F 689 - Turma A
Aula de exercícios nº3 - PAD

UNICAMP, 31 de outubro de 2017

Paridade dos harmônicos esféricos

Relembrando a definição de paridade da última aula, um operador Π de paridade é aquele definido pela operação que leva um ponto $\mathbf{r}$ ao seu simétrico $-\mathbf{r}$. Em coordenadas cartesianas essa operação é feita simplesmente trocando o sinal de cada componente:

$$\mathbf{r} = (x,\, y,\, z) \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{r} = (-x,\, -y,\, -z)\,.$$

Nesta aula temos interesse, porém, em funções escritas em coordenadas esféricas. Nesse caso a transformação de paridade pode ser executada mediante a seguinte mudança nas coordenadas:

$$\mathbf{r} = (r,\, \theta,\, \varphi) \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{r} = (r,\, \pi - \theta,\, \pi + \varphi)\,, \tag{1}$$

onde a coordenada r deve, obviamente, se manter inalterada, pois não mudamos o módulo do vetor $\mathbf{r}$. A coordenada θ foi refletida em relação ao plano xy e a coordenada φ foi acrescida de um ângulo de π rad.

Agora usamos o fato de que um harmônico esférico é independente de r e $Y_l^l(\theta,\, \varphi)$, isto é, $Y_l^m(\theta,\, \varphi)$ para $m = l$, pode ser expresso genericamente como

$$Y_l^l(\theta,\, \varphi) = c_l\,(\sin\,\theta)^l\, e^{il\varphi}, \tag{2}$$

onde c_l é uma constante arbitrária. Aplicando a transformação de paridade em (2), obtemos

$$\begin{aligned} Y_l^l(\theta,\, \varphi) \quad &\Rightarrow Y_l^l(\pi - \theta,\, \pi + \varphi) = c_l\,[\sin\,(\pi - \theta)]^l\, e^{il\pi} e^{il\varphi} \\ Y_l^l(\pi - \theta,\, \pi + \varphi) &= (-1)^l\, c_l\,(\sin\,\theta)^l\, e^{il\varphi} = (-1)^l\, Y_l^l(\theta,\, \varphi)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Questão 1 - Usando a relação abaixo,

$$Y_l^m(\theta,\, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!\,(l-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_l^l(\theta,\, \varphi)\,,$$

mostre que a paridade dos harmônicos esféricos depende da paridade de l.

RESPOSTA:

Usando a fórmula do enunciado, vamos nos aproveitar para definir $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ em termos de $Y_l^l(\theta,\,\varphi)$ de uma maneira mais simplificada, fazendo,

$$Y_l^m(\theta,\,\varphi) \equiv C\,(L_-)^{l-m}\,Y_l^l(\theta,\,\varphi)\,,$$

já que a constante C carrega todos os termos sem dependência com θ ou φ.

Analisamos, portanto, o efeito da paridade sobre o operador L_-. Note que, dado o efeito da transformação de paridade sobre θ e φ como

$$\theta \Rightarrow \pi - \theta \quad \text{e} \quad \varphi \Rightarrow \pi + \varphi,$$

então o efeito sobre as derivadas deve ser,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Como

$$L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right],$$

então, aplicando (1),

$$\begin{aligned} L_- &= \hbar e^{-i(\pi+\varphi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\,(\pi-\theta)\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\ &= \hbar e^{-i\varphi}e^{-i\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\ &= \hbar e^{-i\varphi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned}$$

Logo, o operador L_- permanece o mesmo sob um transformação de paridade.

Dessa maneira podemos novamente usar a fórmula do enunciado e aplicar a transformação de paridade em $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$, obtendo,

$$Y_l^m(\theta,\,\varphi) \quad \Rightarrow Y_l^m(\pi-\theta,\,\pi+\varphi) = C\,(L_-)^{l-m}\,Y_l^l(\pi-\theta,\,\pi+\varphi)\,.$$

Usando o resultado de (3),

$$Y_l^m(\pi-\theta,\,\pi+\varphi) = (-1)^l\,C\,(L_-)^{l-m}\,Y_l^l(\theta,\,\varphi) = (-1)^l\,Y_l^m(\theta,\,\varphi)\,.$$

Portanto, se l é par, a transformação de paridade leva $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ nela mesma e $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ é par . Se l é ímpar, a transformação de paridade leva $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ em seu oposto e $Y_l^m(\theta,\,\varphi)$ é ímpar.