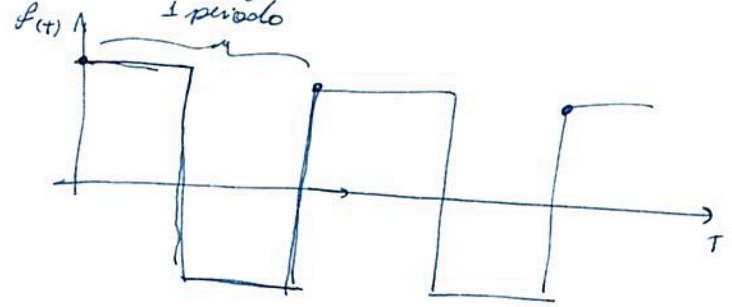
Fourier Transform
gabarito

Supondo uma funç periódica $f(t)$



Supondo período $t = 1s \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = 1\,Hz$

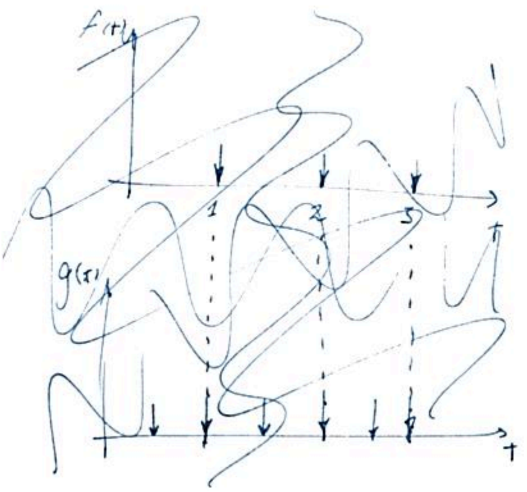
Supondo agora outra funç periódica $g(t)$, será que a soma $f(t) + g(t) = H(t)$ é periódica?

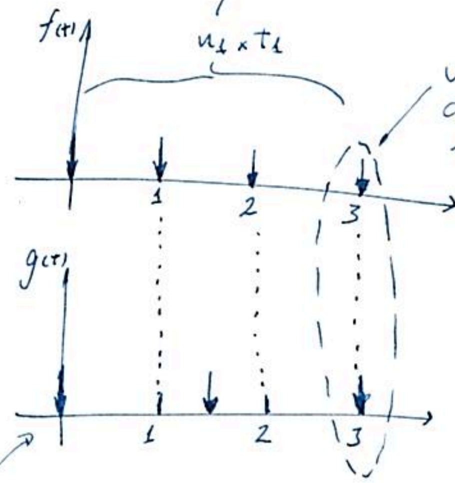
perceba que a condiç para que $H(t)$ seja periódica é que os períodos das funç [$f(t)$, $g(t)$, etc...] sejam múltiplos do menor período.

$$f(t) + g(t) = H(t)$$

$T_1 = 1s$ $\quad$ $T_2 = 1,5$ $\quad$ $T_3 = ?$

$\nu_1 = 1Hz$ $\quad$ $\nu_2 = 0.667Hz$ $\quad$ $\nu_3 = ?$





de ciclos

neste ponto o período das duas funç se iniciam ao mesmo tempo

se isso acontece então a funç $H(t)$ é periódica

A setas indicam que um período está começando

$n_1 = 3$
$T_1 = 1s$

$n_2 = 2$
$T_2 = 1.5\,s$

$\Rightarrow \boxed{n_1 T_1 = n_2 T_2}$

$$T_3 = n_1 \times t_1 = n_2 t_2 = \boxed{3s}$$

$$\nu_3 = \frac{1}{t_3} = \frac{1}{n_1 t_1} = \frac{1}{n_2 t_2} = \frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_2} = 0.333\,Hz$$

Perceba que a ~~fre~~ frequencia da função $H(t)$ é sempre menor que a menor das frequencias das outras funções, então tipo → O periodo de $H(t)$ é sempre maior

$$H(t) = \underset{\downarrow}{f(t)} + \underset{\downarrow}{g(t)} + \underset{\downarrow}{h(t)}$$

$$V_1 = 1\,Hz \qquad V_2 = 2\,Hz \qquad V_3 = 3\,Hz$$

→ ~~A partir daqui vamos supor incrementos inteiros de frequencia~~

→ ~~Apenas se todas as freq V_1, V_2, V_3 forem iguais~~

nesse caso $H(t)$ terá frequencia menor ~~(ou igual)~~ que $1\,Hz$.

Supondo uma função $H(t)$ tal que ela seja uma combinação linear de funções periodicas. Como função periodica vamos usar um seno (mas poderiamos usar qualquer outra)

$$H(t) = \sin(2\pi V_1 t) + \sin(2\pi V_2 t) + \sin(2\pi V_3 t)$$

Vamos agora colocar um peso em cada um dos senos,

$$H(t) = \underline{\underline{A_1}} \sin(2\pi V_1 t) + \underline{\underline{A_2}} \sin(2\pi V_2 t) + \underline{\underline{A_3}} \sin(2\pi V_3 t)$$

$$\sin(\omega t) \xrightarrow{\omega = 2\pi V} \sin(2\pi V t)$$

Podemos agora somar muitos senos,

$$H(t) = \sum_n \underbrace{A_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)}_{\text{função impar}}$$

→ ~~lembrar que $V_1 = 1\,Hz$, $V_2 = 2\,Hz$, $V_3 = 3\,Hz$, ⋮~~

→ usar V como $\frac{n}{T}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ garante que $H(t)$ será periódica

$$V_n = \frac{n}{T}$$

Como sin é uma função impar $H(t)$ será uma função impar. Queremos que $H(t)$ tenha liberdade para ser oque ela quiser, então para generalizar o resultado vamos somar também cossenos

$$H(t) = \sum_n A_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + \sum_n B_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

Perceba que ~~qualquer~~ funç ~~pode ser~~ periodica pode ser escrita como combinaç linear de senos e cossenos, você só precisa saber o valor das amplitudes A_n e B_n.

A prova disso não é tão trivial e pode ser encontrada em livros de calculo e metodos matematicos.

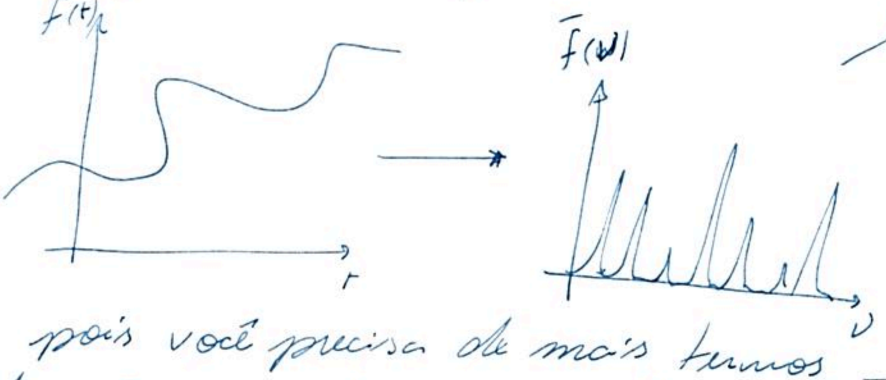
Agora dada uma funç $f(t)$ qual são os coeficientes A_n e B_n que eu devo usar para decompor $f(t)$ em senos e cossenos?

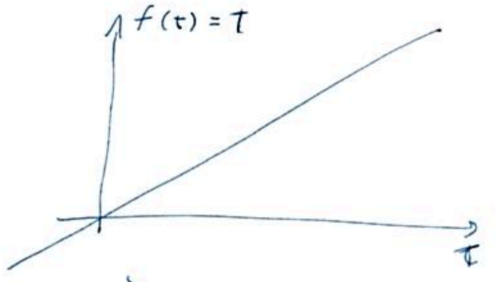
↳ ver exemplo da aula FFT

↳ não importa → se quiser saber tem que ver em algum livro de calculo.

Perceba agora que se o periodo T de uma funç qualquer for muito grande então a frequencia será muito pequena.

Quanto mais louca for a funç mais deltas de Dirac o grafico de frequencias vai ter,





↳ qual o periodo dessa funç? é infinito (a funç ~~nunca~~ nunca se repete)

pois você precisa de mais termos A_n e B_n para decompor a funç $f(t)$ → exemplo da aula

Agora, queremos poder descrever funç que não são periodicas então vamos fazer $T \to \infty$ (periodo ir para o infinito). → isso é a transformada de fourier

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} \tau\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} \tau\right) \right] \Delta n$$

$$\Big\downarrow \quad \nu_n = \frac{n}{T} \Rightarrow \Delta \nu_n = \frac{\Delta n}{T} = \frac{1}{T} = \Delta \nu$$

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} \tau\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} \tau\right) \right] T \underbrace{\left(\frac{\Delta n}{T}\right)}_{\Delta\nu}$$

$$\Big\downarrow \quad T \to \infty$$

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} \left[a(\nu) \cos(2\pi \nu \tau) + b(\nu) \sin(2\pi \nu \tau) \right] T \, d\nu$$

$$\Big\downarrow \quad e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + i\sin(\omega\tau) \; ; \; \omega = 2\pi\nu \; ; \; d\nu = \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$\begin{cases} \cos\omega\tau = \dfrac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} \\ \sin\omega\tau = \dfrac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i} \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\boxed{f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}$$

Transformada de Fourier

onde

$$\boxed{\bar{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau}$$

no caso espacial temos,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) e^{ikx} dk$$

$$\bar{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

no caso espacial em funç do momento,

$$\boxed{p = \hbar K} \longrightarrow dp = \hbar dK$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p)\, e^{i\frac{px}{\hbar}}\, dx$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, dp$$