F 789 - Turma A
Aula de exercício 3 - Carlos Galdino

UNICAMP, 4 de abril de 2018

Adaptado do exercício 3.24 do livro do Sakurai.

Temos que adicionar os momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$ para formar os estados $j = 2$, 1 e 0.

a) Quais os kets que expandem o espaço na base $\{j_1, j_2; m1, m2\}$?

a) Quais os kets que expandem o espaço na base $\{j_1, j_2; j, m\}$?

c) Expresse todos os (nove) autovetores $\{j, m\}$ em termos de $|j_1, j_2; m1, m2\rangle$. Escreva suas respostas como

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, +\rangle$$

Onde $+$, 0 e $-$ são os valores de $m_{1,2} = 1$, 0 e -1, respectivamente.

Resposta:

a) Para simplificar, vamos omitir os indices $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$.

$$\begin{array}{ccc} |+,+\rangle & |0,+\rangle & |-,+\rangle \\ |+,0\rangle & |0,0\rangle & |-,0\rangle \\ |+,-\rangle & |0,-\rangle & |-,-\rangle \end{array}$$

Perceba que temos 9 kets.

b) Novamente, vamos omitir os indices $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$.

$$\begin{array}{ccc} |2,2\rangle & |2,-1\rangle & |1,0\rangle \\ |2,1\rangle & |2,-2\rangle & |1,-1\rangle \\ |2,0\rangle & |1,1\rangle & |0,0\rangle \end{array}$$

Novamente temos 9 kets.

c) A dica é sempre começar pelo ket com j e m mais alto, no caso $|j = 2, m = 2\rangle$. A forma desse ket é trivial devido a relação $m_1 + m_2 = m$. Dessa forma o único ket de $\{m_1, m_2\}$ que satisfaz a condição $m_1 + m_2 = 2$ é o ket $|+, +\rangle$, logo,

$$|j = 2, m = 2\rangle = |+, +\rangle$$

Agora sendo o operador escada J_- tal que,

$$J_{\pm} |j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)\hbar} |j, m \pm 1\rangle \tag{1}$$

$$J = J_{1-} + J_{2-} \tag{2}$$

para achar os outros kets de j,m basta aplicar J_- em $|j = 2, m = 2\rangle$. Usando (1) temos,

$$J_- |j = 2, m = 2\rangle = 2\hbar |2, 1\rangle$$

Rearrajando e usando (2) temos,

$$|2,1\rangle = \frac{1}{2\hbar} J_- |j = 2, m = 2\rangle = \frac{1}{2\hbar}(J_{1-} + J_{2-}) |j = 2, m = 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,0\rangle + |0,+\rangle) \tag{3}$$

NOTA: Perceba que já sabiamos que a forma de $|2,1\rangle$ seria do tipo $|2,1\rangle = a|+,0\rangle + b|0,+\rangle$. Isso se dá devido a condição $m_1 + m_2 = m$. Os coeficientes a e b são valores tabelados conhecidos como coeficientes de Clebsh-Gordon.

Aplicar J_- em $|j = 2, m = 1\rangle$ irá nos dar $|j = 2, m = 0\rangle$ e é só repetir o procedimento até $|j = 2, m = -2\rangle$.

Quando chegarmos no $|j = 2, m = -2\rangle$, a aplicação do operador J_- resultara em zero. Agora precisamos passar para os kets com $j = 1$. Começando do $\{j = 1, m\}$ com m mais alto temos (pela condição $m_1 + m_2 = m$) que,

$$|j = 1, m = 1\rangle = a|+,0\rangle + b|0,+\rangle \tag{4}$$

Perceba que os kets a forma de $|j = 1, m = 1\rangle$ é a mesma de $|j = 2, m = 1\rangle$ (ver eq 3). Agora é só usarmos a condição que $|j = 1, m = 1\rangle$ e $|j = 2, m = 1\rangle$ devem ser ortogonais. Uma das formas de definir a e b na eq 4 de forma que eles sejam ortogonais é,

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,0\rangle - |0,+\rangle)$$

A partir de $|j = 1, m = 1\rangle$ podemos construir todos os kets de $\{j,m\}$ com $j = 1$ aplicando o operador J_-.