F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº2 - PAD

UNICAMP, 18 de setembro de 2017

Paridade de vetores

Vamos definir o operador paridade Π como aquele que atuando numa base $|\mathbf{r}\rangle$, tem a seguinte propriedade

$$\Pi\,|\mathbf{r}\rangle = |{-\mathbf{r}}\rangle\,, \tag{1}$$

ou dado um ket $|\psi\rangle = \int d^3r\,\psi(r)\,|\mathbf{r}\rangle$ representado na base $|\boldsymbol{r}\rangle$

$$\langle \boldsymbol{r}\,|\Pi|\,\psi\rangle = \psi\,(-\mathbf{r})\,.$$

Se um ket $|\varphi_\pi\rangle$ é um autovetor de Π com autovalor p_π, então escrevemos

$$|\varphi_\pi\rangle = \Pi^2\,|\varphi_\pi\rangle = p_\pi^2\,|\varphi_\pi\rangle\,, \tag{2}$$

já que a aplicação dupla de Π em (1) nos permite ver que $\Pi^2 = I$, onde I é o operador identidade.

Usando a expressão (2) vemos que $p_\pi = \pm 1$. Portanto, se $|\varphi_\pi\rangle$ é um autovetor de Π com autovalor $p_\pi = +1$, então $|\varphi_\pi\rangle$ é dito par. Simetricamente, se $p_\pi = -1$, então $|\varphi_\pi\rangle$ é dito ímpar.

Paridade de operadores

Agora extendemos o conceito de paridade de vetores para operadores. Uma transformação é dita unitária se dado um operador B, submetido à transformação

$$\tilde{B} = \Pi B \Pi,$$

satisfaz a relação $\left\langle \boldsymbol{r} \left| \tilde{B} \right| \mathbf{r}' \right\rangle = \langle -\boldsymbol{r}\,|B| - \mathbf{r}'\rangle$.

Definimos o operador B como par se $\tilde{B} = +B$ e ímpar se $\tilde{B} = -B$. Um operador par, seja B_+, satisfaz $B_+ = \Pi B_+ \Pi$, o que é equivalente a dizer que $[\Pi, B_+] = 0$. Simetricamente, o operador ímpar B_- obedece a relação de anticomutação: $\Pi B_- + B_- \Pi = 0$.

Questão 1 - (a) Mostre que os operadores X e P_x são ímpares. (b) A Hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional tem paridade par ou ímpar?

RESPOSTA:

a) Vamos verificar se o operador X satisfaz a comutação ou anticomutação com o operador paridade. Sendo assim:

$$\mathit{\Pi} X \left|\mathbf{r}\right\rangle = \mathit{\Pi} X \left|x,\, y,\, z\right\rangle = x \mathit{\Pi} \left|x,\, y,\, z\right\rangle = x \left|-\mathbf{r}\right\rangle$$

$$X \mathit{\Pi} \left|\mathbf{r}\right\rangle = X \left|-\mathbf{r}\right\rangle = -x \left|-\mathbf{r}\right\rangle$$

$$\left(\mathit{\Pi} X + X \mathit{\Pi}\right) \left|\mathbf{r}\right\rangle = 0.$$

Logo X é um operador ímpar. Analogamente para P_x,

$$\begin{aligned} \mathit{\Pi} \left|\mathbf{p}\right\rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \mathit{\Pi} \left|\mathbf{r}\right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \left|-\mathbf{r}\right\rangle \\ &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\infty}^{-\infty} d^3r\, e^{i(-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}'/\hbar} \left|\mathbf{r}'\right\rangle = \left|-\mathbf{p}\right\rangle, \end{aligned}$$

logo uma demonstração análoga a X para P_x na base de momento é válida e P_x é ímpar.

b) Escrevemos a Hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional como

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2.$$

Analisando o comutador $[\mathit{\Pi},\, H]$, temos

$$[\mathit{\Pi},\, H] = \frac{1}{2m} \left[\mathit{\Pi},\, P_x^2\right] + \frac{m\omega^2}{2} \left[\mathit{\Pi},\, X^2\right].$$

Agora avaliamos cada um dos comutadores acima:

$$\begin{aligned} \left[\mathit{\Pi},\, X^2\right] \left|\mathbf{r}\right\rangle &= \mathit{\Pi} X^2 \left|\mathbf{r}\right\rangle - X^2 \mathit{\Pi} \left|\mathbf{r}\right\rangle \\ &= x^2 \mathit{\Pi} \left|\mathbf{r}\right\rangle - X^2 \left|-\mathbf{r}\right\rangle \\ &= x^2 \left|-\mathbf{r}\right\rangle - x^2 \left|-\mathbf{r}\right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Analogamente para P_x,

$$\left[\mathit{\Pi},\, P_x^2\right] \left|\mathbf{p}\right\rangle = \mathit{\Pi} P_x^2 \left|\mathbf{p}\right\rangle - P_x^2 \mathit{\Pi} \left|\mathbf{p}\right\rangle$$

$$= p_x^2 \Pi \left|\mathbf{p}\right\rangle - P_x^2 \left|-\mathbf{p}\right\rangle$$
$$= p_x^2 \left|-\mathbf{p}\right\rangle - p_x^2 \left|-\mathbf{p}\right\rangle = 0.$$

Sendo assim $[\Pi,\, H] = 0$, portanto H é um operador par.

Questão 2 - Seja um observável par B_+ com autovetores $\left|\varphi_b\right\rangle$ e autovalores b. Mostre que se b é não-degenerado, então os autovetores $\left|\varphi_b\right\rangle$ são ou pares ou ímpares.

RESPOSTA:

Seguindo a hipótese do problema, podemos escrever que

$$B_+ \left|\varphi_b\right\rangle = b \left|\varphi_b\right\rangle ,$$

onde para cada b corresponde um único $\left|\varphi_b\right\rangle$. Como B_+é par, então $[\Pi,\, B_+] = 0$, logo se multiplicamos Π em ambos os lados da equação de autovalores

$$\Pi B_+ \left|\varphi_b\right\rangle = b\Pi \left|\varphi_b\right\rangle$$
$$B_+ \left(\Pi \left|\varphi_b\right\rangle\right) = b \left(\Pi \left|\varphi_b\right\rangle\right).$$

Portanto, $\Pi \left|\varphi_b\right\rangle$ também é um autovetor de B_+ com autovalor b. Como b é, por definição, não-degenerado, então todos os autovetores associados a ele são proporcionais à $\left|\varphi_b\right\rangle$. Em outras palavras,

$$\Pi \left|\varphi_b\right\rangle = A \left|\varphi_b\right\rangle .$$

Comparando a última expressão com (2), vemos que $A = p_\pi = \pm 1$. Logo $\left|\varphi_b\right\rangle$ é ou par ou ímpar.

Vale a comparação do resultado da questão 2 com o oscilador harmônico unidimensional. De fato, H só é par devido a paridade do potencial quadrático, já que o termo cinético, $P_x/2m$, é sempre par. Agora analisemos os estados de H, ou seja,

$$\varphi_n\left(x\right) = \left[\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{d}{dx}\right]^n \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right).$$

Veja que o último fator corresponde a uma derivada de ordem n de uma função Gaussiana. Invariavelmente podemos expressar essa relação em termos de polinômios de Hermite, de fato, as autofunções do oscilador harmônico são mais facilmente escritas como

$$\varphi_n\left(x\right) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$

onde H_n é o polinômio de Hermite de ordem n. Portanto, os φ_n's são pares se n é par e ímpares caso contrário.