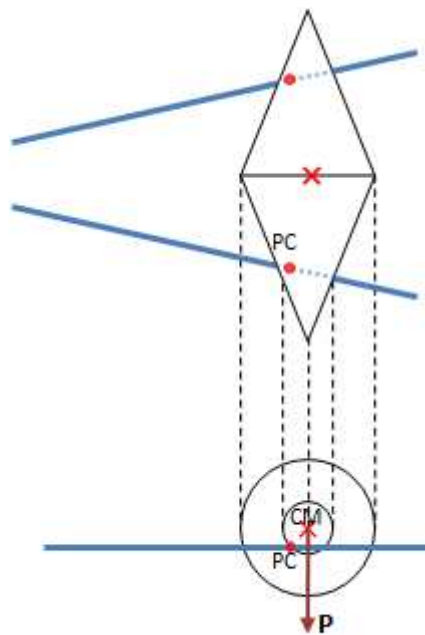


Figura 12: Vista superior e lateral dos trilhos paralelos e do duplo cone com seu respectivo centro de massa (CM) e os pontos de contato com os trilho (PC). Do centro de massa temos a força peso (**P**).

Figura 13: Vista superior e lateral dos trilhos em “V” e do duplo cone com seu respectivo CM e os PCs com os trilho. Do centro de massa temos a força peso (**P**).



Das figuras podemos notar ao colocar o duplo cone sobre trilhos paralelos e horizontais o ponto de contato fica logo abaixo do CM. Dessa maneira, a força peso exercida pelo CM não é capaz de produzir torque sobre o PC para que o duplo cone rote. Já ao angularmos os trilhos, mesmo mantendo-os horizontais, acontece que o PC desloca-se no eixo horizontal, não ficando na direção de  $\mathbf{P}$ .

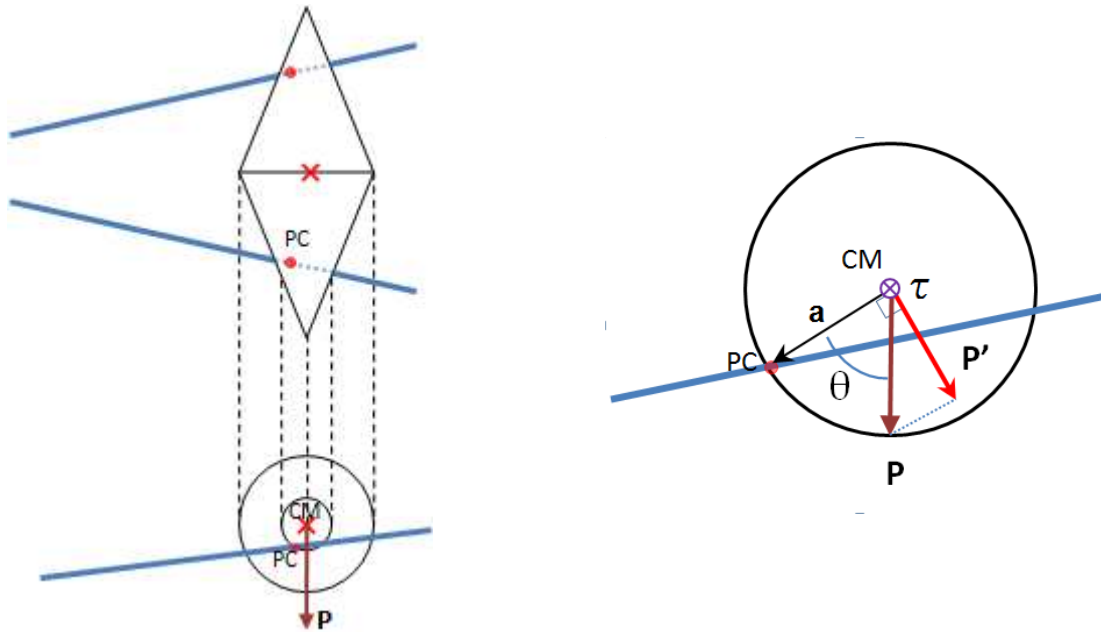


Figura 14: A figura à esquerda mostra o duplo cone sobre a rampa em V. A figura à direita é o círculo central destacado com a força peso  $\mathbf{P}$  e a decomposição da mesma na perpendicular ao raio  $\mathbf{a}$ . A força decomposta  $\mathbf{P}'$  exerce um torque sobre o ponto de contato PC.

Como mostrado na figura acima, o peso exerce sobre o ponto de contato um torque que faz com que o duplo cone gire<sup>[1]</sup>.

Uma análise de energia é bastante útil nesse momento. Consideremos o nível zero de potencial de gravidade do CM do cone quando as pontas alcançam os trilhos da rampa. Do movimento sabemos que o cone rota ao redor do seu próprio eixo e seu CM translada<sup>[1,8]</sup>. Da lei de conservação de energia temos a forma:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgw = const. \quad (1)$$

onde  $I=(3/5)mR^2$  é o momento de inércia do duplo cone com respeito ao eixo de simetria e  $w$  é a altura instantânea do centro de massa abaixo do nível zero de potencial. A relação 1 pode ser resolvida numericamente com respeito à  $v$  ou  $\omega$  como função do tempo. Como esses calculos não são elementares apresentamos os resultados somente na forma gráfica.

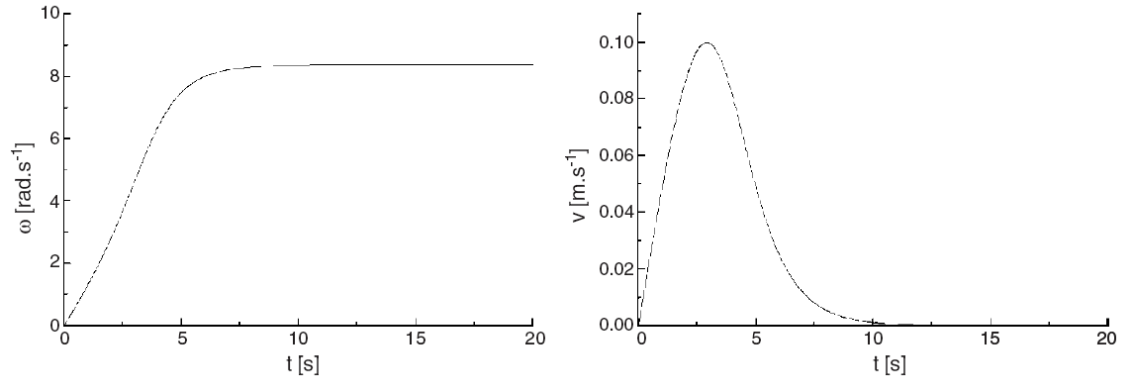


Figura 15: Funções  $\omega(t)$  e  $v(t)$ <sup>[8]</sup>.

No entanto, a lei de conservação (equação 14) nos dá algumas conclusões interessantes sem nenhum cálculo. Suponha que  $v(0)=0$  então  $\omega(0)=0$ . Isso mantém que  $w(0)>0$ . Na situação final com as pontas do duplo cone coincidindo com os pontos de contato com os trilhos, ou seja, os pontos de contato estão no eixo,  $r_f=0$ . Também,  $\omega_f=0$  e pelo gráfico da figura 15,  $v_f=0$ . Comparando os valores da energia total inicial ( $t=0$ ) e final ( $t \rightarrow \infty$ ) obtemos:

$$mgw(0) = \frac{1}{2} I \omega_f^2 \quad \text{então } \omega_f > 0.$$

Assim predizemos que no estágio final da idealização do experimento o cone rota ao redor do seu eixo de simetria, o qual está no repouso. Isso é confirmado pela figura 15. No entanto, na real situação o movimento rotacional pára por forças de atrito.

Tentemos a seguir geometrizar a situação.

A condição física para que haja a produção da ilusão de subida do duplo cone, é que a distância entre os contatos em diferentes posições ao avançar a rampa ( $H$ ) seja maior que a distância subida pelo ponto de contato entre o cone e rampa ( $h$ ), veja figuras 16 e 17. Ou seja:

$$H > h \tag{2}$$

Nesse estudo três ângulos possuem importância:

$\alpha \rightarrow$  ângulo de inclinação da rampa.

$2\beta \rightarrow$  ângulo de abertura da rampa.

$2\gamma \rightarrow$  ângulo formado no vértice do duplo cone.

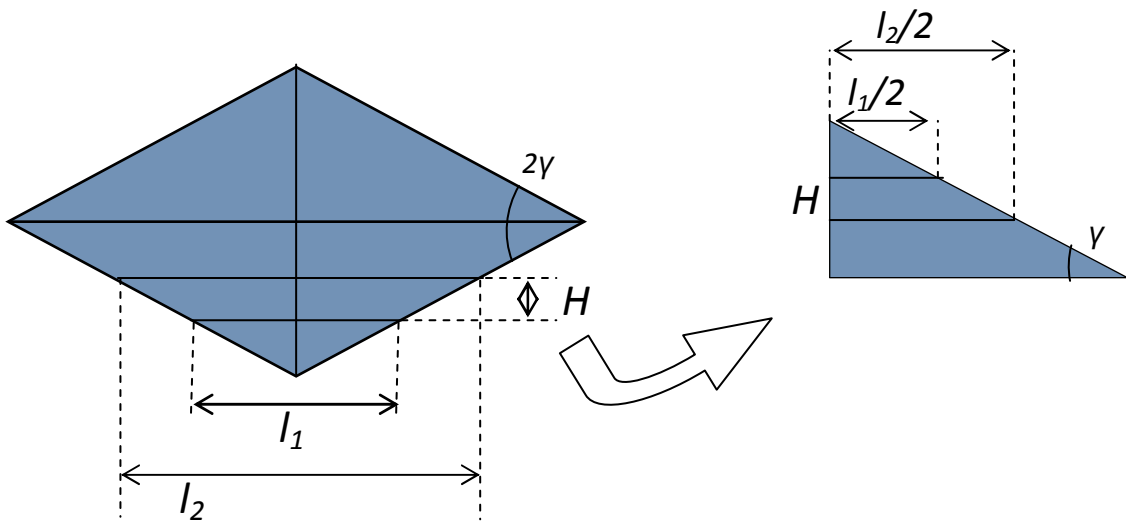


Figura 16: A figura representa o duplo cone sobre a rampa, indo da posição 1 à 2 com as distâncias entre os pontos de contato. À direita está em destaque um dos quadrantes do duplo cone.

Com esse avanço, nota-se que o deslocamento do contato sobre o duplo cone varia uma distância  $H$  dada por:

$$\therefore H = \frac{l_2 - l_1}{2} \operatorname{tg} \gamma \quad (3)$$

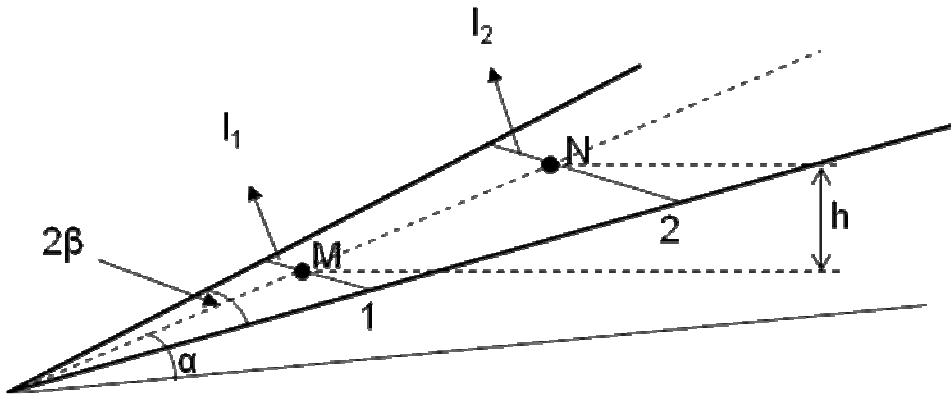


Figura 17: Representação da rampa com os respectivos ângulos de abertura e inclinação e a diferença de altura  $h$  dos pontos de contato.

A distância  $h$  pode ser descrita como a seguir:

$$h = \overline{MN} \operatorname{sen} \alpha \quad (4)$$

Porém a distância  $\overline{MN}$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\overline{MN} = \frac{l_2}{2} \cot g\beta - \frac{l_1}{2} \cot g\beta \quad (5)$$

Assim  $h$  fica:

$$h = \frac{l_2 - l_1}{2} \cot g\beta \cdot \text{sen}\alpha \quad (6)$$

Para satisfazer nossa condição física de movimento temos que  $H > h$ :

$$\frac{l_2 - l_1}{2} \text{tg}\gamma > \frac{l_2 - l_1}{2} \cot g\beta \cdot \text{sen}\alpha \quad (7)$$

$$\text{tg}\gamma > \cot g\beta \cdot \text{sen}\alpha \Leftrightarrow \text{tg}\gamma \cdot \text{tg}\beta > \text{sen}\alpha \quad (8)$$

Logo, a equação 8 representa a condição física entre os ângulos para que a ilusão de subida ocorra. Se

$$\text{sen}\alpha > \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\gamma \quad (9)$$

o duplo cone descera a rampa, ou se

$$\text{sen}\alpha = \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\gamma \quad (10)$$

o duplo cone ficará em equilíbrio estático<sup>[2]</sup>.

Uma análise mais profunda com relação à energia e às singularidades do experimento do duplo cone encontra-se na referência [1].

## 5) Declaração do orientador:

Meu orientador concorda com o expressado neste relatório final e deu a seguinte opinião:

Gostei da apresentação. A exposição sobre as causas do fenômeno é clara. O uso da lei de conservação de energia é de fácil entendimento além de ilustrar os movimentos do cone. O trabalho ficou fácil de ser lido e entendido.

Uma descrição geométrica pormenorizada do fenômeno carregaria demais o relatório e foi acertadamente apenas referenciada.

## 6) Apresentação do Painel:

Gostaria de apresentar o painel e o experimento no segundo dia, sexta-feira, 11 de dezembro, em qualquer um dos horários.

## 7) Apêndices:

### 8.1 Apêndice A:

#### 8.1.1 Material dos Sites:

##### 8.1.1.1 Feira de Ciências:

# Paradoxo mecânico - duplo cone

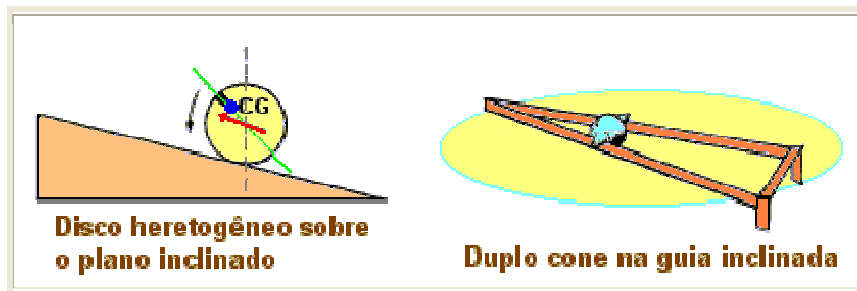
- duplo-tratamento -  
(O duplo-cone que sobe a rampa)

Prof. Luiz Ferraz Netto  
[leobarretos@uol.com.br](mailto:leobarretos@uol.com.br)

### Objetivo

Este projeto ilustra um curioso paradoxo: um **disco** colocado sobre um plano inclinado, sobe ao longo do plano, em lugar de descer! Um **duplo-cone** rola rampa acima, em lugar de descer!

Para o caso do duplo-cone faremos um tratamento elementar (nível médio) e um tratamento mais aprimorado para alunos do nível superior. É de interesse do professor de Física.



O segredo é simples, e, na verdade, o centro de gravidade está descendo, em ambas as situações!

O disco de madeira com raio de cerca de 10 cm e com uns 3 cm de espessura, tem em sua borda um orifício de diâmetro 2 cm e profundidade 3 cm praticado ao longo de um raio. Esse buraco é preenchido com chumbo (ali teremos um cilindrinho de chumbo), deixando-se cerca de 0,5 cm livre para ser preenchido com a mesma madeira do disco, disfarçando o buraco.

O C.G. do sistema fica bem próximo ao cilindro de chumbo, ou seja, próximo da borda. Colocando-se o disco no início de um plano inclinado, com o disfarce para cima, o disco rola plano acima, com o intuito de baixar o centro da gravidade.

Uma variante interessante desse paradoxo do disco, dessa vez produzido com material homogêneo, é o [paradoxo do duplo-cone de madeira](#).

### Tratamento elementar

Dois cones (de madeira bem densa) são colados base a base; em seus vértices colam-se bolinhas de madeira ou simplesmente deixam-se sobressair de cada 'vértice' um eixo cilíndrico, como se ilustra abaixo. O duplo cone é colocado sobre trilhos (feito de folha de flandres, cortada e dobrada) ou sobre guias que formam dois planos inclinados feitos de madeira. O sistema sobe o plano inclinado para poder baixar seu centro de gravidade. A foto mostra um modelo comercial dessa montagem.

### Montagem



Esse é um experimento clássico do duplo-cone e do plano inclinado. Você pode reproduzi-lo usando duas régua de madeira de 50 cm (para fazer o plano inclinado em forma de V) e dois copos plásticos cônicos para sorvete (colados boca a boca e com seu interior preenchido com areia). Quando você coloca o cone duplo sobre o plano inclinado ele rola e “sobe”, indo para o topo, em lugar de “descer”.

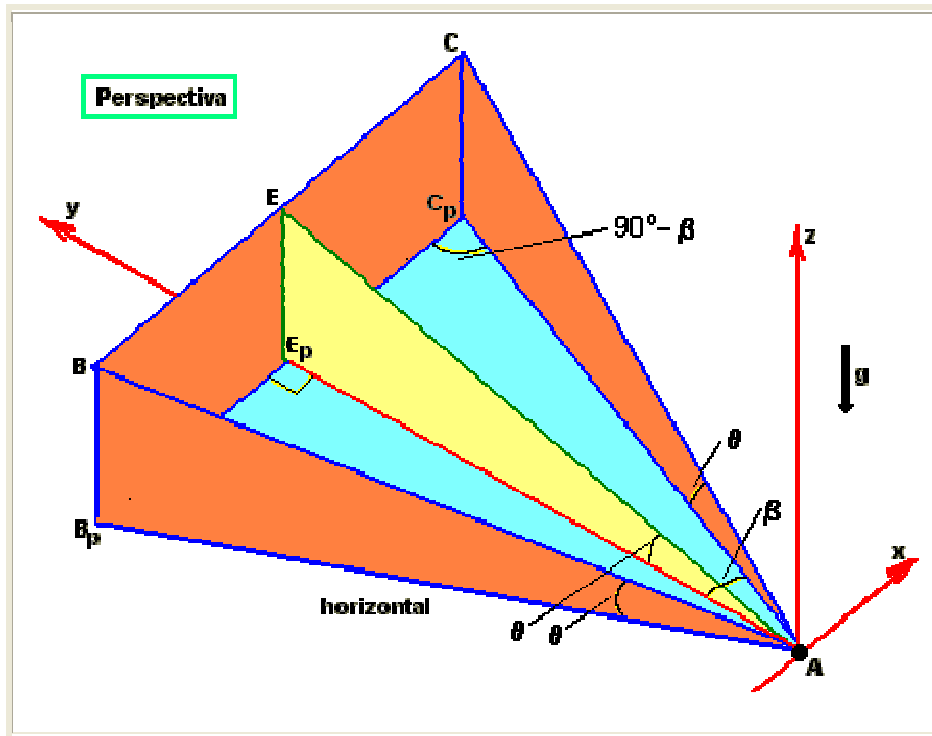
O segredo está nos ângulos de inclinação do cone (grande) e do plano inclinado (pequeno). Isso permite que o CG do duplo cone realmente desça, ao subir a rampa.

Veja o protótipo do autor na [Feira de Ciências Virtual](#) (clique!).

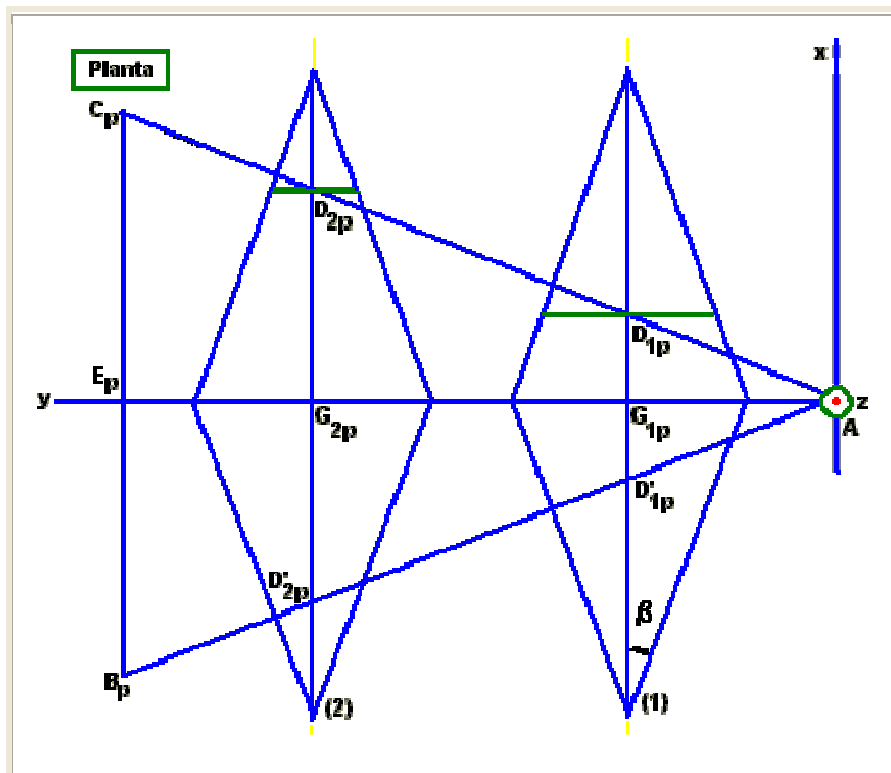
### Tratamento nível 3

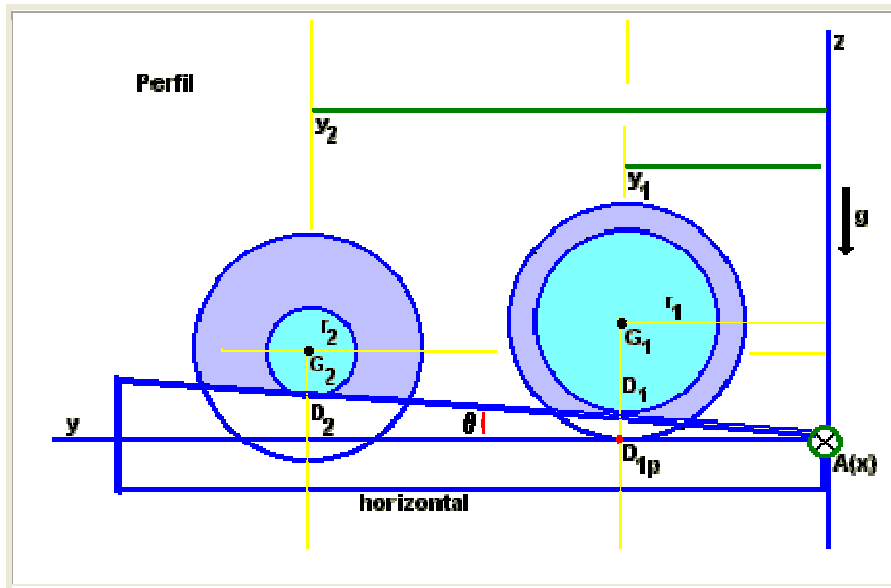
Como vimos, é um aparelho no qual, abandonado em repouso sobre um aclone, o sólido de revolução rola rampa acima. O duplo cone apóia-se na aresta superior das barras AB e AC. As bordas superiores destas determinam um plano inclinado cuja linha de maior declive é AE. O eixo de revolução do duplo-cone mantém-se paralelo a BC. Ilustremos isso:





Na posição (1), ilustrada abaixo, ele se apóia em  $D_1$  e  $D'_1$ ; seu baricentro é  $G_1$ . Na posição (2) ele se apóia em  $D_2$  e  $D'_2$ ; seu baricentro é  $G_2$ . A conicidade e a rampa são tais que o nível de  $G_2$  fique sensivelmente abaixo do nível de  $G_1$ .





O duplo-cone é abandonado em repouso na posição (1). Sob ação de seu peso ele rola para a posição (2), no sentido ascendente da rampa AE. É um paradoxo aparente pois, embora os pontos de apoio do cone se elevem de  $(D_1, D'_1)$  para  $(D_2, D'_2)$ , o baricentro do sólido de revolução realmente baixa no movimento de  $G_1$  para  $G_2$ .

Pergunta - se: Que condição deve vigorar entre os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\theta$ ?

Para tanto, estudemos a posição inicial do duplo - cone :

Em planta :

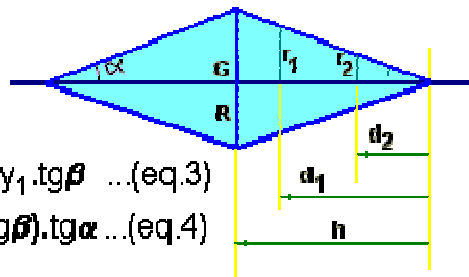
$$AD_{1p} = \frac{AG_{1p}}{\cos\beta} = y_1 \cdot \sec\beta \quad \dots (\text{eq.1})$$

Cota do ponto de apoio:

$$z_1(D_1) = D_{1p}D_1 = AD_{1p} \cdot \text{tg}\theta = y_1 \cdot \sec\beta \cdot \text{tg}\theta \quad \dots (\text{eq.2})$$

No cone :

$$R = h \cdot \text{tg}\alpha$$



$$d_1 = h - G_{1p}D_{1p} = h - y_1 \cdot \text{tg}\beta \quad \dots (\text{eq.3})$$

$$r_1 = d_1 \cdot \text{tg}\alpha = (h - y_1 \cdot \text{tg}\beta) \cdot \text{tg}\alpha \quad \dots (\text{eq.4})$$

O ângulo entre a borda AC e o plano horizontal xAy é  $\theta = C_p\hat{A}C$ ; ele pertence ao plano vertical que contém AC. O triângulo ABC pertence a um plano inclinado cuja reta de maior declive é AE; este plano forma com o plano horizontal o ângulo  $\theta' = E_p\hat{A}E$ . Tem-se  $\text{tg}\theta' = \text{tg}\theta \cdot \sec\beta$ .

A cota do baricentro  $G_1$  é  $z_1(G_1) = D_{1p}G_1$  ou,  $z_1(G_1) = D_{1p}D_1 + D_1G_1 = z_1(D_1) + D_1G_1 \quad \dots (\text{eq.5})$ .

A rampa AC é tangente à superfície do cone, **mas não ao contorno circular de uma secção reta do mesmo**, e sim a uma secção oblíqua, neste caso uma elipse  $\epsilon$ . Esta é a intersecção do plano vertical  $ACC_p$  com a superfície do cone, e este plano forma com o eixo do cone o ângulo  $(90^\circ - \beta)$  pertencente a um plano horizontal. Portanto, é horizontal também o eixo maior dessa elipse. Em primeira aproximação, pode-se admitir  $D_1G_1 \cong r_1$  (como se fosse secção reta do cone), e daí:

$$z_1(G_1) = z_1(D_1) + r_1 \quad \dots(\text{eq.6})$$

$$z_1(G_1) = y_1 \cdot \sec \beta \cdot \text{tg} \theta + (h - y_1 \cdot \text{tg} \beta) \cdot \text{tg} \alpha$$

$$z_1(G_1) = R + y_1 \cdot (\sec \beta \cdot \text{tg} \theta - \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha) \quad \dots(\text{eq.7})$$

Analogamente, na posição final:

$$z_2(G_2) = R + y_2 \cdot (\sec \beta \cdot \text{tg} \theta - \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha) \quad \dots(\text{eq.8})$$

$$\text{Resulta : } z_1 - z_2 = (y_1 - y_2) \cdot (\sec \beta \cdot \text{tg} \theta - \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha) \quad \dots(\text{eq.9})$$

Tem - se  $y_2 > y_1$ , e precisa ser  $z_2 < z_1$  (o baricentro G tem que baixar!):

$$z_1 - z_2 > 0 \quad \therefore (y_1 - y_2) \cdot (\sec \beta \cdot \text{tg} \theta - \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha) > 0$$

$$y_1 - y_2 < 0 \quad \therefore \sec \beta \cdot \text{tg} \theta - \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha < 0 \quad \dots(\text{eq.10})$$

$$\text{Daí : } \quad \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \alpha > \sec \beta \cdot \text{tg} \theta$$

Admitida a aproximação acima, resulta a condição :  $\text{tg} \alpha \cdot \text{sen} \beta > \text{tg} \theta$

O aparelho pode ser construído com:  $\alpha = 17^\circ$ ,  $\beta = 26^\circ$  e  $\theta = 5,4^\circ$ .

Verificação : É preciso ser  $0,306 \times 0,438 > 0,094 \dots$  de fato é  $0,134 > 0,094$ .



### 8.1.1.2 Pavilhão do Conhecimento:

#### **Sobe ou desce**

*Vê, Faz, Aprende! - 2ª parte*

Vê e faz

Coloca cada um dos duplos cones na base das rampas. Será que os cones sobem mesmo a rampa? Por que é que sobem, por causa da inclinação da rampa, do ângulo entre os carris ou da forma de cone duplo?

Neste módulo, temos um cone duplo que sobe uma rampa constituída por dois carris de aço.

A massa em movimento (cuja forma se designa por “cone duplo”) parece subir a rampa, contrariando a força da gravidade. Porquê?

Talvez porque o cone seja mais leve que o ar.

Talvez porque dentro do cone duplo poderá estar escondido um motor ou outro mecanismo propulsor.

Talvez porque se trate de uma ilusão óptica, o cone pareça subir, quando na realidade desce a rampa

Talvez a rampa tenha uma forma estudada para que as massas que se desloquem sobre ela, vençam a gravidade e rolem para cima.

Em ciência, quando nos deparamos com algo de surpreendente, é muito útil fazer uma lista de explicações possíveis, examinar cada uma delas, realizar observações e experiências adicionais, procedendo por eliminação, até restar apenas uma solução possível.

Esta explicação pode eliminar-se facilmente. De facto, o cone permanece no chão sem se mover, bem como na superfície dos carris, sentindo-se que é pesado. Por conseguinte, não é esta a explicação correcta.

Poderia ser uma explicação plausível. Mecanismos deste tipo foram já concebidos, sendo frequentemente utilizados pelos ilusionistas. Poderás verificar esta possibilidade, desmontando o cone, para ver se tem algum mecanismo lá dentro ou radiografando-o. Por outro lado, o truque pode consistir num peso escondido no interior do cone, junto à borda, um truque bastante utilizado nas demonstrações de física. Poderás testar esta possibilidade sem desmontar o cone, da seguinte forma: coloca o cone em equilíbrio, na posição vertical relativamente ao respectivo eixo, segurando uma ponta do mesmo e apoiando a outra no chão. Se houver um peso assimétrico junto à borda, o cone terá tendência para cair nessa direcção. Talvez seja melhor realizares já esta experiência, antes de continuares a leitura! Verificaste como o cone está bem equilibrado? Então podes eliminar esta explicação.

Como podes verificar esta possibilidade? Eis algumas dicas:

coloca-te de cócoras ao lado da rampa, com os olhos ao nível dos carris.

Poderás verificar que a inclinação da rampa está correcta, que realmente, o cone rola na direcção ascendente.

Coloca-te depois junto à rampa e tenta olhar de cima para baixo.

Verificas que os dois carris não são paralelos, que a distância entre ambos aumenta na direcção para a qual o cone se desloca. Eis uma importante constatação!

Por último, deixa o cone subir, mas retém-no um pouco com a mão, para realizares algumas medições.

Mede a altura da base a uma das pontas do cone. Podes servir-te da perna para fazeres esta medição. Coloca-te de forma a que a ponta do cone te toque na perna e com uma caneta, faz a marcação. Realiza esta medição duas vezes, em ambas as extremidades da rampa.

A última medição revela a verdade! Quando o cone duplo sobe a rampa, o seu eixo (ou seja, a linha que liga as respectivas extremidades) desce. O cone obedece à gravidade e o seu centro de gravidade desce. Afinal, tratava-se mesmo de uma ilusão óptica.

O centro de gravidade de um sólido é um ponto imaginário localizado no seu interior. Se esse sólido estivesse suspenso por esse ponto, o mesmo manter-se-ia em equilíbrio, independentemente da respectiva posição. Nesta experiência, o cone duplo poderia ser oco, o que não faria qualquer diferença, porque conservaria o seu centro de gravidade, já que todos os corpos na terra possuem um centro de gravidade.



---

### 8.1.1.3 Museu de Física:

## Duplo cone e réguas de madeira inclinadas

---



51 x 8 (rombo) 80,2 (réguas)  
Madeira e latão

Este aparelho é destinado ao estudo do centro de gravidade. Dele fazem parte: um duplo cone de madeira, com as extremidades truncadas e substituídas por prolongamentos cilíndricos, e duas réguas de madeira articuladas entre si, através de uma dobradiça colocada numa das extremidades de cada uma das réguas. Na outra extremidade das réguas está fixado um parafuso de nível, de latão, por meio do qual se pode regular a inclinação daquelas. As réguas, abertas em V, são postas sobre uma mesa, definindo as suas arestas um plano inclinado cujo declive é regulado pelos dois parafusos niveladores.

A experiência realizada com este aparelho consiste em colocar o duplo cone junto ao vértice das réguas, largando-o depois sem

INDEX 1788 : B.IV.92

*Rhombus conicus a me inventus praecedenti similis, qui tamen ad utrumque verticem duos habet junctos veluti cylindros; et binae regulae prioribus similes sed tamen longiores, quas super Rhombus varias efficit oscillationes antequam in humiliore situ quiescat.*

Rombo cónico inventado, tal como o precedente, por mim, que tem, todavia, para cada vértice à maneira de dois cilindros juntos; e duas régua semelhantes às anteriores mas, contudo, mais compridas, por cima das quais o losango executa várias oscilações antes de descansar na posição mais baixa.

qualquer impulso inicial. Verifica-se que este começa a subir o plano, oscila em seguida, e acaba por atingir o equilíbrio numa posição intermédia entre o vértice e a extremidade superior das régua.

Este resultado surpreendente parece contrariar as leis da gravidade. No entanto, o que na verdade se verifica é uma descida do eixo longitudinal que passa pelo centro de gravidade do duplo cone. Com efeito, este eixo encontra-se a um nível mais elevado quando o duplo cone se encontra junto ao vértice do que quando atinge a posição de equilíbrio.

Na colecção do Gabinete de Física de Coimbra, existe outro duplo cone que difere deste unicamente pelo facto de as suas extremidades não se encontrarem truncadas.

Estas peças são provenientes do Colégio dos Nobres, onde tinham os números de catálogo 84 e 85, respectivamente. A que aqui apresentamos corresponde ao número 85.

Desaguliers, Jean-Théophile, *A Course of Experimental Philosophy*, Londres, 1734, Tomo I, p. 55, Pl. IV, Fig. 14.