F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº4

UNICAMP, 9 de outubro de 2017

Questão 2.3 adaptada do livro Modern Quantum Mechanics - "Sakurai": Um elétron está sujeito a um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{y}$. Em $t = 0$, o elétron está em um autoestado do operador $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$, com autovalor $+\hbar/2$, onde $\hat{n}$ é um vetor unitário no plano xy.

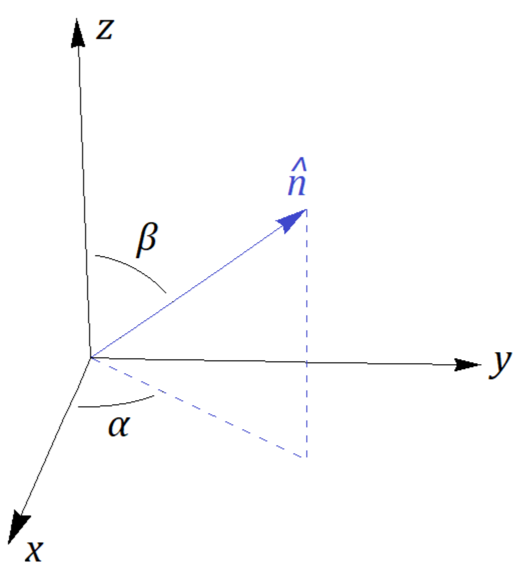
a) Se o observável S_x é medido em $t = 0$, qual a probabilidade de encontrar o resultado $+\hbar/2$?

b) Se o observável S_x é medido em um instante t qualquer, qual a probabilidade de encontrar o resultado $+\hbar/2$?

RESOLUÇÃO:

Vamos encontrar o estado de $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$ que corresponde ao autovalor $+\hbar/2$ em função dos autovetores de base de S_z, isto é, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Começamos escrevendo $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$ em função dos operadores S_x, S_y e S_z, tal como sugere na figura abaixo:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{n} = S_x \sin\beta \cos\alpha + S_y \sin\beta \sin\alpha + S_z \cos\beta. \tag{1}$$



Utilizando as representações de S_x, S_y e S_z em matrizes de Pauli em (1), obtemos:

$$\mathbf{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta\cos\alpha - i\sin\beta\sin\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + i\sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta \\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Lembre que os operadores S_x, S_y e S_z escritos em matrizes de Pauli já estão representados na base de autovetores de S_z.

Agora encontramos o autovetor de (2) com autovalor correspondente $+\hbar/2$:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta \\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Usando $|a|^2 + |b|^2 = 1$, obtemos $a = \cos(\beta/2)$ e $b = e^{i\alpha}\sin(\beta/2)$. Logo,

$$|\mathbf{S}\cdot\hat{n},+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\,|-\rangle\,. \tag{3}$$

a) Vamos escrever (3) em uma base de S_x. Para isso diagonalizamos S_x:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |S_x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Assim podemos escrever os autovetores da base de S_z, na base de S_x, ou seja

$$\begin{array}{l} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_x,+\rangle + |S_x,-\rangle\right) \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_x,+\rangle - |S_x,-\rangle\right) \end{array}, \tag{4}$$

e substituindo-os em (3), obtemos

$$|\mathbf{S}\cdot\hat{n},+\rangle = \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} + e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\right)|S_x,+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2} - e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\right)|S_x,-\rangle\,,$$

logo,

$$P(S_x = +\hbar/2) = \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\beta}{2} + e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\right|^2$$

b) Perceba que o que muda na evolução temporal do sistema são os coeficientes

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|\varphi_n\rangle\,,$$

onde $|\varphi_n\rangle$ são autovalores de H e os coeficientes $c_n(t)$ são dados por

$$c_n(t) = \langle \varphi_n \left| \psi\left(t\right)\right\rangle .$$

Usando a equação de Schrödinger, temos

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left|\psi\left(t\right)\right\rangle = H \left|\psi\left(t\right)\right\rangle .$$

Aplicando uma base $\langle \varphi_n|$ de autobras de H,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \varphi_n \left| \psi\left(t\right)\right\rangle = \langle \varphi_n \left| H \right| \psi\left(t\right)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n\left(t\right) = E_n c_n\left(t\right)$$

$$c_n\left(t\right) = c_n e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}.$$

Logo a evolução temporal do sistema é dada por

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} \left|\psi\left(t_0 = 0\right)\right\rangle = e^{-iHt/\hbar} \left|\mathbf{S}\cdot\hat{n},\, +\right\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} \cos\frac{\beta}{2} \left|+\right\rangle + e^{i(\alpha+\omega t/2)} \sin\frac{\beta}{2} \left|-\right\rangle , \end{aligned}$$

onde $H = \omega S_z$.

Para saber a probabilidade de encontra $+\hbar/2$ medindo-se o observável S_x, precisamos colocar $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ em uma base de S_x.

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2} \cos\frac{\beta}{2} + e^{i(\alpha+\omega t/2)} \sin\frac{\beta}{2}\right)\left|S_x,\, +\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t/2} \cos\frac{\beta}{2} - e^{i(\alpha+\omega t/2)} \sin\frac{\beta}{2}\right)\left|S_x,\, -\right\rangle ,$$

logo,

$$P(S_x = +\hbar/2) = \frac{1}{2}\left|e^{-i\omega t/2} \cos\frac{\beta}{2} + e^{i(\alpha+\omega t/2)} \sin\frac{\beta}{2}\right|^2 .$$