F 689 - Turma A
Aula de exercício 1 - Carlos Galdino

UNICAMP, 12 de março de 2018

Exercício 6.10 do livro do Sakurai.

Considere o espalhamento por um potencial de casca delta repulsivo,

$$\frac{2m}{h^2}V(r) = \gamma\delta(r - R) \tag{1}$$

Monte uma equação que determine o desvio do fase δ_0 da onda S como função de k ($E = h^2k^2/2m$).

Resposta:

Dentro da casca (região I) a partícula é livre e parte radial da função de onda é dado por,

$$A_l(r) = c_l j_l(kr) \tag{2}$$

Fora da casca (região II) a partícula também é livre. A parte radial da função de onda já em termos do desvio de fase é dado por,

$$A_l(r) = e^{i\delta_l}[\cos\delta_l j_l(kr) + \sin\delta_l \eta_l(kr)] \tag{3}$$

Sabemos que a função de onda e sua primeira derivada devem ser continuas em todo o espaço. temos uma descontinuidade no potencial, neste caso a primeira derivada da função de onda será descontinua. Precisamos resolver a equação de altovalor $H\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi$ (feito em sala) para encontrar a descontinuidade que é dada por,

$$lim_{\epsilon\to 0}\frac{d}{dr}u_0(r)|_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \gamma u_0(R) \tag{4}$$

Agora podemos conectar a região I com a região II. Primeira conectamos a função de onda,

$$A_0(R)_{\text{inside}} = A_0(R)_{\text{outside}} \Rightarrow c_0 \sin kR = e^{i\delta_0}\sin(kR + \delta_0) \tag{5}$$

Onde usamos a relação: $\sin a \cos b = 1/2[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$.

Agora conectamos a primeira derivada,

$$\frac{du_0(r)}{dr}|_{r=R(\text{from outside})} - \frac{du_0(r)}{dr}|_{r=R(\text{from inside})} = \gamma u_0(R) \tag{6}$$

Lembrando que $Al(r) = u_l(r)/r$ temos,

$$\frac{e^{i\delta_0}}{k}\frac{d}{dr}\sin(kr+\delta_0)|_{r=R} - \frac{c_0}{k}\frac{d}{dr}\sin(kr)|_{r=R} = \gamma\frac{c_0}{k}\sin(kR) \tag{7}$$

Juntando (5) e (7) e usando que $\tan(a+b) = \tan a + \tan b/(1-\tan a \tan b)$ temos,

$$\tan\delta_0 = \frac{\frac{\gamma}{k}\sin^2 kR}{\frac{\gamma}{k}\sin kR\cos kR + 1} \tag{8}$$

Formulário:

$$A_l(kr) = e^{i\delta_l}(\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l \eta_l(kr)) \tag{9}$$

$$A_l(kr) = \frac{u_{k,l}(r)}{r} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Funções de Bessel e Neumman esféticas para l=0,1,2:

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \qquad \eta_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}$$

$$j_1(kr) = \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr} \qquad \eta_1(kr) = -\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}$$

$$j_2(kr) = \frac{3\sin kr}{(kr)^3} - \frac{3\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr} \qquad \eta_2(kr) = -\frac{3\cos kr}{(kr)^3} - \frac{3\sin kr}{(kr)^2} + \frac{\cos kr}{kr}$$