F 789 - Turma A
Aula de exercício 5 - Carlos Galdino

UNICAMP, 7 de maio de 2018

Complemento E do capítulo 12 do Cohen e exercício 5.7 adaptado do livro do Sakurai.

Considere o átomo de hidrogênio colocado em um campo elétrico uniforme e estático na direção Z. Considere que o campo elétrico aplicado é pequeno, tal que possa ser tratado como uma perturbação no sistema. Responda,

a) Calcular o estado fundamental perturbado até primeira ordem (vamos precisar para calcular a energia perturbada do estado fundamental).

b) Calcular a energia do estado fundamental perturbado.

c) Calcule o valor esperado da polarização P do estado fundamental perturbado até primeira ordem.

Resposta:

a) O campo elétrico na direção Z resulta em uma a força de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = qE\hat{z}$. A força pode ser escrita como o gradiente de um potencial $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ dessa forma $V = -qEZ$.

O Hamiltoniano do átomo de hidrogênio em um campo elétrico pode ser dado por,

$$H = H_0 + W$$

onde W = -qEZ. O estado fundamental pode ser representado por $|100\rangle$, de forma que o estado fundamental perturbado é,

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + |1\rangle = |100\rangle + E(-q)\sum_{n\neq 1}\frac{\langle nlm|Z|100\rangle}{(E_1 - E_n)}\,|nlm\rangle$$

b) A correção de ordem um é dada por,

$$\epsilon_1 = \langle 100|W|100\rangle = -qE\,\langle 100|Z|100\rangle = 0$$

Vemos que a integral acima é nula, pois a paridade do estado $|100\rangle$ é par (Lembrar que a paridade dos harmônicos esféricos é dado por $(-1)^l$) e a paridade do operador Z é ímpar (pois se você "inverte" o sistema de coordenas Z se torna -Z).

A correção de segunda ordem é dado por,

$$\epsilon_2 = \langle 100|W|1\rangle = \sum_{n\neq 1} \frac{|\langle nlm|W|100\rangle|^2}{(E_1 - E_n)} = E^2 q^2 \sum_{n\neq 1} \frac{|\langle nlm|Z|100\rangle|^2}{(E_1 - E_n)}$$

Portanto a energia do estado fundamental perturbado até segunda ordem é $E = E_0 + \epsilon_2$, onde E_0 é a energia do estado fundamental não perturbado.

c) A polarização $\boldsymbol{P}$ é dada por $\boldsymbol{P} = q\boldsymbol{R}$. O valor esperado da polarização para o estado fundamental perturbado até primeira ordem é dada por,

$$\langle \boldsymbol{P}\rangle = \langle \psi_0|\boldsymbol{P}|\psi_0\rangle = q\,\langle 100|\boldsymbol{R}|100\rangle + q2E(-q)\sum_{n\neq 1} \frac{\langle nlm|Z|100\rangle\,\langle 100|\boldsymbol{R}|nlm\rangle}{(E_1 - E_n)}$$

$$\langle \boldsymbol{P}\rangle = -2Eq^2 \sum_{n\neq 1} \frac{|\langle nlm|Z|100\rangle|^2}{(E_1 - E_n)}$$

Perceba que os termo $\langle 100|X|nlm\rangle$ e $\langle 100|Y|nlm\rangle$ são zeros, por isso o termo $\langle 100|\boldsymbol{R}|nlm\rangle = \langle 100|Z|nlm\rangle$. Isso é fácil de ver se transformarmos X e Y em tensores esféricos de ordem 1, isso não é visto na graduação. Um jeito intuitivo de ver isso é perceber que a polarização acontece na direção Z (direção do campo elétrico).