Quinta Aula de Exercícios

Thaís Victa Trevisan – thaistre@ifi.unicamp.br

Problema 3 do Capítulo 5 do livro "*Quantum Mechanics*" – Cohen-Tannoudji (Volume 1).

Considere duas partículas de mesma massa m, posições X_1 e X_2 e momentos P_1 e P_2, respectivamente, sujeitas a um potencial externo

$$V(X) = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \,. \tag{1}$$

Além disso, as duas partículas não interagem entre si.

(a) Mostre que o Hamiltoniano do sistema de duas partículas pode ser escrito como

$$H = H_1 + H_2 \,,$$

onde o operador H_1 atua apenas no espaço da partícula 1, enquanto que H_2 atua somente no espaço da partícula 2. Calcule os autovalores e respectivos autoestados de H.

(b) H forma um C.C.O.C? E quanto a $\{H_1, H_2\}$? Denotemos por $|\phi_{n_1,n_2}\rangle$ os autoestados comuns a H_1 e H_2. Escreva as relações de completeza e ortonormalização para $|\phi_{n_1,n_2}\rangle$.

(c) Considere que no instante $t = 0$ o sistema encontra-se no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\,|\phi_{0,0}\rangle + |\phi_{0,1}\rangle + |\phi_{1,0}\rangle + |\phi_{1,1}\rangle\right] \,. \tag{2}$$

Quais resultados podem ser encontrados, e com quais probabilidades, se medirmos:

- A energia total do sistema;
- A energia da partícula 1;
- A posição ou a velocidade da partícula 1.

Solução:

- **Item (a):**

Nesse problema, temos duas partículas sujeitas à um potencial do tipo oscilador harmônico simples (unidimensional). Uma vez que as partículas não interagem entre si, o Hamiltoniano completo do sistema é dado por

$$H = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{P_j^2}{2m} + V(X_j)\right] \,, \tag{3}$$

sendo P_j e X_j, respectivamente, o momento e a posição da j-ésima partícula do sistema ($j = 1$ refere-se à partícula 1 e $j = 2$ refere-se à partícula 2.). Agora, levando (1) em (3), encontramos

$$\boxed{H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X_2^2 \equiv H_1 + H_2} \,, \tag{4}$$

onde

$$\boxed{H_1 = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X_1^2} \tag{5}$$

e

$$\boxed{H_2 = \frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X_2^2}\,, \tag{6}$$

como queríamos mostrar.

No item (a) desse exercicio também é pedido que calculemos os autovalores e correspondentes autovetores do Hamiltoniano total do sistema, $H = H_1 + H_2$. Vimos que H_1 corresponde ao Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples quântico no espaço de estados $\mathscr{E}_1$ da partícula 1 (vide equação (5)). Então, conhecemos seus autovalores,

$$E_{n_1}^{(1)} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n_1 \right) \tag{7}$$

e respectivos autoestados

$$|n_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} (a_1^\dagger)^{n_1} |0\rangle \;, \tag{8}$$

que, na representação de coordenadas ficam

$$\langle x|n_1\rangle \equiv \varphi_{n_1}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar 2^{2n_1} (n_1!)^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_{n_1} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \right] \,. \tag{9}$$

Lembremo-nos que o número quântico n_1 que aparece nas expressões (8) e (9) é um natural, podendo assumir os valores 0, 1, 2, $\cdots$ e denota o número de quantas de energia. Além disso, em (9), $H_{n_1}(y)$ corresponde ao polinômio de Hermite de grau n_1 ($n_1 = 0, 1, 2, \cdots$), por exemplo,

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 1 \quad , \\ H_3(y) &= 8x^3 - 12x \\ &\vdots \end{aligned}$$

enquanto que $a_1^\dagger$ é o operador que cria um *quantum de energia*, que em termos do momento e posição da partícula 1 tem a seguinte forma

$$a_1^\dagger = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X_1 - i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} P_1 \right) \,. \tag{10}$$

Analogamente, sendo H_2 o Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples unidimensional no espaço de estados da partícula 2, $\mathscr{E}_2$, seus autovalores e autoestados têm a mesma forma de (7) e (8),

$$E_{n_2}^{(2)} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n_2 \right) \,, \tag{11}$$

e

$$|n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \;. \tag{12}$$

Isto é, na representação de coordenadas,

$$\langle x|n_2\rangle \equiv \varphi_{n_2}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar 2^{2n_2}(n_2!)^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_{n_2}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right] , \tag{13}$$

com

$$a_2^\dagger = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,X_2 - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\,P_2\right) , \tag{14}$$

lembrando que $n_2 = 0, 1, 2, \cdots$. Uma vez que as duas partículas não interagem entre si, de modo que o Hamiltoniano do sistema de duas partículas (que atua no espaço $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$) é apenas a soma de H_1 com H_2, os autovalores de H são dados pela soma de (7) e (11) e, portanto, são especificados por dois números quânticos n_1 e n_2:

$$\boxed{E_{n_1,n_2} = E^{(1)}_{n_1} + E^{(2)}_{n_2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1)} . \tag{15}$$

Os correspondentes autoestados, por sua vez, correspondem ao produto tensorial de (8) com (12),

$$\boxed{\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle} . \tag{16}$$

- **Item (b)**

Observando os autovalores de H, equação (15), podemos ver que o espectro de energia do sistema de duas partículas é degenerado: por exemplo, tanto para $(n_1, n_2) = (0, 2)$, quanto para $(n_1, n_2) = (2, 0)$ ou $(n_1, n_2) = (1, 1)$ teremos uma energia total de $E_{0,2} = E_{2,0} = E_{1,1} = 3\hbar\omega$. Assim, os autoestados de H não estão unicamente determinados pelos seus autovalores (isto é, pela soma dos números quânticos n_1 e n_2), de modo que H sozinho não pode formar um C.C.O.C.

Por outro lado, $\{H_1, H_2\}$ é um C.C.O.C. Isso porque:

(i) H_1 e H_2 atuam em espaços distintos (H_1 atua no espaço de estados $\mathscr{E}_1$ da partícula 1, enquato que H_2 atua no espaço de estados $\mathscr{E}_2$ da partícula 2) da partícula 2. Desse modo, esses dois operadores comutam, o que implicam que eles têm uma base comum, que é justamente $\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$,

$$H_1\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_1\right)\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle$$

e

$$H_2\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_2\right)\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle .$$

(ii) Os espectros de energia de H_1 e H_2 são ambos não degenerados, de modo que cada par (n_1, n_2) de números quânticos (ou, equivalentemente, cada para de autovalores $(E^{(1)}_{n_1}, E^{(2)}_{n_2})$) determina unicamente os *kets* $\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle$ da base comum de H_1 e H_2.

Os *kets* $\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle$ que compõe a base comum de H_1 e H_2 (que também correspondem aos autoestados de H) formam uma base completa. Por isso, $\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle$ devem respeitar relações de ortonormalidade e completeza,

$$\boxed{\left\langle\phi_{n_1,n_2}\middle|\phi_{n_3,n_4}\right\rangle = \delta_{n_1,n_3}\delta_{n_2,n_4}} \tag{17}$$

e

$$\boxed{\mathbb{1} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|\phi_{n_1,n_2}\right\rangle\left\langle\phi_{n_1,n_2}\right|} , \tag{18}$$

respectivamente.

- **Item (c):**

(i) Medida da energia total do sistema:

Os possíveis resultados de uma medida da energia total do sistema são os autovalores de H, ou seja, E_{n_1,n_2} dados pela equação (5), com $n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Entretanto, pela maneira como o estado inicial do sistema foi preparado (equação (2)), os únicos resultados com probabilidade não nula são $E_{0,0} = \hbar\omega$, $E_{0,1} = E_{1,0} = 2\hbar\omega$ e $E_{1,1} = 2\hbar\omega$.

O único autoestado referente à um valor de energia total $\hbar\omega_0$ é $|\phi_{0,0}\rangle$ (ou seja, o estado fundamental do sistema de duas partículas não é degenerado). Desse modo, a probabilidade de medir $\hbar\omega$ é

$$\mathscr{P}(\hbar\omega) = \frac{\langle\psi(0)|P_{\hbar\omega}|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = |\langle\phi_{0,0}|\psi(0)\rangle|^2 = \boxed{\frac{1}{4}},$$

onde usamos

$$P_{\hbar\omega} = |\phi_{0,0}\rangle\langle\phi_{0,0}| \ .$$

Já o estado com energia total $2\hbar\omega$ é duplamente degenerado. À esse autovalor de H estão associados os autoestados $|\phi_{1,0}\rangle$ e $|\phi_{0,1}\rangle$. Então:

$$\mathscr{P}(2\hbar\omega) = \frac{\langle\psi(0)|P_{2\hbar\omega}|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} \ .$$

onde

$$P_{2\hbar\omega} = |\phi_{0,1}\rangle\langle\phi_{0,1}| + |\phi_{1,0}\rangle\langle\phi_{1,0}| \ .$$

Logo

$$\mathscr{P}(2\hbar\omega) = |\langle\phi_{1,0}|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle\phi_{0,1}|\psi(0)\rangle|^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Por fim, o estado com energia total $3\hbar\omega$ é triplamente degenerado. À esse autovalor de H estão associados os seguintes autoestados $|\phi_{2,0}\rangle$, $|\phi_{0,2}\rangle$ e $|\phi_{1,1}\rangle$, Consequentemente,

$$\mathscr{P}(3\hbar\omega) = \frac{\langle\psi(0)|P_{3\hbar\omega}|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} \ .$$

onde

$$P_{3\hbar\omega} = |\phi_{0,2}\rangle\langle\phi_{0,2}| + |\phi_{2,0}\rangle\langle\phi_{2,0}| + |\phi_{1,1}\rangle\langle\phi_{1,1}| \ .$$

Logo

$$\mathscr{P}(3\hbar\omega) = |\langle\phi_{2,0}|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle\phi_{0,2}|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle\phi_{1,1}|\psi(0)\rangle|^2 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Note que, de fato $\mathscr{P}(\hbar\omega) + \mathscr{P}(2\hbar\omega) + \mathscr{P}(3\hbar\omega) = 1$.

(ii) Medida da energia da partícula 1:

Os possíveis resultados de uma medida da energia apenas da partícula 1 são os autovalores de H_1, ou seja $E^{(1)}_{n_1} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_1\right)$. Entretanto, pela maneira como o estado inicial está preparado (equação (2)), os únicos valores com probabilidade não nula de serem obtidos são $E_0^{(1)} = \frac{\hbar\omega}{2}$ e $E_1^{(1)} = \frac{3\hbar\omega}{2}$. As probabilidades são as seguintes

$$\mathscr{P}(E_0^{(1)} = \hbar\omega/2) = \frac{\left\langle \psi(0) \middle| P_{n_1=0} \middle| \psi(0) \right\rangle}{\left\langle \psi(0) \mid \psi(0) \right\rangle} \ ,$$

com

$$P_{n_1=0} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| \phi_{0,n_2} \right\rangle \left\langle \phi_{0,n_2} \right| \ ,$$

onde a soma em n_2 se deve ao fato de estarmos medindo apenas a energia da partícula 1, independente da energia da partícula 2. Assim,

$$\mathscr{P}(E_0^{(1)} = \hbar\omega/2) = \left| \left\langle \phi_{0,0} \middle| \psi(0) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \phi_{0,1} \middle| \psi(0) \right\rangle \right|^2 = \boxed{\frac{1}{2}} \ .$$

Por fim,

$$\mathscr{P}(E_1^{(1)} = 3\hbar\omega/2) = \frac{\left\langle \psi(0) \middle| P_{n_1=1} \middle| \psi(0) \right\rangle}{\left\langle \psi(0) \mid \psi(0) \right\rangle} \ ,$$

com

$$P_{n_1=1} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| \phi_{1,n_2} \right\rangle \left\langle \phi_{1,n_2} \right| \ ,$$

de modo que

$$\mathscr{P}(E_1^{(1)} = 3\hbar\omega/2) = \left| \left\langle \phi_{1,0} \middle| \psi(0) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \phi_{1,1} \middle| \psi(0) \right\rangle \right|^2 = \boxed{\frac{1}{2}} \ .$$

Note que, de fato $\mathscr{P}(E_0^{(1)} = \hbar\omega/2) + \mathscr{P}(E_1^{(1)} = 3\hbar\omega/2) = 1$.

(iii) Medida da posição da partícula 1:

A posição da partícula é um índice contínuo, logo, para responder esse item é necessário calcular a probabilidade $d\mathscr{P}(x_1)$ de medir a posição X_1 da partícula e encontrar um resultado dentro de um intervalo dx_1 centrado em x_1. Ou seja,

$$d\mathscr{P}(x_1) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left| \psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 \right] dx_1 \ , \tag{19}$$

onde a integral em x_2 se deve ao fato de estarmos medindo apenas a posição da partícula 1, **independentemente da posição da partícula 2**. Além disso,

$$\psi(x_1, x_2, 0) = \left\langle x_1 x_2 \middle| \psi(0) \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle x_1 x_2 \mid \phi_{0,0} \right\rangle + \left\langle x_1 x_2 \mid \phi_{1,0} \right\rangle + \left\langle x_1 x_2 \mid \phi_{1,0} \right\rangle + \left\langle x_1 x_2 \mid \phi_{1,1} \right\rangle \right) \ , \tag{20}$$

lembrando que

$$\left\langle x_1 x_2 \mid \phi_{n_1,n_2} \right\rangle = \langle x_1 \mid n_1 \rangle \langle x_2 \mid n_2 \rangle = \varphi_{n_1}(x_1) \varphi_{n_2}(x_2) \ ,$$

onde $\varphi_{n_1}(x_1)$ e $\varphi_{n_2}(x_2)$ são dadas por (9) e (13), respectivamente. Então,

$$\psi(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2} \left[\varphi_0(x_1) + \varphi_1(x_1) \right] \left[\varphi_0(x_2) + \varphi_1(x_2) \right] \ ,$$

isto é,

$$\psi(x_1,x_2,0)=\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-m\omega(x_1^2+x_2^2)/2\hbar}\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1\right)\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_2\right)\,. \tag{21}$$

Levando (21) em (19), encontramos

$$d\mathscr{P}(x_1)=\frac{1}{4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1\right)^2 e^{-m\omega x_1^2/\hbar}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-m\omega x_2^2/\hbar}\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_2\right)^2\right]dx_1\,.$$

Mas

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x_2^2/\hbar}\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_2\right)^2 dx_2=2\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\,.$$

Consequentemente

$$\boxed{\mathscr{P}(x_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^2\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1\right)^2 e^{-m\omega x_1^2/\hbar}dx_1}\,. \tag{22}$$

Note que, de fato,

$$\int\mathscr{P}(x_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1\right)^2 e^{-m\omega x_1^2/\hbar}=1\,.$$

(iv) Medida da velocidade (ou, equivalentemente, momento) da partícula 1:

Pelos mesmos argumentos do cálculo anterior, temos que calcular aqui

$$d\mathscr{P}(p_1)=\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_2\left|\bar{\psi}(p_1,p_2,0)\right|^2\right]dp_1\,, \tag{23}$$

onde

$$\bar{\psi}(p_1,p_2,0)=\langle p_1p_2\,|\,\psi(0)\rangle=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-ip_1x_1/\hbar}e^{-ip_2x_2/\hbar}\,\psi(x_1,x_2,0)\,. \tag{24}$$

Levando (21) em (24), obtemos

$$\bar{\psi}(p_1,p_2,0)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{m\hbar\omega}\right)^{3/2} e^{-(p_1^2+p_2^2)/2m\hbar\omega}\left(\sqrt{2m\hbar\omega}-2ip_1\right)\left(\sqrt{2m\hbar\omega}-2ip_2\right)\,, \tag{25}$$

onde usamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}e^{-mwx^2/2\hbar}\left(1+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\right)=e^{-p^2/2m\omega\hbar}\frac{\sqrt{\pi}}{m\omega}\left(\sqrt{2m\omega\hbar}-2ip\right)\,.$$

De (25), segue que

$$\left|\bar{\psi}(p_1,p_2,0)\right|^2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{m\hbar\omega}\right)^3 e^{-(p_1^2+p_2^2)/m\omega\hbar}\left[\left(2p_1^2+m\hbar\omega\right)\left(2p_2^2+m\hbar\omega\right)\right] \tag{26}$$

e, por fim, levando (26) em (23), encontramos

$$\boxed{d\mathscr{P}(p_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{m\hbar\omega}\right)^{3/2} \; e^{-p_1^2/m\omega\hbar} \left(2p_1^2 + m\hbar\omega\right) dp_1} \,. \tag{27}$$