F 789 - Turma A
Aula de exercício 6 - Carlos Galdino

UNICAMP, 21 de maio de 2018

Exercício 5.29 adaptado do livro do Sakurai.

Considere um sistema com duas partículas de spins 1/2. Para $t < 0$ o hamiltoniano não depende do spin e podemos assumir que ele é zero ajustando a escala de energia de forma conveniente.

Para $t > 0$ a interação entre a duas partículas muda e hamiltoniano ganha um termo adicional dado por

$$H' = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$$

Para $t < 0$ o sistema encontra-se no estado $|{+}{-}\rangle$. Encontre a probabilidade (em função do tempo) de se encontrar o sistema nos seguintes estados $|{+}{+}\rangle$, $|{+}{-}\rangle$, $|{-}{+}\rangle$ e $|{-}{-}\rangle$:

a) Utilizando teoria da perturbação dependente do tempo até primeira ordem.

b) Exatamente.

Resposta:

a) Primeiramente, vamos reescrever o hamiltoniano de uma forma mais conveniente,

$$H' = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}_1^2 - \boldsymbol{S}_2^2)$$

A presença de $\boldsymbol{S}$ (spin total do sistema) nos induz a trocar a base do espaço de $\{S_1, S_2, m_1, m_2\}$ para $\{S_1, S_2, S, m\}$, dessa forma temos,

$$\begin{aligned}
|11\rangle &= |{+}{+}\rangle \\
|1-1\rangle &= |{+}{+}\rangle \\
|10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle) \\
|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle)
\end{aligned}$$

O estado inicial do sistema será representado por,

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle)$$

O estado do sistema para $t > 0$ será,

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n(t)\,|\phi_n\rangle$$

onde $|\phi_n\rangle$ são autoestados do hamiltoniano não perturbado e $C_n(t)$ são coeficientes que podem ser achados exatamente ou por teoria da perturbação dependente do tempo.

Utilizando teoria da perturbação dependente do tempo temos que os coeficientes $C_n(t)$ são dados até primeira ordem por $C_n(t) = C_n^0(t) + C_n^1(t)$, onde

$$\begin{aligned} C_n^0(t) &= \delta_{ni} \\ C_n^1(t) &= \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} W_{ni}(t')dt' \end{aligned}$$

Onde $\omega_{ni} = (E_n^0 - E_i^0)/\hbar)$ e $W_{ni}(t') = \langle\phi_n|W(t')|\phi_i\rangle$.

Dessa forma, calcular os coeficientes não apresenta grandes dificuldades,

$$\begin{aligned} C_{(++)}(t) &= 0 \\ C_{(--)}(t) &= 0 \\ C_{(+-}(t) &= 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} \\ C_{(-+}(t) &= -\frac{i2\Delta t}{\hbar} \end{aligned}$$

A probabilidade da transição entre o estado inicial e algum outro estado é $P_{i\to n}(t) = |C_n(t)|^2$.

$$\begin{aligned} P_{(+-)\to(++)}(t) &= 0 \\ P_{(+-)\to(--)}(t) &= 0 \\ P_{(+-)\to(+-)}(t) &= 1 + \frac{\Delta^2 t^2}{\hbar^2} \\ P_{(+-)\to(-+)}(t) &= \frac{4\Delta^2 t^2}{\hbar^2} \end{aligned}$$

b) (Para casa) Perceber que a probabilidade do estado inicial se manter no estado inicial não é bem descrito por teoria da perturbação dependente do tempo até primeira ordem. Podemos ver diretamente que algo não está certo, pois a probabilidade $P_{(+-)\to(+-)}(t)$ é maior que um. Para a solução convergir para o valor real, teriamos que calcular o problema utilizando mais alta ordem. Normalmente, esse é o caso quando se quer calcular a probabilidade do estado inicial se manter.

As outras probabilidades conferem com os valores exatos para $t\Delta << 1$.