Diagonalização de Matrizes

galdino

Quando diagonalizamos uma matriz indiretamente estamos resolvendo a eq. de autovalor dessa matriz.

$$A\vec{v} = a\,\vec{v} \quad \rightarrow \text{ equação de autovalor}$$

matriz (A), vetor ($\vec{v}$), número (a), vetor ($\vec{v}$)

$A\vec{v}_1 = a_1\vec{v}_1 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1$ é autovetor de A com autovalor a_1

$A\vec{v}_2 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_2$ não é autovetor de A

Para diagonalizar uma matriz precisamos achar os <u>autovalores</u> e <u>autovetores</u>.

$\lambda \rightarrow$ número

$\mathbb{1} \rightarrow$ matriz identidade

$$\lambda\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\downarrow$$

$$(A - \lambda\mathbb{1})\,\vec{v} = 0$$

$\hookrightarrow \vec{v}$ não é zero

$$\downarrow$$

O único jeito dessa eq. ser satisfeita é se o determinante de $(A - \lambda\mathbb{1})$ for zero.

$$\boxed{\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0}$$

Exemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - (-3)(-6) = -5\lambda + 10 - 2\lambda + \lambda^2 - 18 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} 8 \\ -1 \end{cases}$$

Pronto, a matriz A é dada por
(É só colocar os autovalores na diagonal)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ é autovetor de A com autovalor 8 e $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ é autovetor de A com autovalor -1 e A na forma diagonal é

$$\underline{A = \begin{pmatrix}8 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}$$

Exemplo 2: Checar o resultado do Exemplo 1.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\-6 & 2\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5 & -3\\-6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5+3\\-6-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix} = 8\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\-6 & 2\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = 8\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] \quad \checkmark$$

Exemplo 3: Diagonalizar matriz 3x3

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\3 & -5 & 3\\6 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

Calcular autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\3 & -5-\lambda & 3\\6 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix} = \ldots = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases}-2\\-2\\4\end{cases}$$

autovalor degenerado

Agora, quais são os autovetores ?

autovetor para $\lambda = 8$

$$\begin{pmatrix} 5-8 & -3 \\ -6 & 2-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} -3a - 3b = 0 \\ -6a - 6b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a = -b}$$

Portanto $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

autovetor para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 5-(-1) & -3 \\ -6 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 6a - 3b = 0 \\ -6a + 3b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{2a = b}$$

Portanto $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

É sempre bom ter os autovetores normalizados!

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v}_1 = 1\hat{x} + (-1)\hat{y}$

$$\downarrow$$

$\vec{v}_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ constante de normalização

$$\downarrow$$

$$|C_1|^2 + |-C_1|^2 = 1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{C_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \longrightarrow \boxed{C_1 = +\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2 = 1$$

Calcular autovetores

para $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a - b + c = 0}$$

$\vec{v}_1$ tem que ser ortogonal a $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 - 2 + 1 = 0 \;\to\; 0 = 0 \checkmark$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow 1 - 0 - 1 = 0 \;\to\; 0 = 0 \checkmark$$

para $\lambda = 4$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$