Quarta Aula de Exercícios

Thaís Victa Trevisan – thaistre@ifi.unicamp.br

Problema 13 do Capítulo 1 do livro "*Modern Quantum Mechanics*" – J.J. Sakurai e Jim Napolitano (segunda edição).

Um feixe de átomos de spin $\frac{1}{2}$ passa por uma série de aparatos de medida do tipo Stern-Gerlach, conforme descrito abaixo:

(a) A primeira medida aceita átomos com $s_z = \frac{\hbar}{2}$ e rejeita átomos com $s_z = -\frac{\hbar}{2}$.

(b) A segunda medida aceita átomos com $s_n = \frac{\hbar}{2}$ e rejeita átomos com $s_n = -\frac{\hbar}{2}$, onde s_n corresponde ao autovalor do operador $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$ (projeção do operador spin $\vec{S}$ na direção caracterizada pelo versor $\hat{n}$), com $\hat{n}$ no plano xz, fazendo um ângulo β com o eixo z.

(c) A terceira medida aceita átomos com $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ e rejeita átomos com $s_z = \frac{\hbar}{2}$.

Qual é a intensidade do feixe final de átomos com $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ quando o feixe com $s_z = \frac{\hbar}{2}$ da primeira medida é normalizado à unidade? Como devemos orientar o segundo aparato se quisermos maximizar a intensidade do feixe final?

Solução:

- **Notação:**
  - $|\psi_0\rangle$ é a função de onda dos átomos do feixe inicial (antes de qualquer medida);
  - $|\psi_I\rangle$ é a função de onda dos átomos após passar pelo primeiro aparato;
  - $|\psi_{II}\rangle$ é a função de onda dos átomos após passar pelo segundo aparato;
  - $|\psi_{III}\rangle$ é a função de onda dos átomos após passar pelo terceiro aparato (estado final).
- **Observação:**

  Ao longo de todo o exercício, usaremos a base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, composta pelos autoestados da projeção do spin do átomo no eixo z, S_z,

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$S_z\,|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle \quad \text{e} \quad S_z\,|-\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|-\rangle \ .$$

O enunciado do exercício não nos diz nada a respeito do estado inicial. Desse modo, o estado mais geral que podemos escrever é uma combinação linear dos *kets* da base

$$\mathscr{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\} \ , \tag{1}$$

isto é,

$$|\psi_0\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle \ , \tag{2}$$

onde a e b são constantes complexas tais que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ se exigimos que o estado inicial seja normalizado.

Quando o feixe passa pelo primeiro aparato de Stern-Gerlach, medimos S_z, obtendo o autovalor $s_z = \frac{\hbar}{2}$. Após a medida, a função de onda do átomo colapsa para o autoestado de S_z relativo ao autovalor $s_z = \frac{\hbar}{2}$. Portanto, usando o quinto postulado da Mecânica Quântica, o estado $\left|\psi_0\right\rangle$ fica

$$\left|\psi_I\right\rangle = \frac{P_{z,\hbar/2}\left|\psi_0\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\psi_0\middle|P_{z,\hbar/2}\middle|\psi_0\right\rangle}}\ , \tag{3}$$

onde o denominador garante a normalização da função de onda (conforme solicitado pelo enunciado) e $P_{z,\hbar/2}$ é o projetor no autoestado $|+\rangle$ de S_z (referente ao autovalor $\hbar/2$),

$$P_{z,\hbar/2} = |+\rangle\langle+|\ .$$

Então

$$P_{z,\hbar/2}\left|\psi_0\right\rangle = \langle+|(a|+\rangle + b\,|-\rangle)\ |+\rangle = a\,|+\rangle\ ,$$

pois $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são ortonormais e

$$\left\langle\psi_0\middle|P_{z,\hbar/2}\middle|\psi_0\right\rangle = \left|\langle+|\psi_0\rangle\right|^2 = |a|^2\ .$$

de modo que

$$\left|\psi_I\right\rangle = \frac{a}{|a|}\,|+\rangle = e^{i\theta_a}\ , \tag{4}$$

sendo θ_a a fase de a (lembrando que $a \in \mathbb{C}$, ou seja, $a = |a|e^{i\theta_a}$). Pela liberdade de escolha da fase global da função de onda, podemos tomar $\theta_a = 0$. Contudo, para evidenciar que θ_a não influenciará no resultado final, manterei a fase.

Quando o feixe passa pelo segundo aparato de Stern-Gerlach, efetuamos a medida do operador $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$, que é a projeção do spin do átomo na direção do versor $\hat{n}$. Como resultado, encontramos o autovalor $s_n = \frac{\hbar}{2}$. Então, após a medida, a função de onda $\left|\psi_I\right\rangle$ colapsa para o autoestado de S_n referente ao autovalor $\hbar/2$, o qual denotaremos por $|+\rangle_n$ (por outro lado, $|-\rangle_n$ é o autoestado de S_n com autovalor $s_n = -\frac{\hbar}{2}$). Ou seja,

$$\left|\psi_{II}\right\rangle = P_{n,\hbar/2}\left|\psi_I\right\rangle\ , \tag{5}$$

sendo

$$P_{n,\hbar/2} = |+\rangle_{n\,n}\langle+|\ .$$

Na expressão (5), não dividimos $P_{n,\hbar/2}\left|\psi_I\right\rangle$ por $\sqrt{\left\langle\psi_I\middle|P_{n,\hbar/2}\middle|\psi_I\right\rangle}$ porque não devemos normalizar $\left|\psi_{II}\right\rangle$ uma vez que estamos interessados em saber a intensidade do feixe final quando é o estado $\left|\psi_I\right\rangle$ que encontra-se normalizado à unidade.

Temos, agora, que encontrar a expressão do *ket* $|+\rangle_n$ em temos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Para tal, temos que diagonalizar S_n. A representação matricial de S_n na base (1) pode ser facilmente encontrada: $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$, mas

$$\vec{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}\ ,$$

sendo

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ \ S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,$$

as representações matriciais das componentes S_x, S_y e S_z do spin na base (1). Além disso, segundo o enunciado

$$\hat{n} = \sin\beta\hat{x} + \cos\beta\hat{z} \, .$$

Consequentemente,

$$S_n = S_x \sin\beta + S_z \cos\beta \Rightarrow S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \, . \tag{6}$$

Diagonalizando (6), encontramos os seguintes autovalores e autoestados

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Autovalores de } S_n & \longrightarrow & \text{Autovetores de } S_n \\ & & \\ s_n = \frac{\hbar}{2} & \longrightarrow & |+\rangle_n = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle \\ & & \\ s_n = -\frac{\hbar}{2} & \longrightarrow & |-\rangle_n = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle \end{array}} \, . \tag{7}$$

Levando (7) em (5) obtemos

$$\left|\psi_{II}\right\rangle = {}_n\langle + \left|\psi_I\right\rangle |+\rangle_n = e^{i\theta_a} \, {}_n\langle + |+\rangle \, |+\rangle_n = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\theta_a} \, |+\rangle_n \, ,$$

que, em termos dos *kets* $|+\rangle$ e $|-\rangle$ é

$$\left|\psi_{II}\right\rangle = e^{i\theta_a}\left[\cos^2\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,|-\rangle\right] \, . \tag{8}$$

Por fim, o feixe passa pelo terceiro aparato, que mede a componente S_z do spin, obtendo o resultado $s_z = -\frac{\hbar}{2}$. O estado do átomo após essa medida (estado final do sistema) fica, então:

$$\left|\psi_{III}\right\rangle = P_{z,-\hbar/2}\left|\psi_{II}\right\rangle \, , \tag{9}$$

com

$$P_{z,-\hbar/2} = |-\rangle\langle-| \, .$$

Consequentemente, levando (8) em (9), obtemos

$$\left|\psi_{III}\right\rangle = \langle - \left|\psi_{II}\right\rangle |-\rangle = e^{i\theta_a}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,|-\rangle \, . \tag{10}$$

Para sabermos a intensidade do feixe ao final das medidas, basta calcularmos o módulo de $\left|\psi_{III}\right\rangle$,

$$\boxed{I \propto \left|\langle\psi_{III}\middle|\psi_{III}\rangle\right|^2 = \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}\sin^2\beta} \, . \tag{11}$$

É fácil ver que a intensidade será máxima quando $\sin^2\beta$ for máximo, ou seja, quando $\sin\beta = \pm 1 \Rightarrow \beta = \pm\frac{\pi}{2}$. Isto é, a intensidade do feixe que sai do terceiro aparato de medida será máximo quando orientarmos o segundo **aparato na direção do eixo x!**. Note que, conforme argumentado anteriormente, o resultado independe da fase $e^{i\theta_a}$ do estado inicial.