F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº2

UNICAMP, 5 de setembro de 2017

Vamos definir os operadores $\mathbf{S}_1^2$ e $\mathbf{S}_2^2$ que comutam

$$\mathbf{S}_1^2 \doteq \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_2^2 \doteq \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{S}_1^2$ e $\mathbf{S}_2^2$ estão representados em uma base em que a matriz que os representa é diagonal. Surge então as seguintes questões:

- Os autovalores desses operadores são degenerados? Sim;
- Os autoestados formam um C.S.C.O. (Complete Set of Commuting Observables)? Não.

Escrevemos os autoestados da seguinte forma

$$\mathbf{S}_1^2 \left|s_1,\, s_2\right\rangle = s_1\left(1+s_1\right)\hbar^2 \left|s_1,\, s_2\right\rangle$$

$$\mathbf{S}_2^2 \left|s_1,\, s_2\right\rangle = s_2\left(1+s_2\right)\hbar^2 \left|s_1,\, s_2\right\rangle,$$

onde $s_1 = {}^1\!/_2$ e $s_2 = {}^1\!/_2$.

Agora vamos acrescentar mais dois operadores que comutam entre si e comutam com $\mathbf{S}_1^2$ e $\mathbf{S}_2^2$:

$$S_{1z} \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_{2z} \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde os autoestados são dados por

$$S_{1z}\left|m_1,\, m_2\right\rangle = m_1\hbar\left|m_1,\, m_2\right\rangle$$

$$S_{2z}\left|m_1,\, m_2\right\rangle = m_2\hbar\left|m_1,\, m_2\right\rangle.$$

Um estado pode ser definido unicamente se considerarmos esses quatro operadores, $\mathbf{S}_1^2$, $\mathbf{S}_2^2$, S_{1z} e S_{2z}. O estado de um sistema pode ser representado pelo ket

$$\left|s_1\, s_2\, m_1\, m_2\right\rangle.$$

Os operadores acima estão representados nessa base. Perceba que se soubermos o valor de s_1, s_2, m_1 e m_2, conseguimos definir de forma única o estado do sistema. Na verdade esses quatro operadores definem o espaço de duas partículas de spin $1/2$.

A base $\{|s_1\, s_2\, m_1\, m_2\rangle\}$ possui os seguintes kets

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Como s_1 e s_2 são sempre $1/2$, podemos simplificar a notação e escrever apenas m_1 e m_2. Podemos simplificar mais ainda se trocarmos $\pm 1/2$ por apenas $\pm$, ou seja,

$$|++\rangle\,, \ |+-\rangle\,, \ |-+\rangle\,, \ |--\rangle\,.$$

A representação matricial nessa base de um operador A qualquer é dada como

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} |++\rangle & |+-\rangle & |-+\rangle & |--\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle ++| \\ \langle +-| \\ \langle -+| \\ \langle --| \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{41} & \cdots & & a_{44} \end{array}\right] \end{array},$$

onde $a_{11} = \langle + + \,|\, A \,|\, + +\rangle$, $a_{12} = \langle + + \,|\, A \,|\, + -\rangle$, etc.

Considere agora a seguinte operação vetorial

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2.$$

Sua representação na base $\{|s_1\, s_2\, m_1\, m_2\rangle\}$ é dada por

$$\mathbf{S^2} \doteq \hbar^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

onde os autovalores de $\mathbf{S}^2$são dados por

$$\mathbf{S}^2\, |s\rangle = s\,(1+s)\,\hbar^2\, |s\rangle\,.$$

Perceba que $\mathbf{S}$ é um operador vetorial, mas $\mathbf{S}^2$ é um operador escalar (vamos apenas trabalhar com $\mathbf{S}^2$). Por completeza, vamos definir o operador

$$S_z = S_{1z} + S_{2z}.$$

Sua representação fica

$$S_z \doteq \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde os autovalores de S_z são dados por

$$S_z\,|m\rangle = m\hbar\,|m\rangle\,.$$

Perceba que S_z já é diagonal na base $\{|s_1\,s_2\,m_1\,m_2\rangle\}$, mas $\mathbf{S}^2$ não! Queremos uma base em que $\mathbf{S}^2$ seja diagonal!. Dado que $\mathbf{S}^2$ comuta com $\mathbf{S}_1^2$, $\mathbf{S}_2^2$ e S_z, podemos achar autovetores comuns para todos eles. Em outras palavras queremos uma mudança de base tal que

$$\begin{array}{ccc} \{|s_1\,s_2\,m_1\,m_2\rangle\} & \longrightarrow & \{|s_1\,s_2\,s\,m\rangle\} \\ \text{autovetores de } \mathbf{S}_1^2,\, \mathbf{S}_2^2,\, S_{1z},\, S_{2z} & & \text{autovetores de } \mathbf{S}_1^2,\, \mathbf{S}_2^2,\, \mathbf{S}^2,\, S_z \end{array}.$$

Para fazer isso precisamos diagonalizar $\mathbf{S}^2$. O truque é perceber que $\mathbf{S}^2$ é bloco diagonal

$$\begin{bmatrix} \lceil 2 \rfloor & 0\;\;0 & 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$} & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0\;\;0 & \lceil 2 \rfloor \end{bmatrix},$$

de forma que precisamos apenas diagonalizar a matriz do centro:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,\, 2.$$

Para $\lambda = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b.$$

$$|s_1\,s_2\,s=0\;\;m\rangle = |+\,-\rangle - |-\,+\rangle$$

Para $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

$$|s_1\,s_2\,s=2\;\;m\rangle = |+\,-\rangle + |-\,+\rangle\,.$$

Portanto os autovetores são

$$|s=1\;\;m\rangle = |+\,+\rangle\,,$$

$$|s=0\;\;m\rangle = |+\,-\rangle - |-\,+\rangle\,,$$

$$|s=1\;\;m\rangle = |+\,-\rangle + |-\,+\rangle \quad \text{e}$$

$$|s=1\;\;m\rangle = |-\,-\rangle\,.$$

Perceba que $s = 1$ é degenerado. Por fim, como fica o operador S_z nessa base?

$$S_z \left| s = 1 \;\; m \right\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) \left| + + \right\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar + \frac{1}{2}\hbar \right) \left| + + \right\rangle = \hbar \left| s = 1 \;\; m \right\rangle .$$

Perceba que dessa forma $m = 1$:

$$\left| s = 1 \;\; m = 1 \right\rangle = \left| + + \right\rangle .$$

Agora é só aplicar S_z nos outros kets e verificar o valor de m. S_z será diagonal nessa nova base.