F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº5

UNICAMP, 16 de outubro de 2017

Questão 5.1 adaptada do livro Modern Quantum Mechanics - "Sakurai": Um oscilador harmônico 3D é sujeito a uma perturbação $H_1 = \lambda X$, onde $\lambda \geqslant 0$. O Hamiltoniano total é dado por $H = H_0 + H_1$, onde

$$H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2.$$

Ache os autovalores de H e discuta a degenerescência dos níveis de energia.

RESOLUÇÃO

Vamos começar escrevendo equação de autovalores do operador H:

$$H \left|\psi_n\right\rangle = E_n \left|\psi_n\right\rangle$$

$$\left(H_0 + H_1\right) \left|\psi_n\right\rangle = E_n \left|\psi_n\right\rangle$$

$$\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2 + \lambda X\right) \left|\psi_n\right\rangle = E_n \left|\psi_n\right\rangle .$$

Tomando apenas a parte da equação correspondente a direção x, obtemos

$$\left(\frac{P_X^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2 + \lambda X\right) \left|\psi_n\right\rangle_x = E_{n_x} \left|\psi_n\right\rangle_x . \tag{1}$$

Fazendo $X' = X + \lambda \left(m\omega^2\right)^{-1}$ e resolvendo apenas para a direção x, obtemos

$$\left[\frac{P_X^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left(X' + \frac{\lambda}{m\omega^2}\right)^2\right] \left|\psi_n\right\rangle_x = E^0_{n_x} \left|\psi_n\right\rangle_x$$

$$\left[\frac{P_X^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X'^2 + \lambda X' + \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}\right] \left|\psi_n\right\rangle_x = E^0_{n_x} \left|\psi_n\right\rangle_x$$

$$\left[\frac{P_X^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X'^2 + \lambda X'\right] \left|\psi_n\right\rangle_x = \left(E^0_{n_x} - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}\right) \left|\psi_n\right\rangle_x . \tag{2}$$

Comparando a equação (1) com a equação (2), vemos que a perturbação causa um deslocamento na energia E_{n_x}

$$E_{n_x} = E^0_{n_x} - \frac{\lambda}{2m\omega^2}.$$

Podemos então escrever a energia total como

$$E_n = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} + (n_y + n_z + 1)\,\hbar\omega$$

$$E_n = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}.$$

Tanto o estado fundamental como o primeiro estado excitado continuam degenerados.