

**F 789 - Turma A**  
**Aula de exercício 4 - Carlos Galdino**

UNICAMP, 16 de abril de 2018

Adaptado do exercício 5.4 do livro do Sakurai.

Considere um oscilador harmônico isotrópico em duas dimensões. O hamiltoniano é dado por,

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

a) Quais são as energias dos três estados de mais baixa energia? Existe alguma degenerescência?

b) Aplique a perturbação  $V = \delta m\omega^2 xy$ , onde  $\delta$  é um número real sem dimensão muito pequeno. Utilize teoria da perturbação independente do tempo para encontrar os autovetores até ordem zero e as energias até primeira ordem.

c) [Para casa] Resolva o hamiltoniano total  $H = H_0 + V$  de forma exata e compare com os resultados obtidos por teoria da perturbação.

Resposta:

a) A energia do oscilador harmônico simples é dado por  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ . Sabendo disso, temos que a energia do oscilador harmônico isotrópico em duas dimensões é,

$$E_{n_x, n_y}^0 = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$$

É imediato ver que as energias dos três primeiros estados serão:  $E_{00}^0 = \hbar\omega$  e  $E_{01}^0 = E_{10}^0 = 2\hbar\omega$ .

b) Aplicamos a perturbação de forma que o hamiltoniano total fica  $H = H_0 + V$ . Vamos começar pela energia do estado fundamental (é mais fácil, pois ele é não degenerado).  $\epsilon_1 = \langle \phi_{00}^0 | V | \phi_{00}^0 \rangle$  onde  $|\phi_{n_x n_y}^0\rangle$  representa o estado do sistema não perturbado. Sabemos que  $\phi_{n_x n_y}^0(x, y) = \langle \mathbf{r} | \phi_{n_x n_y}^0 \rangle = \frac{m\omega}{\pi\hbar}^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}$ , logo

$$\epsilon_1 = \left( \frac{m^2 \omega^3}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x y e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)}$$

Fazendo  $u = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2)}$  veremos que  $\epsilon_1 = 0$ . Não há correção até primeira ordem.

Como o estado é não degenerado, o estado perturbado até ordem zero é  $\phi_{n_x n_y}(x, y) = \phi_{n_x n_y}^0(x, y)$ .

Para o primeiro estado excitado temos que resolver os autoestados e autovetores da matriz  $V$  no sub espaço formado pelos autoestados do primeiro estado excitado.

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_{01}^0 | V | \phi_{01}^0 \rangle & \langle \phi_{01}^0 | V | \phi_{10}^0 \rangle \\ \langle \phi_{10}^0 | V | \phi_{01}^0 \rangle & \langle \phi_{10}^0 | V | \phi_{10}^0 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi_{01}^0 | 0 \rangle \\ \langle \phi_{10}^0 | 0 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon_1 \begin{pmatrix} \langle \phi_{01}^0 | 0 \rangle \\ \langle \phi_{10}^0 | 0 \rangle \end{pmatrix}$$

Podemos resolver os elementos de matriz usando  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x^\dagger + a_x)$ . Com isso chegamos a relação,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\omega}{2} \\ \frac{\hbar\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi_{01}^0 | 0 \rangle \\ \langle \phi_{10}^0 | 0 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon_1 \begin{pmatrix} \langle \phi_{01}^0 | 0 \rangle \\ \langle \phi_{10}^0 | 0 \rangle \end{pmatrix}$$

Isso nos dá dois autovalores  $\epsilon_1 = \pm \frac{\hbar\omega}{2}$  (correção da energia até ordem 1) com autovetores  $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{10}\rangle \pm |\phi_{01}\rangle)$  (autoestados até ordem zero). Note que a perturbação quebra a degenerescência.