F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº6

UNICAMP, 30 de outubro de 2017

Questão 1 adaptada do livro Quantum Mechanics - "Merzbacher": Dado um estado representado pela função

$$\psi(\mathbf{r}) = Ne^{-\alpha r^2}(x+y)z, \tag{1}$$

a) Escreva a função em termos de harmônicos esféricos.

b) $\psi(\mathbf{r})$ é autofunção de $\mathbf{L}^2$?

c) $\psi(\mathbf{r})$ é autofunção de L_z?

d) Uma medida de L_z pode resultar quais valores?

e) Qual a probabilidade de medir L_z igual a $-\hbar$?

a) Para isso vamos trabalhar em coordenadas esféricas

$$\begin{array}{c} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\ . \tag{2}$$

Sabemos que os harmônicos esféricos são dados por

$$Y_{l=0}^{m=0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$Y_1^{0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{1}(\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_2^{-1}(\theta,\,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\,\theta\,\cos\,\theta\,e^{-i\varphi} \tag{3}$$

$$Y_2^{1}(\theta,\,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\,\theta\,\cos\,\theta\,e^{i\varphi} \tag{4}$$

$$\vdots$$

Substituindo (2) em (1) temos,

$$\psi(\mathbf{r}) = Ne^{-\alpha r^2}r^2\left(\sin\,\theta\,\cos\,\theta\,\cos\,\varphi + \sin\,\theta\,\cos\,\theta\,\sin\,\varphi\right), \tag{5}$$

e usando (3) e (4),

$$\sin\,\theta\,\cos\,\theta\,\cos\,\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[Y_2^{-1} - Y_2^{1}\right] \tag{6}$$

$$\sin\,\theta\,\cos\,\theta\,\sin\,\varphi = i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[Y_2^{-1} - Y_2^{1}\right]. \tag{7}$$

Reescrevendo (5),

$$\psi(\mathbf{r}) = Ne^{-\alpha r^2}r^2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[(i+1)\,Y_2^{-1} + (i-1)\,Y_2^{1}\right]. \tag{8}$$

b) Sabendo que

$$\mathbf{L}^2\,|l,\,m\rangle = l\,(l+1)\,\hbar^2\,|l,\,m\rangle\,,$$

temos

$$\mathbf{L}^2\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,\mathbf{L}^2\left[(i+1)\,Y_2^{-1} + (i-1)\,Y_2^{1}\right],$$

onde $f(\mathbf{r}) \equiv Ne^{-\alpha r^2}r^2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2\psi(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r})\left[2\,(2+1)\,\hbar^2\right]\left[(i+1)\,Y_2^{-1} + (i-1)\,Y_2^{1}\right] \\ &= 6\hbar^2\psi(\mathbf{r})\,.\end{aligned}$$

Logo, $\psi(\mathbf{r})$ é autofunção de $\mathbf{L}^2$ com autovalor $6\hbar^2$. Podemos dizer que $\psi(\mathbf{r})$ tem $l = 2$.

c) Item de verificação óbvia.

d) Pode resultar os valores $+\hbar$ ou $-\hbar$.

e) Escrevemos a probabilidade como

$$\text{Prob }(m=1) = \frac{\langle \psi \,| P_{m=-1} |\, \psi \rangle}{\langle \psi \,|\, \psi \rangle}$$

$$= \frac{\left| \langle l=2,\, m=1 \,|\, \psi \rangle \right|^2}{\langle \psi \,|\, \psi \rangle}$$

$$= \frac{\left| f\left(\mathbf{r}\right)\right|^2 \left| i+1 \right|^2}{\left| f\left(\mathbf{r}\right)\right|^2 \left[\left| i+1 \right|^2 + \left| i-1 \right|^2 \right]} = \frac{1}{2},$$

onde consideramos $P_{m=-1} = \langle l=2,\, m=-1|$ e $\langle \theta,\, \varphi \,|\, l\, m \rangle = Y_l^m\left(\theta,\, \varphi\right)$.